

# DETERMINAÇÃO DE IMPULSOS DE TERRAS ATRAVÉS DE IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DOS TEOREMAS ESTÁTICO E CINEMÁTICO

Nuno Deusdado<sup>1\*</sup>, Armando N. Antão<sup>1</sup>, Mário V. da Silva<sup>1</sup> e Nuno C. Guerra<sup>1</sup>

1: UNIC, Departamento de Engenharia Civil  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Universidade Nova de Lisboa  
Caparica 2829-516 Portugal  
e-mail: nad18987, amna, mjvs, nguerra@fct.unl.pt

**Palavras chave:** Impulsos de terras, Análise limite, Teorema estático, Teorema cinemático, Método dos elementos finitos

**Resumo.** *Apresentam-se sucintamente os princípios básicos da ferramenta numérica recentemente desenvolvida baseada no método dos elementos finitos que, com uma abordagem unificada, implementa numericamente os teoremas estático e cinemático da análise limite, permitindo obter estimativas interior e exterior do conjunto das cargas de colapso de problemas de mecânica estrutural.*

*Aplica-se a referida ferramenta numérica à determinação de impulsos de terras em condições bidimensionais. O solo é considerado puramente atrítico, com superfície horizontal. Os impulsos são considerados aplicados num paramento vertical rugoso e são obtidos para carregamentos causados pelo peso próprio. Os resultados obtidos são comparados com outras soluções dos teoremas estático e cinemático e são apresentados sob a forma de fronteiras interior e exterior que constituem superfícies bidimensionais num sistema de eixos definidos pelas tensões normal e tangencial adimensionalizadas.*

## 1 INTRODUÇÃO

No presente trabalho descreve-se sucintamente os princípios que estão na base do desenvolvimento de uma ferramenta numérica baseada no método dos elementos finitos que implementa os teoremas cinemático e estático da análise limite. Tal ferramenta é aplicada à determinação de impulsos de terras causados pelo peso do solo, em estado plano de deformação e em condições drenadas. O interesse desta aplicação justifica-se pelo facto de, apesar de se tratar de um problema clássico da mecânica dos solos, não estar analiticamente resolvido, havendo no entanto soluções (parciais) que permitem efectuar a comparação com os resultados obtidos no presente trabalho e sua validação.

Os resultados obtidos são inicialmente apresentados na sua forma clássica de coeficientes de impulso activos e passivos e, em seguida, numa representação do conjunto das cargas de colapso adimensionalizadas, aproximadas quer exteriormente (teorema cinemático) quer interiormente (teorema estático).

## 2 ANÁLISE LIMITE

Considere-se um corpo constituído por um material rígido perfeitamente plástico, sujeito a carregamentos de forças de massa ( $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b}_0$ ) que são aplicadas no seu domínio  $\Omega$  e de forças de superfície ( $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{t}_0$ ) aplicadas na fronteira  $\Gamma_\sigma$  (fronteira de Neumann), que reunida à fronteira  $\Gamma_u$  (fronteira de Dirichlet) definem a fronteira  $\Gamma$  do corpo. Estes carregamentos são divididos em dois tipos: num, as forças são afectadas pelo multiplicador de carregamento  $\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ) e noutra, as forças não são afectadas por qualquer parâmetro, mantendo assim constante a sua contribuição durante o cálculo (definidas com o índice “0”).

A análise limite permite estimar para este corpo aproximações do multiplicador  $\alpha$  a partir do qual começa a haver escoamentos plásticos e deformações irreversíveis, chamado de colapso plástico. Estas aproximações resultam da aplicação dos teoremas cinemático(TC) e estático(TE).

Para o teorema cinemático da análise limite obtém-se o seguinte problema de minimização com restrições:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & \alpha(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \int_{\Omega} \mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \, d\Omega - \Pi_0(\dot{\mathbf{u}}) \\ \text{Sujeito a } & \Pi(\dot{\mathbf{u}}) = 1 \\ & \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Gamma_u \\ & \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Omega \\ & \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \mathcal{C}_c \end{aligned} \quad (1)$$

sendo a taxa de trabalho total das forças externas obtido por,

$$\Pi(\dot{\mathbf{u}}) + \Pi_0(\dot{\mathbf{u}}) = \left( \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^T \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma_\sigma \right) + \left( \int_{\Omega} \mathbf{b}_0^T \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}_0^T \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma_\sigma \right) \quad (2)$$

Para cada campo cinemático virtual os vectores  $\mathbf{u}$  e  $\dot{\mathbf{u}}$  representam respectivamente os campos de deslocamentos e de velocidade do corpo, onde as componentes de extensão e distorção da taxa de deformação plástica são armazenadas no vector  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Neste problema (equação 1)  $\mathbf{D}$  corresponde ao operador de compatibilidade diferencial,  $\mathcal{D}$  à taxa de dissipação plástica por unidade de volume e  $\mathcal{C}_c$  representa o espaço formado por todos os estados possíveis de deformação plástica (ortogonais à superfície de cedência em pelo menos um ponto) [1]. A última restrição imposta garante a regra da normalidade, permitindo assim a verificação de todos os pressupostos do teorema cinemático da análise limite.

Para o teorema estático da análise limite obtém-se o seguinte problema de maximização

com restrições:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar } \alpha \\
 & \text{Sujeito a } \mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \alpha \mathbf{b} + \mathbf{b}_0 = \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} = \alpha \mathbf{t} + \mathbf{t}_0 \quad \quad \quad \text{em } \Gamma_\sigma \\
 & \quad \quad \quad f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

Para cada campo estático admissível o vector com as componentes normais e de corte das tensões plásticas é representado por  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\mathbf{D}^T$  corresponde ao operador de equilíbrio diferencial. Neste problema (equação 3)  $\mathbf{N}$  reúne as componentes dos vectores das normais exteriores às fronteiras  $\Gamma_\sigma$  e  $f$  corresponde à função de cedência (assumida como convexa).

### 3 FERRAMENTA NUMÉRICA

Uma ferramenta numérica de elementos finitos permitindo o cálculo rigoroso de majorantes de cargas de colapso de sistemas mecânicos através de uma variante do algoritmo de Uzawa [2] tem sido desenvolvida ao longo da última década no seio do Departamento de Engenharia Civil da FCT/UNL. Este método, na forma apresentada por [3] recebe hoje em dia a designação de método de direcção alternada de multiplicadores, tradução livre da designação em inglês “alternating direction method of multipliers” (ADMM) [4]. O ADMM apresenta uma enorme eficácia e robustez (minimizando os casos de não convergência) e um raciocínio paralelizável, sendo esta última característica uma das principais razões da utilização deste algoritmo.

A comprovação destas propriedades por alguns dos autores [5, 6, 7] levou à extensão dessa ferramenta numérica para aplicação ao teorema estático da análise limite, de forma a obter minorantes rigorosos de cargas de colapso de sistemas mecânicos.

De seguida apresenta-se sucintamente as formulações dos teoremas cinemático (equação 1) e estático (equação 3) segundo a forma de um problema de ADMM.

#### 3.1 Formulação ADMM para o teorema cinemático

Considere-se um corpo contínuo discretizado em  $n_E$  elementos finitos. Aproxima-se em cada elemento finito  $i$  o campo das velocidades e da taxa de deformação plástica por um produto matriz-vector,

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{u}}^{(i)} &= \boldsymbol{\phi}_v^{(i)} \mathbf{v}^{(i)} \\
 \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{(i)} &= \boldsymbol{\phi}_e^{(i)} \mathbf{e}^{(i)}
 \end{aligned} \tag{4}$$

onde as matrizes  $(\boldsymbol{\phi}_v^{(i)}, \boldsymbol{\phi}_e^{(i)})$  armazenam as funções de forma convencionais [8]. O vector  $\mathbf{v}^{(i)}$  armazena as componentes do campo das velocidades nos graus de liberdade (nós da malha de elementos que definem o corpo). Por outro lado, o vector  $\mathbf{e}^{(i)}$  define as componentes de deformação de cada elemento, sendo estes graus de liberdade não partilhados entre elementos adjacentes (ver tabela 1).

O problema de programação matemática apresenta a seguinte forma,

Tipo de Elemento	Forma	$\mathbf{v}$	$\mathbf{e}$
Linear (isoparamétrico)	 3 nós	 3 nós	 Constante
Quadrático (superparamétrico)	 3 nós	 6 nós	 3 nós

Tabela 1: Elementos finitos 2D para a formulação do teorema cinemático

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } g(\mathbf{v}) + h(\mathbf{e}) \\ & \text{Sujeito a } \mathbf{A}_0^{1/2}(\mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{e}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5)$$

sendo,

$$g(\mathbf{v}) = \begin{cases} -\mathbf{F}_0^T \mathbf{v} & \text{se } \mathbf{F}^T \mathbf{v} = 1 \\ +\infty & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (6)$$

$$h(\mathbf{e}) = \begin{cases} \int_{\Omega} \mathcal{D}(\mathbf{e}_j) d\Omega & \text{se } \mathbf{e}_j \in \mathcal{C}_c, \quad \forall j \in \{1, \dots, n_p\} \\ +\infty & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (7)$$

Na equação (5),  $\mathbf{A}_0$  corresponde a uma matriz diagonal onde as componentes relativas às extensões são iguais a 1 e a referente à componente de distorção plástica é igual a  $\frac{1}{2}$  e  $\mathbf{B}$  representa o operador discreto de equilíbrio:

$$\mathbf{B}^{(i)} = \mathbf{D}\phi_v^{(i)} \quad (8)$$

A montagem deste operador segue o procedimento normalmente aplicado no método de elementos finitos convencionais executando-se a soma das várias contribuições de cada elemento. Na equação (6),  $\mathbf{F}$  corresponde ao vector de forças nodais, obtido através da seguinte expressão,

$$\mathbf{F}^{(i)} = \int_{\Omega^{(i)}} \left(\phi_v^{(i)}\right)^T \mathbf{b}^{(i)} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma^{(i)}} \left(\phi_v^{(i)}\right)^T \mathbf{t}^{(i)} d\Gamma_\sigma \quad (9)$$

Na equação (7),  $\mathbf{e}_j$  corresponde ao vector das componentes da taxa de deformação plástica no ponto  $j$  e  $n_p$  ao número total de pontos da malha de elementos que definem o corpo. Para um maior detalhe destes operadores pode-se consultar trabalhos anteriormente realizados por alguns dos autores [5, 6, 7].

### 3.2 Formulação ADMM para o teorema estático

Considere-se um corpo contínuo discretizado em  $n_E$  elementos finitos. Define-se em cada elemento finito  $i$  o campo das tensões (assumido como linear) por duas aproximações independentes e simultâneas,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^{(i)} &= \boldsymbol{\phi}^{(i)}\mathbf{s}^{(i)} \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)} &= \boldsymbol{\phi}^{(i)}\tilde{\mathbf{s}}^{(i)}\end{aligned}\tag{10}$$

onde a matriz  $\boldsymbol{\phi}^{(i)}$  e os vectores  $\mathbf{s}^{(i)}$  e  $\tilde{\mathbf{s}}^{(i)}$  armazenam respectivamente as funções de forma e as componentes nodais de tensão. Como as aproximações são locais ao elemento finito, estes graus de liberdade não são partilhados entre elementos (ver tabela 2).

Tipo de Elemento	Forma	$\mathbf{s}$	$\tilde{\mathbf{s}}$
Linear (isoparamétrico)	 3 nós	 3 nós	 3 nós

Tabela 2: Elementos finitos 2D para a formulação do teorema estático

O problema de programação matemática apresenta a seguinte forma,

$$\begin{aligned}\text{Minimizar} & \quad g(\alpha, \mathbf{s}) + h(\tilde{\mathbf{s}}) \\ \text{Sujeito a} & \quad \mathbf{A}_0^{-1/2}(\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}}) = \mathbf{0}\end{aligned}\tag{11}$$

sendo,

$$g(\alpha, \mathbf{s}) = \begin{cases} -\alpha & \text{se } \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{s} - \alpha \hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{F}}_0 \\ +\infty & \text{Caso contrário} \end{cases}\tag{12}$$

$$h(\tilde{\mathbf{s}}) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(\tilde{\mathbf{s}}_j) \leq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, n_p\} \\ +\infty & \text{Caso contrário} \end{cases}\tag{13}$$

onde  $\tilde{\mathbf{s}}_j$  representa o vector das componentes de tensão no ponto  $j$ . O operador de equilíbrio,  $\hat{\mathbf{B}}^T$ , define-se através de duas sub-matrizes,

$$\left(\hat{\mathbf{B}}^{(i)}\right)^T = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}^T \boldsymbol{\phi}^{(i)} \\ \mathbf{N}^{(i)} \end{bmatrix}\tag{14}$$

onde  $\mathbf{D}^T \boldsymbol{\phi}^{(i)}$  e  $\mathbf{N}^{(i)}$  representam respectivamente o operador discreto de equilíbrio no elemento e nas fronteiras. Logo, o vector de forças associado,  $\hat{\mathbf{F}}$ , também é sub-dividido em

$$\hat{\mathbf{F}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{(i)} \\ \mathbf{t}^{(i)} \end{bmatrix}\tag{15}$$

sendo  $\mathbf{b}^{(i)}$  o vector das componentes das forças de massa aplicadas no centro de massa do elemento e  $\mathbf{t}^{(i)}$  o vector das componentes das forças aplicadas nas fronteiras do elemento. A montagem destes operadores é um pouco diferente do procedimento normalmente aplicado no método de elementos finitos convencional. Com efeito, as contribuições de cada elemento, tanto no equilíbrio do elemento como das fronteiras, são distintos entre si o que faz com que não exista sobreposição de contribuições. Para um maior detalhe destes operadores pode-se consultar o trabalho [9].

### 3.3 Método de direcção alternada de multiplicadores

Resumidamente o método de direcção alternada de multiplicadores permite, através de uma simples separação de variáveis, decompor problemas grandes e difíceis em dois sub-problemas de resolução mais simples [4].

O primeiro sub-problema consiste na minimização do lagrangeano aumentado em ordem às variáveis da função  $g$  (equações (6) e (12)), que representam as variáveis globais. A minimização global corresponde a um problema quadrático sem restrições facilmente resolvido através de um sistema linear de equações (ver tabela 3). Nestas equações os multiplicadores de Lagrange para o caso cinemático são representados por  $\tilde{\mathbf{s}}$  (restrição linear do problema definido pela equação 5) e  $\alpha$  (restrição linear da equação 6). Por outro lado, os multiplicadores de Lagrange para o caso estático são representados  $\hat{\mathbf{e}}$  (restrição linear do problema definido pela equação (11)) e  $\hat{\mathbf{v}}$  (restrição linear da equação (12)). O parâmetro de penalidade do lagrangeano aumentado é definido por  $\rho$ .

Teorema cinemático	
Minimizar	$\mathcal{L}_G(\mathbf{v}, \alpha) = -\mathbf{F}_0^T \mathbf{v} + \alpha(1 - \mathbf{F}^T \mathbf{v}) + \tilde{\mathbf{s}}^T \mathbf{B} \mathbf{v} + \frac{\rho}{2} (\mathbf{B} \mathbf{v})^T \mathbf{A}_0 (\mathbf{B} \mathbf{v} - 2\mathbf{e})$
Solução:	$\begin{bmatrix} \rho \mathbf{B}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{B} & -\mathbf{F} \\ -\mathbf{F}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 - \mathbf{B}^T (\tilde{\mathbf{s}} - \rho \mathbf{A}_0 \mathbf{e}) \\ -1 \end{bmatrix}$
Teorema estático	
Minimizar	$\mathcal{L}_G(\alpha, \mathbf{s}, \hat{\mathbf{v}}) = -\alpha + \hat{\mathbf{v}}^T (\hat{\mathbf{F}}_0 + \alpha \hat{\mathbf{F}} - \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{s}) + \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{s} + \frac{\rho}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{A}_0^{-1} (\mathbf{s} - 2\tilde{\mathbf{s}})$
Solução:	$\begin{bmatrix} -\rho \mathbf{A}_0^{-1} & \hat{\mathbf{B}} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{B}}^T & \mathbf{0} & -\hat{\mathbf{F}} \\ \mathbf{0} & -\hat{\mathbf{F}}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \hat{\mathbf{v}} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}} - \rho \mathbf{A}_0^{-1} \tilde{\mathbf{s}} \\ \hat{\mathbf{F}}_0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Tabela 3: Minimização global: Teoremas cinemático e estático

Teorema cinemático	
Minimizar	$\mathcal{L}_L(\mathbf{e}) = \int_{\Omega} \mathcal{D}(\mathbf{e}_j) d\Omega - \mathbf{e}^T \Lambda + \frac{\rho}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{e}$
Sujeito a	$\Lambda = \tilde{\mathbf{s}} + \rho \mathbf{A}_0 \mathbf{B} \mathbf{v}$ $\mathbf{e}_j \in \mathcal{C}_c, \quad \forall j \in \{1, \dots, n_p\}$
Teorema estático	
Minimizar	$\mathcal{L}_L(\tilde{\mathbf{s}}) = -\tilde{\mathbf{s}}^T \Lambda + \frac{\rho}{2} \tilde{\mathbf{s}}^T \mathbf{A}_0^{-1} \tilde{\mathbf{s}}$
Sujeito a	$\Lambda = \tilde{\mathbf{e}} + \rho \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{s}$ $f(\tilde{\mathbf{s}}_j) \leq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, n_p\}$

Tabela 4: Minimização local: Teoremas cinemático e estático

O segundo sub-problema consiste na minimização do lagrangeano aumentado em ordem à variável da função  $h$  (equações (7) e (13)), que corresponde à variável local. Na minimização local (ver tabela 4) trata-se a não-linearidade do problema. A complexidade deste problema reduz-se significativamente devido às seguintes características:

- O operador  $\mathbf{A}_0$  é uma matriz diagonal e as funções (7) e (13) fora de um determinado domínio tomam o valor de  $+\infty$ . Estas propriedades permitem decompor este problema numa soma de problemas locais independentes, avaliados ponto a ponto.
- Os produtos de vector nas funções objectivo da tabela 4 são operações de contração tensorial (pela inclusão do operador  $\mathbf{A}_0$ ) e o material apresenta um comportamento isotrópico plástico (através das restrições não lineares). Logo, segundo [10] o eixo principal do tensor  $\Lambda$  coincide com o eixo principal dos tensores  $\mathbf{e}$  no caso do teorema cinemático e  $\tilde{\mathbf{s}}$  no caso do teorema estático.

Para cada um dos pontos  $j$ , o processo de minimização local inicia-se com a determinação dos valores e vectores próprios do tensor  $\Lambda_j$ . No espaço principal determina-se o ponto de estacionaridade ( $\mathbf{e}^u$  no caso do teorema cinemático e  $\tilde{\mathbf{s}}^u$  no caso do teorema estático) da função objectivo não tendo em conta as restrições (tabela 4). Se esta solução pertencer ao domínio possível (ou seja, se obedecer às restrições não lineares da tabela 4) está-se perante a solução óptima do problema ( $\mathbf{e}^*$  no caso do teorema cinemático e  $\tilde{\mathbf{s}}^*$  no caso do teorema estático), caso contrário é necessário projectar a solução estacionária para o domínio possível.

Uma ilustração do processo de projecção é no caso do teorema estático representado na figura 1, para o caso do teorema cinemático deve-se consultar [11].

Após a resolução destes problemas, procede-se à actualização do multiplicador de Lagrange como indicado na Tabela 5.

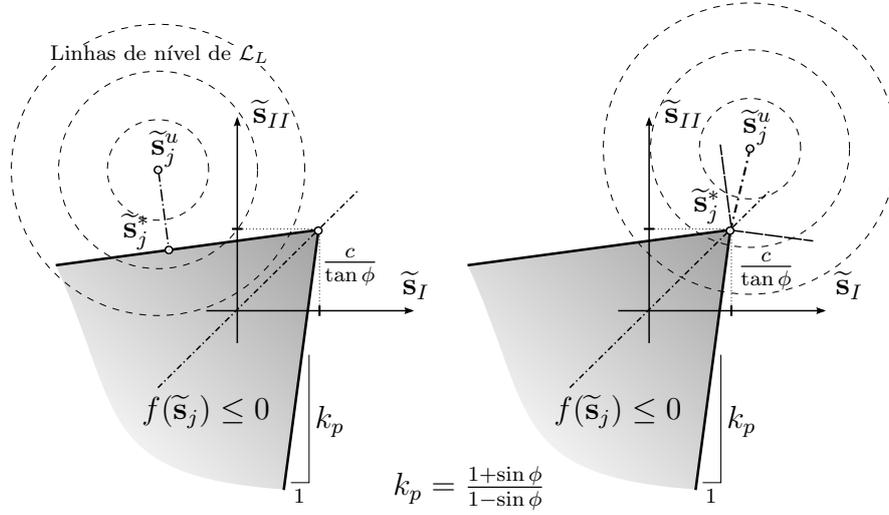


Figura 1: Projecção 2D do teorema estático na minimização local: Critério de Mohr-Coulomb em estado plano de deformação com ângulo de atrito  $\phi'$  e com coesão efectiva  $c'$ .

Teorema cinemático
$\tilde{\mathbf{s}}^{k+1} = \tilde{\mathbf{s}}^k + \rho \mathbf{A}_0 (\mathbf{B} \mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{e}^{k+1})$
Teorema estático
$\hat{\mathbf{e}}^{k+1} = \hat{\mathbf{e}}^k + \rho \mathbf{A}_0^{-1} (\mathbf{s}^{k+1} - \tilde{\mathbf{s}}^{k+1})$

Tabela 5: Actualização do multiplicador de Lagrange: Teoremas cinemático e estático

## 4 MODELO

O esquema apresentado na Figura 2 mostra as condições geométricas e de carregamento adoptadas no estudo para a determinação dos impulsos de terras. A superfície do terreno é horizontal, o paramento é vertical e sujeito aos carregamentos devidos ao peso próprio e a distribuições triangulares de tensões normais e tangenciais. A resistência do solo é caracterizada pelo critério de Mohr-Coulomb, com coesão efectiva nula e ângulo de resistência ao corte  $\phi'$ .

A Figura 3 mostra um exemplo do tipo de malha de elementos finitos utilizada. Os elementos da malha são obtidos a partir de elementos de forma quadrangular subdivididos pelas suas diagonais. No caso do teorema cinemático utilizou-se no presente trabalho triângulos de seis nós para a aproximação das velocidades e, no do teorema estático, triângulos de três nós. Os cálculos apresentados correspondem a dimensões dos quadrados referidos com lado igual a  $h/40$ . Na figura, por forma a permitir a sua visualização, as dimensões dos lados são  $h/20$ .

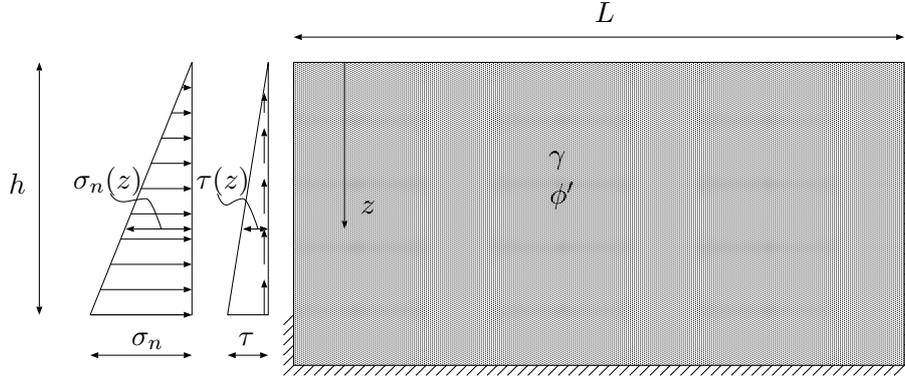


Figura 2: Representação esquemática da geometria e do carregamento considerados.

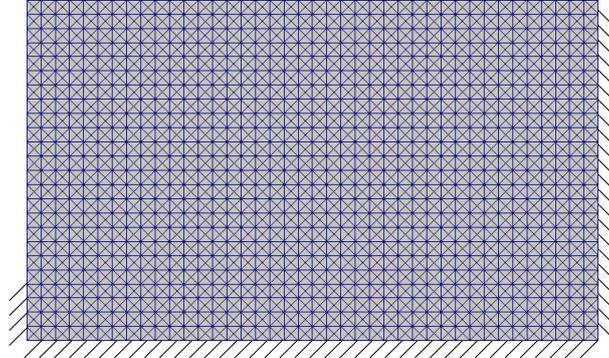


Figura 3: Exemplo de malha de elementos finitos.

Nos cálculos realizados, o peso volúmico não é afectado por qualquer multiplicador, sendo, portanto, constante no decurso dos cálculos. Na determinação dos impulsos activos e passivos tal como usualmente definidos, as tensões normal e de corte aplicadas ao paramento são afectadas pelo multiplicador de carregamento  $\alpha$ , sendo determinado o par de tensões resultantes dessa multiplicação que constitui a estimativa para as aproximações interior e exterior das cargas de colapso. Em cada um destes cálculos é, assim, mantida constante a relação entre  $\tau$  e  $\sigma_n$ , de acordo com a relação:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\tau}{\sigma_n} \quad (16)$$

em que  $\delta$  corresponde ao ângulo de atrito solo-estrutura na hipótese prática de os carregamentos serem aplicados ao solo por uma estrutura de suporte. Admite-se, assim, que  $\delta$  é positivo quando as tensões tangenciais estão dirigidas para cima. Tal convenção associa, assim, valores positivos de  $\delta$  à situação habitual no caso da determinação de impulsos activos e valores negativos deste ângulo à situação habitual quando da determinação de impulsos passivos.

De notar, ainda, que dada a evolução linear em profundidade dos diagramas de tensões,

a relação da equação anterior é também dada por:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\tau(z)}{\sigma_n(z)} \quad (17)$$

Para a determinação da estimativa dos valores do par de tensões correspondente ao caso activo, procurou-se enquadrar o mínimo valor dessas tensões que garantem a estabilidade e, para a estimativa dos valores correspondentes ao caso passivo, procurou-se enquadrar o máximo valor dessas tensões.

Para além dos casos de colapso correspondentes aos estados activo e passivo, realizaram-se cálculos em que apenas uma das tensões (a tangencial) era afectada pelo multiplicador de carregamento, mantendo portanto constante a tensão normal. Assim, nestes cálculos, o ângulo  $\delta$  não é mantido constante. Deste modo, para uma dada tensão normal procurou-se enquadrar as tensões tangenciais mínima e máxima que garantem a estabilidade.

Uma vez determinados os pares de valores  $\tau$  e  $\sigma_n$  que correspondem a cada situação de colapso, calcularam-se as relações:

$$K_h = \frac{\sigma_n}{\gamma h} \quad \text{e} \quad K_v = \frac{\tau}{\gamma h} \quad (18)$$

e

$$K = \frac{\sqrt{\sigma_n^2 + \tau^2}}{\gamma h} = \sqrt{K_h^2 + K_v^2} \quad (19)$$

Nestas equações,  $K$  é um coeficiente de impulso e  $K_h$  e  $K_v$  são as suas componentes horizontal e vertical.

## 5 RESULTADOS

Os resultados na sua forma clássica – coeficientes de impulso activos e passivos – são apresentados na Figura 4, para o exemplo que se adopta no presente trabalho de  $\phi' = 30^\circ$ . Na mesma figura mostra-se ainda alguns outros resultados (Coulomb e Caquot e Kérisel) para o mesmo caso.

A análise da Figura 4 permite, em primeiro lugar, constatar a grande proximidade entre os resultados obtidos no presente trabalho usando os teoremas estático (TE) e cinemático (TC). Com efeito, os dois conjuntos de resultados estão praticamente sobrepostos, notando-se apenas uma ligeira diferença gráfica entre os dois resultados para os casos  $\delta = -30^\circ$ . Esta grande proximidade significa, portanto, que os resultados obtidos delimitam com grande precisão a solução exacta.

Pode ainda verificar-se a quase coincidência entre os resultados obtidos e os de Coulomb e Caquot e Kérisel para o caso activo. No caso passivo, os resultados obtidos são também praticamente coincidentes com os de Caquot e Kérisel, verificando-se o esperado afastamento dos resultados dados pela teoria de Coulomb, para  $\delta < -10^\circ$  na convenção de sinais adoptada no presente trabalho.

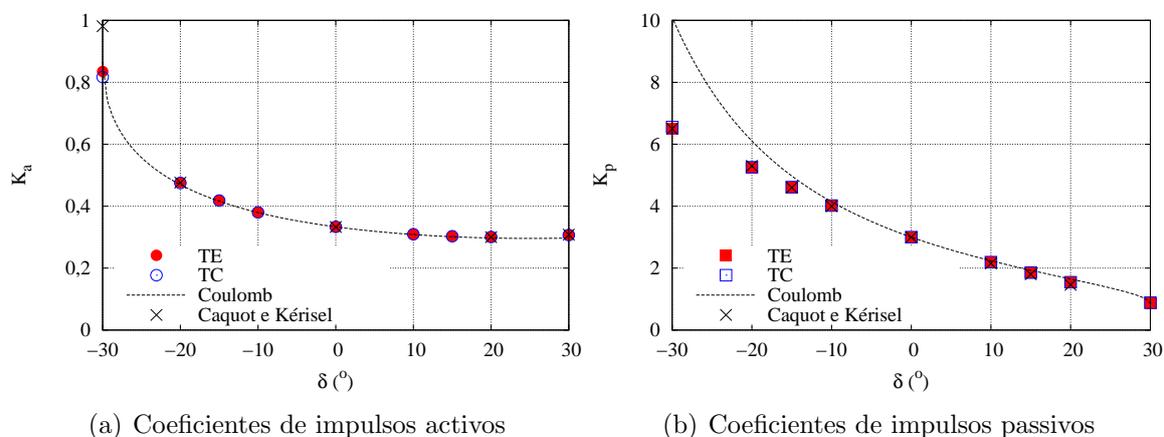


Figura 4: Coeficientes de impulsos activos e passivos determinados nos cálculos realizados através dos teoremas estático (TE) e cinemático (TC) para  $\phi' = 30^\circ$ . Comparação com as soluções de Coulomb e de Caquot e Kérisel.

A Figura 5 representa os valores dos coeficientes  $K_h$  e  $K_v$  obtidos dos cálculos realizados para  $\phi' = 30^\circ$  usando os teoremas estático (TE) e cinemático (TC). Nela identificam-se os casos dos estados activos e passivos para diferentes valores de  $\delta$  (já representados na Figura 4) e os resultados (identificados como “outros”) obtidos através do procedimento descrito anteriormente, isto é, mantendo a tensão normal constante e determinando as tensões tangenciais mínima e máxima que garantem a estabilidade.

Na Figura representa-se, assim, um conjunto de valores obtidos do teorema estático e um conjunto de valores obtidos do teorema cinemático. Cada conjunto define no espaço  $K_v - K_h$  uma fronteira dos carregamentos limites, que lhes é interior no caso da obtida pelo teorema estático e exterior no caso da obtida pelo teorema cinemático. Dada a precisão conseguida nos cálculos realizados, as duas fronteiras são muito próximas, pelo que difíceis de distinguir.

Na mesma figura mostra-se ainda os resultados obtidos da teoria de Coulomb (os de Caquot e Kérisel, dada a proximidade aos resultados dos cálculos realizados, estariam com eles sobrepostos). O traçado dos troços de fronteira permitidos pela teoria de Coulomb mostra o que é esperado e constatado na Figura 4: bons resultados para o estado activo e, para o passivo, sucessivo afastamento com a diminuição do valor de  $\delta$ , em particular para  $\delta < -10^\circ$ .

A Figura 6 mostra, para o caso dos resultados obtidos do teorema cinemático, as manchas de deformações plásticas e, para o caso dos resultados do teorema estático, a identificação dos elementos cujo estado de tensão se encontra sobre a superfície de cedência. Em ambos os casos as figuras representadas permitem conhecer as zonas do maciço nas quais se verifica escoamento plástico, o que portanto é indicativo dos mecanismos formados. A comparação, para igual situação de carregamento, dos resultados obtidos dos dois teoremas mostra, na maior parte dos casos, uma muito boa concordância, em linha com

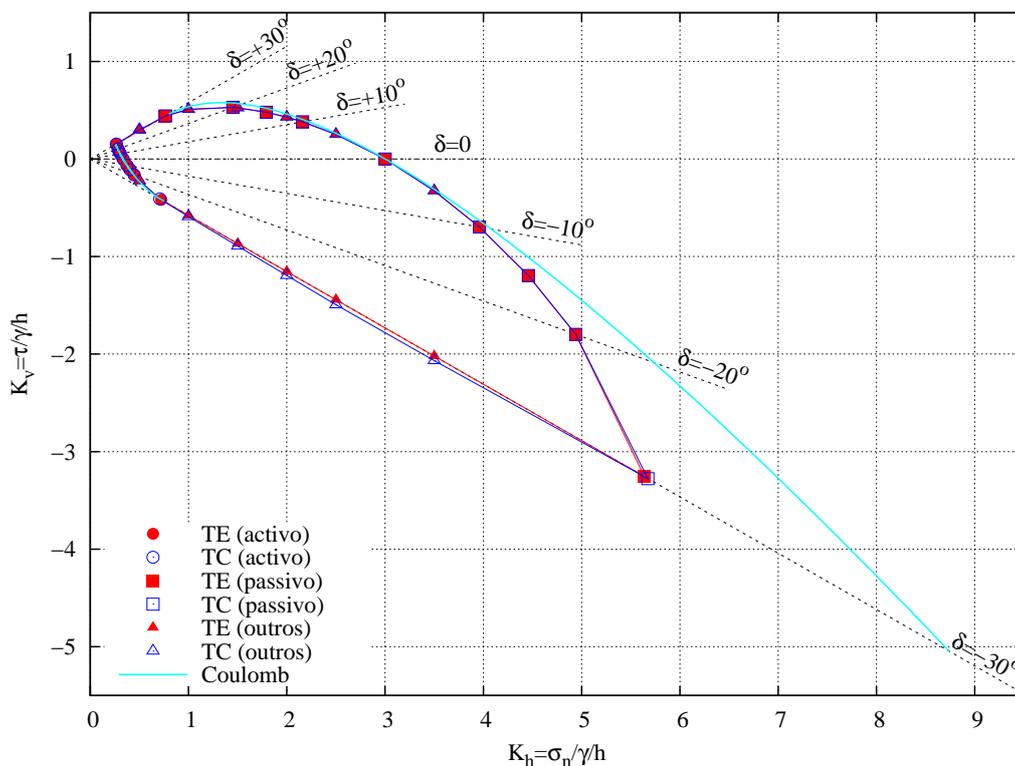


Figura 5: Representação das fronteiras dos carregamentos limites.

a quase coincidência dos valores dos coeficientes obtidos de uma e outra forma.

A figura permite ainda constatar o efeito nos mecanismos do ângulo de atrito  $\delta$  que, sendo nulo, implica zonas planares de separação entre o maciço que entra em plasticidade e aquelas em que tal não acontece e que, consoante o seu sinal, causa zonas de separação com curvatura côncava ou convexa e diferentes dimensões da zona em plasticidade. Tal justifica, no caso dos impulsos passivos, em que a curvatura é mais evidente, o afastamento da solução de Coulomb das obtidas.

## 6 CONCLUSÕES

Apresentou-se sucintamente os fundamentos da implementação numérica através do método dos elementos finitos dos teoremas estático e cinemático da análise limite tal como realizada no Departamento de Engenharia Civil da FCT/UNL. A abordagem proposta é a mesma para ambos os teoremas.

Aplicou-se as ferramentas numéricas à determinação de impulsos de terras para um exemplo correspondente a um solo com um ângulo de resistência ao corte de  $30^\circ$ . Mostrou-se a boa correspondência entre os resultados obtidos pelos teoremas estático e cinemático, o que permite, na prática, considerar a solução obtida como exacta.

Representou-se os resultados obtidos por ambas as vias através de fronteiras dos car-

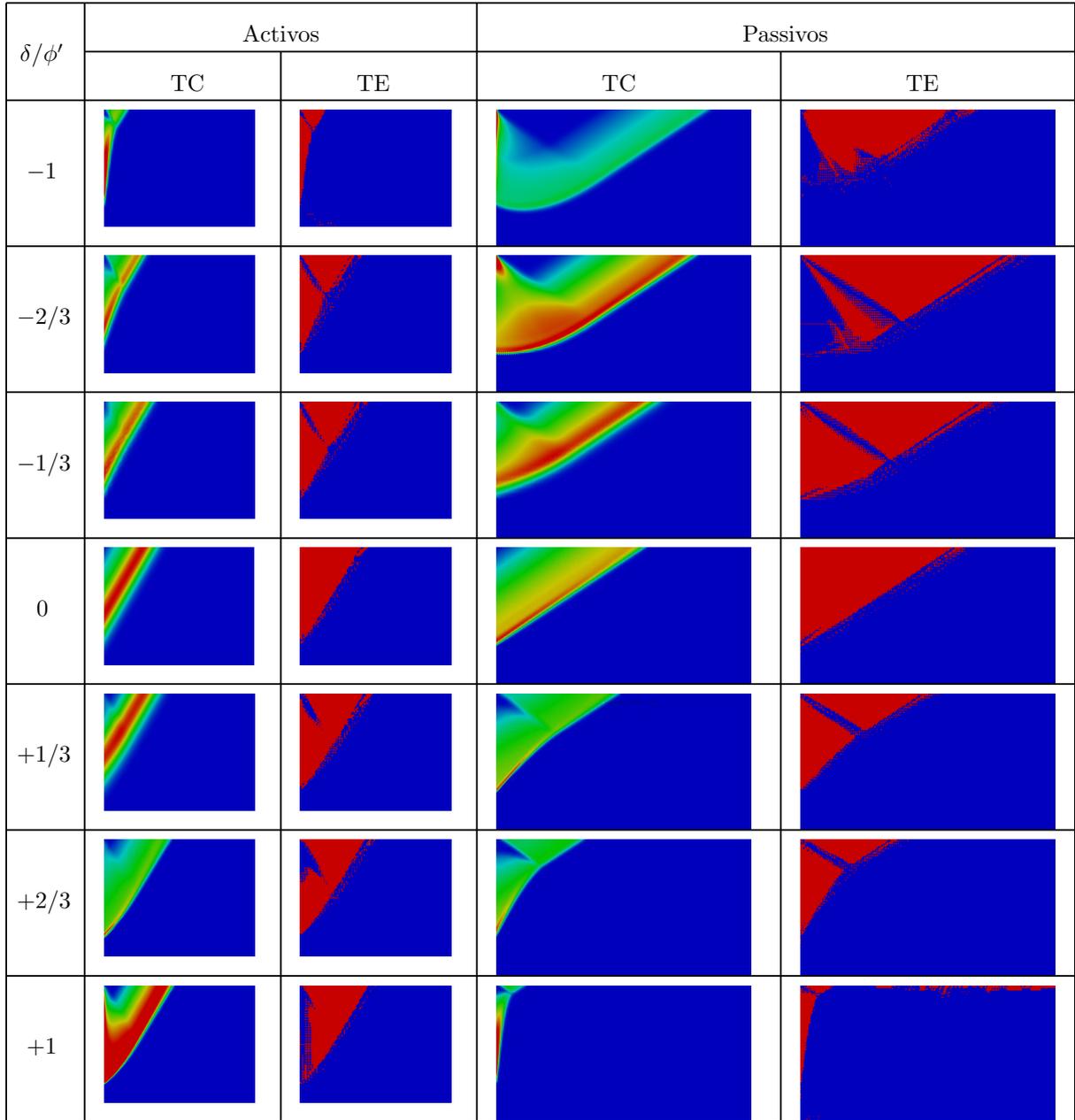


Figura 6: Manchas de deformações plásticas (TC) e de elementos cujo estado de tensão está sobre a superfície de cedência (TE).

regamentos limites num espaço definido pelas tensões normal e tangencial adimensionalizadas que constituem na realidade componentes normal e tangencial (horizontal e vertical) dos coeficientes de impulso. Os bons resultados obtidos através dos dois teoremas traduzem-se na quase coincidência entre as duas fronteiras obtidas.

A representação gráfica das zonas em plasticidade obtidas de ambos os teoremas mostrou, igualmente, uma boa concordância nos resultados obtidos.

## REFERÊNCIAS

- [1] J. Salençon, *De l'Élasto-plasticité au calcul à la rupture*. Paris: Les Éditions de l'École Polytechnique, 1 ed., 2002.
- [2] H. Uzawa, "Iterative methods for concave programming," in *Studies in linear and nonlinear programming* (K. J. Arrow, L. Hurwicz, and H. Uzawa, eds.), ch. 10, pp. 154–165, Stanford University Press, 1958.
- [3] R. Glowinski and P. Le Tallec, *Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1989.
- [4] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato, and J. Eckstein, "Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers," *Foundations and Trends in Machine Learning*, vol. 3, no. 1, pp. 1–122, 2010.
- [5] M. Vicente da Silva and A. Antão, "Upper bound limit analysis with a parallel mixed finite element formula," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, no. 22-23, pp. 5788–5804, 2008.
- [6] A. Antão, T. Santana, M. Vicente da Silva, and N. M. C. Guerra, "Passive earth-pressure coefficients by upper-bound numerical limit analysis," *Canadian Geotechnical Journal*, vol. 48, pp. 767–780, May 2011.
- [7] A. Antão, M. V. da Silva, N. Guerra, and R. Delgado, "An upper bound-based solution for the shape factors of bearing capacity of footings under drained conditions using a parallelized mixed f.e. formulation with quadratic velocity fields," *Computers and Geotechnics*, vol. 41, pp. 23–35, April 2012.
- [8] O. Zienkiewicz and R. Taylor, *The Finite Element Method*, vol. 1 - The Basis. Butterworth-Heinemann, 5 ed., 2000.
- [9] A. Makrodimopoulos and C. Martin, "Lower bound limit analysis of cohesive-frictional materials using second-order cone programming," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 66, pp. 604–634, April 2006.
- [10] P. Le Tallec, "Numerical solution of viscoplastic flow problems by augmented lagrangians," *IMA Journal of Numerical Analysis*, vol. 6, no. 2, pp. 185–219, 1986.
- [11] M. Vicente da Silva, *Implementação Numérica Tridimensional do Teorema Cinemático da Análise Limite*. PhD thesis, Universidade Nova de Lisboa, January 2009.