

MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS MISTOS HÍBRIDOS PARA ESCOAMENTOS DE STOKES-DARCY ACOPLADO

Iury Igreja^{1*}, Abimael F. D. Loula¹ e Cristiane O. Faria²

1: Coordenação de Matemática Aplicada e Computacional
Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC/MCTI
Av. Getúlio Vargas, 333, Quitandinha, Petrópolis, RJ - CEP: 25651-075
e-mail: {iuryhai, aloc}@lncc.br, web: <http://www.lncc.br>

2: Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Estadual do Rio de Janeiro - UERJ
Rua São Francisco Xavier, 524, Rio de Janeiro, RJ - CEP: 20550-900
e-mail: cofaria@ime.uerj.br web: <http://www.uerj.br>

Palavras chave: Stokes-Darcy acoplado, Condição de Beavers-Joseph, Elementos finitos estabilizados, Métodos híbridos mistos.

Resumo. *Métodos numéricos para simular o escoamento de fluidos viscosos incompressíveis através de meios heterogêneos permeáveis tem sido desenvolvidos em várias aplicações nas últimas décadas. Em particular, um problema bem conhecido é o acoplamento entre um fluido livre com o meio poroso governado pelas equações de Stokes e Darcy, respectivamente, e uma condição de interface entre eles, experimentalmente desenvolvida por Beavers-Joseph. Métodos de elementos finitos clássicos baseados em formulações de Galerkin contínuo e na utilização de multiplicadores de Lagrange impondo a condição de interface combinados com procedimentos iterativos associados com técnicas de decomposição de domínio e métodos de Galerkin Descontínuo (DG) têm sido utilizados para resolver numericamente este problema acoplado. Mas a utilidade prática dos métodos DG tem sido limitada por suas formulações e implementações computacionais mais complexas e pelo maior número de graus de liberdade no sistema de resolução. Assim, propomos uma nova formulação de elementos finitos híbrida estabilizada para o problema acoplado combinando formulações híbridas para os problemas de Stokes e de Darcy. Os multiplicadores de Lagrange são introduzidos para impor fracamente a continuidade em cada lado dos elementos gerando um sistema global envolvendo apenas os graus de liberdade associados aos multiplicadores e as variáveis de interesse podem ser sempre obtidas em nível de elemento. Este método impõe naturalmente as condições de fronteira de Beavers-Joseph ou de Beavers-Joseph-Saffman e preserva as principais propriedades dos métodos DG associados. Para validação do método, experimentos numéricos que ilustram a flexibilidade e robustez e mostram taxas ótimas de convergência são apresentados.*

1 INTRODUÇÃO

Métodos numéricos para simular o escoamento de fluidos viscosos incompressíveis através de meios permeáveis heterogêneos tem sido largamente desenvolvidos devido à diversas aplicações em engenharia de petróleo. Neste trabalho, consideramos o caso particular característico de reservatórios de petróleo e aquíferos onde os meios porosos possuem pequenas cavidades denominadas por *vugs*. Tais cavidades são relativamente pequenas em comparação com o tamanho do próprio domínio, mas muito maior do que o espaço poroso intergranular habitual [4].

Matematicamente, a região composta pelo meio poroso é governada pela lei de Darcy e a região do fluido livre constituída de cavidades (*vugs*) é modelada pelo sistema de Stokes. Na interface, o ponto mais importante a ser considerado no tratamento do acoplamento das equações de Darcy e Stokes é encontrar a condição correta que separa os subdomínios do fluido livre e o meio poroso. A condição comumente utilizada foi postulada e verificada experimentalmente por Beavers e Joseph [2] que estabelece uma relação de proporcionalidade entre o salto na componente tangencial do campo de velocidades em um ponto da interface e a tensão cisalhante neste mesmo ponto. Neste caso, uma condição de contorno que permita a descontinuidade da componente tangencial do campo de velocidade deve ser adotada. Dessa forma, Saffman [23] apresentou uma justificativa teórica para esta condição de contorno empírica, dando origem a lei de *Beavers-Joseph-Saffman*.

Dentre os métodos propostos para o problema acoplado, um dos primeiros estudos numéricos envolvendo o acoplamento das equações de Stokes e de Darcy pode ser encontrado em [24], onde espaços de elementos finitos estáveis são empregados para a solução das equações de Stokes-Darcy e Stokes-Brinkman. Outros exemplos de métodos estáveis que foram desenvolvidos utilizando um método iterativo e posteriormente associados a uma técnica de decomposição de domínio podem ser encontrados em [10, 11, 12, 9] e os que a restrição na interface é imposta via multiplicadores de Lagrange em [19, 15, 16].

Diferentemente dos métodos anteriores, Correa et al [7, 8] desenvolveram um método direto aplicável a malhas regulares de elementos quadrilaterais onde as restrições da interface ligadas as descontinuidades da pressão e da componente tangencial da velocidade são adequadamente incorporadas à formulação e a continuidade do fluxo é imposta fortemente nos espaços de elementos finitos conduzindo a um problema em todo o domínio com a mesma estrutura de um problema contínuo, podendo ser montado e resolvido utilizando as estratégias usuais de elementos finitos lagrangianos contínuos.

Além das formulações clássicas de elementos finitos, nas últimas décadas métodos de Galerkin descontínuos (DG) têm sido propostos para a resolução dos problemas de Stokes, Darcy e Stokes-Darcy acoplado [5, 3, 22, 21]. Em particular, para o problema acoplado, métodos localmente conservativos derivados a partir dos métodos de Galerkin descontínuo são introduzidos por [20]. Contudo, apesar das vantagens oferecidas pelos métodos DG, devido a sua complexidade de formulação, implementação computacional e elevado número de graus de liberdade, principalmente em casos de alta ordem, hi-

bridizações para os métodos DG foram propostos para outros problemas com o intuito de derivar novos métodos de elementos finitos com melhorada estabilidade e reduzido custo computacional mas preservando ainda a robustez e flexibilidade dos métodos DG [6, 13, 1, 14] nos levando a aplicar esta metodologia em nosso problema de interesse.

Neste contexto, este trabalho tem por objetivo introduzir um novo método misto híbrido estabilizado para o escoamento acoplado de Stokes-Darcy onde as condições de interface são impostas naturalmente via multiplicadores de Lagrange a partir dos métodos híbridos desenvolvidos para os escoamentos de Stokes em [17] e de Darcy em [18]. Para tanto, no fluido livre optamos pelo método SH2M e no meio poroso o método SDHMu. Esta escolha se mostrou mais adequada para o acoplamento, pois ambos os métodos são identificados por multiplicadores associados ao campo de velocidade. Dessa forma, as condições de interface que conectam os dois regimes são impostas naturalmente dando origem a um sistema global em função apenas dos multiplicadores. O método gerado, o qual denominamos SHSD, é capaz de simular problemas em meios porosos vulgares ou fraturados onde os vãos são modelados pelo problema de Stokes e a matriz porosa, governado pelo problema de Darcy.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Dado o domínio limitado $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, com contorno lipschitziano $\Gamma = \partial\Omega$, apresentamos $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$ como o espaço das funções quadrado integráveis em Ω , com norma dada por $\|q\|_0 = \|q\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} q^2 dx\right)^{1/2}$. $H^1(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega), \nabla q \in [L^2(\Omega)]^d\}$, com norma e seminorma definidas, respectivamente, como $\|q\|_1^2 = \|q\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|q\|_0^2 + \|\nabla q\|_0^2$ e $|q|_1^2 = |q|_{H^1(\Omega)}^2 = \|\nabla q\|_0^2$. $H_0^1(\Omega)$ é o subespaço de funções em $H^1(\Omega)$ com traço nulo sobre $\partial\Omega$ e o subespaço $L_0^2(\Omega)$ de funções em $L^2(\Omega)$ com média nula em Ω . Além disso, definimos o espaço $H(\text{div}, \Omega) = H(\text{div}) = \{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^d, \text{div } \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}$, munido da norma $\|\mathbf{v}\|_{H(\text{div})}^2 = \|\mathbf{v}\|_0^2 + \|\text{div } \mathbf{v}\|_0^2$ e $H_0(\text{div}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in H(\text{div}) : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$, onde \mathbf{n} denota o vetor normal unitário exterior a Ω .

Para um espaço de funções $V(\Omega)$, denotamos $[V(\Omega)]^d$ e $[V(\Omega)]^{d \times d}$ como os campos vectoriais e tensoriais cujas componentes pertencem a $V(\Omega)$, respectivamente. Estes espaços são equipados com a norma usual do produto, a qual, por simplicidade, é denotada por $\|\cdot\|_{V(\Omega)}$. Restringindo o domínio Ω ao caso bidimensional ($d = 2$), definimos o escalar $q \in \mathbb{R}$, os vetores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ e os tensores $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ para apresentar os seguintes operadores:

$$\text{div } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) ; \quad \text{rot } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) ; \quad \nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{bmatrix},$$

e

$$\nabla q = \left(\frac{\partial q}{\partial x_1}, \frac{\partial q}{\partial x_2} \right) ; \quad (\text{div } \mathbf{A})_j = \sum_{i,j=1}^2 \partial_i A_{ij} ; \quad \mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{i,j=1}^2 A_{ij} B_{ij}.$$

Seja \mathcal{T}_h uma partição regular de elementos finitos definida como $\mathcal{T}_h = \{K\} :=$ a união de todos os elementos K no domínio Ω . Para as arestas e dos elementos K definimos os seguintes conjuntos: $\mathcal{E}_h = \{e; e \text{ é uma aresta de } K \text{ para todo } K \in \mathcal{T}_h\}$ que denota o conjunto de todas as arestas e de todos os elementos K , $\mathcal{E}_h^0 = \{e \in \mathcal{E}_h; e \text{ é uma aresta interior}\}$ é o conjunto das arestas interiores, e $\mathcal{E}_h^\partial = \mathcal{E}_h \cap \partial\Omega$ o conjunto de arestas do bordo de Ω .

Para os casos onde Ω é subdividido em subdomínios Ω_i com contorno suave $\partial\Omega_i$ e $\Gamma_i = \partial\Omega \cap \partial\Omega_i$, temos para cada subdomínio a seguinte partição regular de elementos finitos $\mathcal{T}_h^i = \{K \in \mathcal{T}_h \cap \Omega_i\}$ e os seguintes conjuntos de arestas $\mathcal{E}_h^i = \{e; e \text{ é uma aresta de } K \text{ para todo } K \in \mathcal{T}_h^i\}$, $\mathcal{E}_h^{\partial,i} = \mathcal{E}_h^i \cap \Gamma_i$, $\mathcal{E}_h^{0,i} = \{e \in \mathcal{E}_h^i; e \text{ é uma aresta interior de } \Omega_i\}$ e $\mathcal{E}_h^{ij} = \mathcal{E}_h^{0,i} \cap \partial\Omega_j$. Este último caso denota as arestas que compõem a interface entre os subdomínios, onde i e j representam os subdomínios adjacentes.

Assumindo o domínio Ω como um polígono e \mathcal{T}_h uma partição regular de Ω , existe um $c > 0$ tal que $h \leq ch_e$, onde h_e é o diâmetro da aresta $e \in \partial K$ e h , o parâmetro de malha, é o diâmetro máximo do elemento. Para cada aresta e associamos um vetor unitário normal \mathbf{n}_e e para cada elemento K associamos um vetor unitário normal \mathbf{n}_K e um vetor unitário tangente \mathbf{t}_K .

Para introduzir os métodos híbridos, definimos os seguintes espaços de dimensão finita sobre a partição de \mathcal{T}_h

$$\mathcal{V}_h^k = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \mathbf{v}_h|_K \in [\mathbb{S}_k(K)]^2, \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (1)$$

$$\mathcal{Q}_h^l = \{q \in L^2(\Omega); q_h|_K \in \mathbb{S}_l(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (2)$$

e sobre as arestas $e \in \mathcal{E}_h$

$$\mathcal{M}_h^m = \{\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{E}_h) : \boldsymbol{\mu}|_e = [p_m(e)]^2, \forall e \in \mathcal{E}_h^0, \boldsymbol{\mu}|_e = \mathbf{0}, \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial\}, \quad (3)$$

$$\mathcal{W}_h^m = \{\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{E}_h) : \boldsymbol{\mu}|_e = [p_m(e)]^2, \forall e \in \mathcal{E}_h^0, \boldsymbol{\mu}|_e \cdot \mathbf{n}_e = 0, \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial\}, \quad (4)$$

onde $\mathbb{S}_k(K) = \mathbb{P}_k(K)$, denota o espaço de funções polinomiais de grau k associado com elementos triangulares e $\mathbb{S}_k(K) = \mathbb{Q}_k(K)$, o espaço de funções polinomiais de grau k associado a elementos quadrilaterais.

3 PROBLEMA MODELO

Seja o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ subdividido em dois subdomínios Ω_S e Ω_D relativos ao fluido livre e ao meio poroso, respectivamente, com interface suave $\partial\Omega$. Sobre o domínio Ω_S com vetor unitário normal externo \mathbf{n}_S ocorre o escoamento lento de um fluido newtoniano governado pelas equações de Stokes, enquanto que o subdomínio Ω_D com vetor unitário normal externo \mathbf{n}_D é representado por um meio poroso rígido saturado pelo mesmo fluido e modelado pela lei de Darcy. Γ_{SD} denota uma interface suave que separa os subdomínios, e sobre Γ_{SD} , definimos o vetor unitário tangente \mathbf{t} . Além disso, seja $\Gamma = \Gamma_S \cup \Gamma_D$ onde $\Gamma_i = \partial\Omega_i \setminus \Gamma_{SD}$, com $i = S, D$. A Figura 1 representa um esquema do domínio descrito.

Denotando $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}|_{\Omega_i}$ e $p_i = p|_{\Omega_i}$, com $i = S, D$, sobre a interface Γ_{SD} podemos prescrever as seguintes condições:

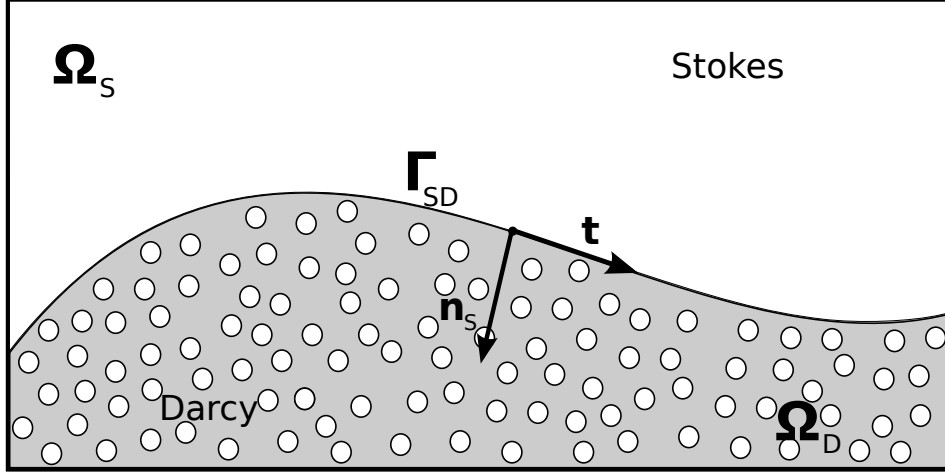


Figura 1: Domínio do problema modelo para o escoamento acoplado Stokes-Darcy.

- *conservação de massa*: consequência da incompressibilidade de ambos os fluidos, expressada pela continuidade do fluxo normal, ou seja

$$\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}_S + \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_D = 0. \quad (5)$$

- *equilíbrio das forças normais à interface*, definida como

$$\boldsymbol{\tau}_S \cdot \mathbf{n}_S + \boldsymbol{\tau}_D \cdot \mathbf{n}_D = 0, \quad (6)$$

onde $\boldsymbol{\tau}_i$ denota o vetor de tração, dado por

$$\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{n}_i. \quad (7)$$

Para o subdomínio Ω_S , temos

$$\mathbf{T}_S = -p_S \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}_S), \quad (8)$$

e para o meio poroso

$$\mathbf{T}_D = -p_D \mathbf{I}. \quad (9)$$

Direto de (8) e (9) podemos reescrever (6), como segue

$$p_S - 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}_S) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{n}_S = p_D. \quad (10)$$

A relação acima mostra que, para escoamentos gerais, o campo de pressão é descontínuo sobre a interface Γ_{SD} .

- Finalmente, a terceira condição é uma extensão da *condição de Beavers e Joseph*, como em [19], admitindo que o salto entre as componentes do campo de velocidades tangenciais à interface é proporcional à tensão cisalhante, ou seja,

$$(\mathbf{u}_S - \mathbf{u}_D) \cdot \mathbf{t} = -\frac{\sqrt{\mathbf{k}(\mathbf{x})}}{\mu\alpha} \boldsymbol{\tau}_S \cdot \mathbf{t}, \quad (11)$$

ou,

$$(\mathbf{u}_S - \mathbf{u}_D) \cdot \mathbf{t} = -2\frac{\sqrt{\mathbf{k}(\mathbf{x})}}{\alpha} \mathbf{D}(\mathbf{u}_S) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{t}. \quad (12)$$

Neste caso, a condição de interface de *Beavers-Joseph-Saffman* pode ser escrita como

$$\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{t} = -2\frac{\sqrt{\mathbf{k}(\mathbf{x})}}{\alpha} \mathbf{D}(\mathbf{u}_S) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{t}. \quad (13)$$

As condições de contorno (12) e (13) substituem o equilíbrio das forças cisalhantes, necessário para que o escoamento do fluido livre esteja bem determinado. Como o escoamento de Darcy não transmite cisalhamento, devemos levar em consideração que a interface representa uma região fictícia na qual a camada limite está inserida [7].

Desta forma, para os modelos isolados para o escoamento do fluido livre e o meio poroso, respectivamente, em conjunto com as condições de interface desenvolvidas acima, escrevemos o problema modelo para o escoamento de Stokes-Darcy acoplado como segue

Dada a viscosidade μ , a permeabilidade do meio poroso $\mathbf{k}(\mathbf{x})$, as funções \mathbf{f} , f , $\bar{\mathbf{u}}_S$ e g , encontrar a pressão no fluido $p_S : \Omega_S \rightarrow \mathbb{R}$, a pressão no poro $p_D : \Omega_D \rightarrow \mathbb{R}$, a velocidade do fluido $\mathbf{u}_S : \Omega_S \rightarrow \mathbb{R}^2$ e a velocidade de Darcy $\mathbf{u}_D : \Omega_D \rightarrow \mathbb{R}^2$, tais que

$$-2\mu \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}_S) + \nabla p_S = \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega_S \quad (14)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_S = 0 \quad \text{em } \Omega_S \quad (15)$$

$$\mathbf{u}_D = -\frac{\mathbf{k}(\mathbf{x})}{\mu} \nabla p_D \quad \text{em } \Omega_D \quad (16)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_D = f \quad \text{em } \Omega_D \quad (17)$$

suplementado pelas condições de contorno

$$\mathbf{u}_S = \bar{\mathbf{u}}_S \quad \text{sobre } \Gamma_S \quad (18)$$

$$\mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_D = g \quad \text{sobre } \Gamma_D \quad (19)$$

e condições de interface

$$\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}_S + \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_D = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_{SD} \quad (20)$$

$$p_S - 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}_S) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{n}_S = p_D \quad \text{sobre } \Gamma_{SD} \quad (21)$$

$$(\mathbf{u}_S - \mathbf{u}_D) \cdot \mathbf{t} = -2\frac{\sqrt{\mathbf{k}(\mathbf{x})}}{\alpha} \mathbf{D}(\mathbf{u}_S) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{t} \quad \text{sobre } \Gamma_{SD} \quad (22)$$

ou

$$\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{t} = -2 \frac{\sqrt{\mathbf{k}(\mathbf{x})}}{\alpha} \mathbf{D}(\mathbf{u}_S) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{t} \quad \text{sobre } \Gamma_{SD} \quad (23)$$

onde $\mathbf{k}(\mathbf{x})$ é o tensor de permeabilidade do meio dependente da posição \mathbf{x} e $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ denota o tensor taxa de deformação.

O problema em questão é analisado de forma detalhada por [19], onde a existência e a unicidade de solução, utilizando a condição de interface de Beavers-Joseph-Saffman, é demonstrada.

4 MÉTODO HÍBRIDO PARA O PROBLEMA ACOPLADO

Diferentemente dos métodos numéricos que empregam multiplicadores de Lagrange apenas na interface fluido livre/meio poroso para resolver o problema acoplado [19, 15, 16], neste trabalho os multiplicadores são adotados em todo o domínio do problema. E por consequência, as condições sobre a interface são impostas naturalmente, dando origem a uma formulação robusta e estável, capaz de simular problemas em meios porosos vulgares onde os vãos são modelados pelas equações de Stokes e no domínio de Darcy capturar heterogeneidades. Além de apresentar baixo custo computacional devido ao fato do problema global envolver somente os graus de liberdade do multiplicador que está associado ao traço do campo de velocidade. Neste contexto, vamos apresentar um novo método de elementos finitos híbrido para o acoplamento dos escoamentos de Stokes e Darcy através das condições de interface (20), (21) e de Beavers e Joseph (22) ou de Beavers-Joseph-Saffman (23), utilizando no domínio do fluido livre a formulação SH2M [17] e no meio poroso a formulação SDHMu [18] resultando no método que chamaremos de SHSD. Como veremos, a formulação SHSD é simétrica quando empregamos as condições de interface de Beavers-Joseph-Saffman e não-simétrica quando optamos pelas condições de Beavers e Joseph.

4.1 Formulação Híbrida Estabilizada SHSD

Para introduzir o método SHSD com condições de interface (20), (21) e de Beavers e Joseph (22) ou de Beavers-Joseph-Saffman (23), recordamos o método SH2M [17] para o subdomínio de Stokes Ω_S definido nos elementos $K \in \mathcal{T}_h^S$ e sobre as arestas $\partial K \in \mathcal{E}_h^S \setminus \mathcal{E}_h^{SD}$, com multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}_S$ identificado como o traço das componentes da velocidade $\mathbf{u}_S : \boldsymbol{\lambda}_S = \mathbf{u}_S|_e$, dado por

$$A_{SH2M}([\mathbf{u}_h^S, p_h^S, \boldsymbol{\lambda}_h^S]; [\mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\mu}_h^S]) = F_{SH2M}(\mathbf{v}_h) \quad (24)$$

onde

$$\begin{aligned}
A_{SH2M}([\mathbf{u}_h^S, p_h^S, \boldsymbol{\lambda}_h^S]; [\mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\mu}_h^S]) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h^S} \left[\int_K 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}_h^S) : \mathbf{D}(\mathbf{v}_h) d\mathbf{x} \right. \\
&\quad - \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_h^S q_h d\mathbf{x} - \int_K p_h^S \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\mathbf{x} - \int_{\partial K \setminus \Gamma_{SD}} 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}_h^S) \mathbf{n}_K \cdot (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h^S) ds \\
&\quad - \int_{\partial K \setminus \Gamma_{SD}} 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{v}_h) \mathbf{n}_K \cdot (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^S) ds + \int_{\partial K \setminus \Gamma_{SD}} p_h^S (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h^S) \cdot \mathbf{n}_K ds \\
&\quad \left. + \int_{\partial K \setminus \Gamma_{SD}} q_h (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^S) \cdot \mathbf{n}_K ds + \beta_u^S \int_{\partial K \setminus \Gamma_{SD}} (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^S) \cdot (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h^S) ds \right], \\
F_{SH2M}(\mathbf{v}_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h^S} - \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

O método SDHMu [18] no subdomínio de Darcy Ω_D é definido nos elementos $K \in \mathcal{T}_h^D$ e sobre as arestas $\partial K \in \mathcal{E}_h^{SD} \setminus \mathcal{E}_h^{SD}$, onde o multiplicador também é o traço do campo de velocidade $\mathbf{u}_D : \boldsymbol{\lambda}_D = \mathbf{u}_D|_e$, expresso por

$$A_{SDHMu}([\mathbf{u}_h^D, p_h^D, \boldsymbol{\lambda}_h^D]; [\mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\mu}_h^D]) = F_{SDHMu}([\mathbf{v}_h, q_h]), \quad (25)$$

onde

$$\begin{aligned}
A_{SDHMu}([\mathbf{u}_h^D, p_h^D, \boldsymbol{\lambda}_h^D]; [\mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\mu}_h^D]) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h^D} \left[\int_K \mathbf{A} \mathbf{u}_h^D \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} \right. \\
&\quad - \int_K p_h^D \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\mathbf{x} - \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_h^D q_h d\mathbf{x} + \int_{\partial K \setminus \Gamma_{SD}} p_h^D (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h^D) \cdot \mathbf{n}_K ds \\
&\quad + \int_{\partial K \setminus \Gamma_{SD}} q_h (\mathbf{u}_h^D - \boldsymbol{\lambda}_h^D) \cdot \mathbf{n}_K ds + \beta_u^D \int_{\partial K \setminus \Gamma_{SD}} A (\mathbf{u}_h^D - \boldsymbol{\lambda}_h^D) \cdot (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h^D) ds \\
&\quad + \delta_1 \int_K \mathbf{K} (\mathbf{A} \mathbf{u}_h^D + \nabla p_h^D) \cdot (\mathbf{A} \mathbf{v}_h + \nabla q_h) d\mathbf{x} \\
&\quad \left. + \delta_2 \int_K A \operatorname{div} \mathbf{u}_h^D \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\mathbf{x} + \delta_3 \int_K k \operatorname{rot}(\mathbf{A} \mathbf{u}_h^D) \operatorname{rot}(\mathbf{A} \mathbf{v}_h) d\mathbf{x} \right], \\
F_{SDHMu}([\mathbf{v}_h, q_h]) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h^D} \left[-\delta_2 \int_K A f \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\mathbf{x} + \int_K f q_h d\mathbf{x} \right].
\end{aligned}$$

Sobre as arestas $e \in \mathcal{E}_h^{SD}$ que compõem a interface Γ_{SD} , temos para o subdomínio de

Stokes

$$\begin{aligned}
\sum_{K \in \mathcal{T}_h^S} \left[- \int_{\Gamma_{SD}} 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}_h^S) \mathbf{n}_S \cdot (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h) ds - \int_{\Gamma_{SD}} 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{v}_h) \mathbf{n}_S \cdot (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^S) ds \right. \\
+ \int_{\Gamma_{SD}} p_h^S (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h) \cdot \mathbf{n}_S ds + \int_{\Gamma_{SD}} q_h (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^S) \cdot \mathbf{n}_S ds \\
\left. + \beta_u^S \int_{\Gamma_{SD}} (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^S) \cdot (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h) ds \right], \tag{26}
\end{aligned}$$

e para o subdomínio de Darcy

$$\begin{aligned}
\sum_{K \in \mathcal{T}_h^D} \left[\int_{\Gamma_{SD}} p_h^D (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h) \cdot \mathbf{n}_D ds + \int_{\Gamma_{SD}} q_h (\mathbf{u}_h^D - \boldsymbol{\lambda}_h^D) \cdot \mathbf{n}_D ds \right. \\
\left. + \beta_u^D \int_{\Gamma_{SD}} A (\mathbf{u}_h^D - \boldsymbol{\lambda}_h^D) \cdot (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h) ds \right]. \tag{27}
\end{aligned}$$

Sobre as arestas interiores $\mathcal{E}_h^{0,S}$ e $\mathcal{E}_h^{0,D}$ dos subdomínios Ω_S e Ω_D , adotamos $\boldsymbol{\mu}_h^S = \boldsymbol{\mu}_h^D = \boldsymbol{\mu}_h$.

Para conectar (26) com (27), necessitamos impor as condições de interface (20)-(22). Para isso, inicialmente, aplicamos a identidade $\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}$ nos dois primeiros termos de (26) e reescrevemos os termos sobre a interface relativa ao subdomínio de Stokes, como segue

$$\begin{aligned}
\sum_{K \in \mathcal{T}_h^S} \left[\int_{\Gamma_{SD}} (p_h^S - 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}_h^S) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{n}_S) (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h) \cdot \mathbf{n}_S ds + \int_{\Gamma_{SD}} q_h (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^S) \cdot \mathbf{n}_S ds \right. \\
- \int_{\Gamma_{SD}} 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}_h^S) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{t} (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h) \cdot \mathbf{t} ds - \int_{\Gamma_{SD}} 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{v}_h) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{n}_S (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^S) \cdot \mathbf{n}_S ds \\
\left. - \int_{\Gamma_{SD}} 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{v}_h) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{t} (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^S) \cdot \mathbf{t} ds + \beta_u^S \int_{\Gamma_{SD}} (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^S) \cdot (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h) ds \right].
\end{aligned}$$

Descartando o termo de simetrização associado à componente tangencial do fluxo, optando apenas pela componente normal do termo de estabilização multiplicado pelo parâmetro β_u^S e observando que a condição de continuidade imposta pelo fluxo tangencial é incoerente, podemos reformular o problema acima da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\sum_{K \in \mathcal{T}_h^S} \left[\int_{\Gamma_{SD}} (p_h^S - 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}_h^S) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{n}_S) (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h) \cdot \mathbf{n}_S ds + \int_{\Gamma_{SD}} q_h (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^S) \cdot \mathbf{n}_S ds \right. \\
- \int_{\Gamma_{SD}} 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}_h^S) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{t} (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{t}) ds - \int_{\Gamma_{SD}} 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{v}_h) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{n}_S (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^S) \cdot \mathbf{n}_S ds \\
\left. + \beta_u^S \int_{\Gamma_{SD}} (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^S) \cdot \mathbf{n}_S (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h) \cdot \mathbf{n}_S ds \right]. \tag{28}
\end{aligned}$$

Perceba que o primeiro termo de (28) satisfaz a condição de equilíbrio das forças normais à interface (21), já as condições (20) e de Beavers e Joseph (22) são impostas via restrições sobre o multiplicador de Lagrange nas arestas situadas na interface Γ_{SD} . Aqui, apresentam-se na interface Γ_{SD} , dois multiplicadores que apesar de serem iguais por definição possuem perfis totalmente diferentes nos subdomínios de Stokes e Darcy, dessa forma temos que eleger um deles de maneira que o multiplicador seja unicamente determinado na fronteira Γ_{SD} . Para tanto, escolhemos o multiplicador $\boldsymbol{\lambda}_D$ associado à velocidade de Darcy e estabilizado pelo parâmetro β_u^D . Por consequência desta escolha, somente os termos da interface do fluido livre necessitam se adequar as condições sobre as arestas que pertencem a Γ_{SD} . Assim, as condições de fronteira (28) devem ser adaptadas a esta escolha, ou seja

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h^S} \left[\int_{\Gamma_{SD}} (p_h^S - 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}_h^S) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{n}_S) (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h) \cdot \mathbf{n}_S ds + \int_{\Gamma_{SD}} q_h (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^D) \cdot \mathbf{n}_S ds \right. \\ \left. - \int_{\Gamma_{SD}} 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}_h^S) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{t} (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{t}) ds - \int_{\Gamma_{SD}} 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{v}_h) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{n}_S (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^D) \cdot \mathbf{n}_S ds \right. \\ \left. + \beta_u^D \int_{\Gamma_{SD}} (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^D) \cdot \mathbf{n}_S (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h) \cdot \mathbf{n}_S ds \right], \end{aligned} \quad (29)$$

e também a condição (22),

$$(\mathbf{u}_S - \boldsymbol{\lambda}^D) \cdot \mathbf{t} = -\frac{2\sqrt{\mathbf{k}(\mathbf{x})}}{\alpha} \mathbf{D}(\mathbf{u}_S) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{t} \quad \text{sobre } \Gamma_{SD}. \quad (30)$$

Desta forma, para impor na fronteira a condição de Beavers e Joseph, isolamos o termo do fluxo tangencial de (30)

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}_S) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{t} = -\frac{\alpha}{2\sqrt{\mathbf{k}(\mathbf{x})}} (\mathbf{u}_S - \boldsymbol{\lambda}^D) \cdot \mathbf{t}$$

e substituímos em (29), para obter

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h^S} \left[\int_{\Gamma_{SD}} (p_h^S - 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}_h^S) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{n}_S) (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h) \cdot \mathbf{n}_S ds + \int_{\Gamma_{SD}} q_h (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^D) \cdot \mathbf{n}_S ds \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_{SD}} \frac{\mu\alpha}{\sqrt{\mathbf{k}(\mathbf{x})}} (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^D) \cdot \mathbf{t} (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{t}) ds - \int_{\Gamma_{SD}} 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{v}_h) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{n}_S (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^D) \cdot \mathbf{n}_S ds \right. \\ \left. + \beta_u^D \int_{\Gamma_{SD}} (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^D) \cdot \mathbf{n}_S (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h) \cdot \mathbf{n}_S ds \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Observe que os termos de simetrização bem como o termo balizado pelo parâmetro β_u^D cumprem a condição (20). Além disso, a condição de Beavers e Joseph é imposta naturalmente no problema através do multiplicador $\boldsymbol{\lambda}_D$. Os termos acima satisfazem as

condições de interface (20)-(22) do acoplamento entre as formulações para o problema de Stokes (24) e para o problema de Darcy (25).

Finalmente, de posse das condições (31) que tem o papel de conectar as formulações para o fluido livre e o meio poroso, podemos formular um método misto híbrido para o acoplamento Stokes-Darcy a partir dos métodos SH2M e SDHMu. De forma simplificada, basta unir as formas bilineares $A_{SH2M}(\cdot, \cdot)$ e $A_{SDHMu}(\cdot, \cdot)$ com os respectivos termos de fonte $F_{SH2M}(\cdot)$ e $F_{SDHMu}(\cdot)$ e os termos que acoplam o sistema sobre a interface Γ_{SD} relativa ao subdomínio de Stokes (31), dando origem ao seguinte método, denominado SHSD

Encontrar $[\mathbf{u}_h^i, p_h^i] \in \mathcal{V}_h^k(\Omega_i) \times \mathcal{Q}_h^l(\Omega_i)$, com $i = S, D$, e os multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}_h^S \in \mathcal{M}_h^m(\mathcal{E}_h^S)$ e $\boldsymbol{\lambda}_h^D \in \mathcal{W}_h^m(\mathcal{E}_h^D)$ tal que, para todo $[\mathbf{v}_h, q_h] \in \mathcal{V}_h^k(\Omega) \times \mathcal{Q}_h^l(\Omega)$ e $[\boldsymbol{\mu}_h^S, \boldsymbol{\mu}_h^D] \in \mathcal{M}_h^m(\mathcal{E}_h^S) \times \mathcal{W}_h^m(\mathcal{E}_h^D)$

$$A_{SHSD}([\mathbf{u}_h^S, \mathbf{u}_h^D, p_h^S, p_h^D, \boldsymbol{\lambda}_h^S, \boldsymbol{\lambda}_h^D]; [\mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\mu}_h^S, \boldsymbol{\mu}_h^D]) = F_{SHSD}([\mathbf{v}_h, q_h]), \quad (32)$$

com

$$\begin{aligned} A_{SHSD}([\mathbf{u}_h^S, \mathbf{u}_h^D, p_h^S, p_h^D, \boldsymbol{\lambda}_h^S, \boldsymbol{\lambda}_h^D]; [\mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\mu}_h^S, \boldsymbol{\mu}_h^D]) = & \\ & A_{SH2M}([\mathbf{u}_h^S, p_h^S, \boldsymbol{\lambda}_h^S]; [\mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\mu}_h^S]) + A_{SDHMu}([\mathbf{u}_h^D, p_h^D, \boldsymbol{\lambda}_h^D]; [\mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\mu}_h^D]) \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}_h^S} \left[\int_{\Gamma_{SD}} (p_h^S - 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}_h^S) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{n}_S) (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h) \cdot \mathbf{n}_S \, ds \right. \\ & + \int_{\Gamma_{SD}} (q_h - 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{v}_h) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{n}_S) (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^D) \cdot \mathbf{n}_S \, ds \\ & + \int_{\Gamma_{SD}} \frac{\mu \alpha}{\sqrt{\mathbf{k}(\mathbf{x})}} (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^D) \cdot \mathbf{t} (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{t}) \, ds \\ & \left. + \beta_u^D \int_{\Gamma_{SD}} (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^D) \cdot \mathbf{n}_S (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h) \cdot \mathbf{n}_S \, ds \right] \end{aligned} \quad (33)$$

e

$$F_{SHSD}([\mathbf{v}_h, q_h]) = F_{SH2M}(\mathbf{v}_h) + F_{SDHMu}([\mathbf{v}_h, q_h]). \quad (34)$$

Supondo condições de Beavers-Joseph-Saffman sobre Γ_{SD} , podemos reescrever a forma bilinear $A_{SHSD}(\cdot, \cdot)$ do método proposto acima substituindo o termo

$$\int_{\Gamma_{SD}} \frac{\mu \alpha}{\sqrt{\mathbf{k}(\mathbf{x})}} (\mathbf{u}_h^S - \boldsymbol{\lambda}_h^D) \cdot \mathbf{t} (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{t}) \, ds$$

pelo termo que corresponde às condições (23)

$$\int_{\Gamma_{SD}} \frac{\mu \alpha}{\sqrt{\mathbf{k}(\mathbf{x})}} (\mathbf{u}_h^S \cdot \mathbf{t}) (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{t}) \, ds$$

Note que a formulação SHSD perdeu a simetria dos métodos SH2M e SDHMu devido a introdução na interface dos subdomínios do termo que impõe a condição de Beavers e Joseph. Por outro lado, quando resolvemos o método SHSD com condições de Beavers-Joseph-Saffman, tornamos a formulação simétrica.

O método em questão não se restringe a resolução de um problema com apenas uma interface que separa os regimes de Stokes e de Darcy. Esta formulação pode ser estendida para um domínio onde há diversas interfaces entre o fluido livre e o meio poroso. Basta que sobre as interfaces sejam adotados os mesmos critérios descritos acima, onde as condições são impostas naturalmente via multiplicadores de Lagrange.

A metodologia empregada para resolução da formulação SHSD é a mesma que foi usada em [17, 18]. Inicialmente, todos os graus de liberdade relacionados com as variáveis são condensados (utilizando a técnica de condensação estática) e um sistema global para os multiplicadores de Lagrange é obtido. Após a obtenção dos valores dos multiplicadores, os campos de velocidade e de pressão são obtidos em nível de elemento.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Buscando aferir qualitativamente as características do método híbrido SHSD proposto para a resolução do escoamento acoplado Stokes-Darcy, reproduzimos numericamente o experimento realizado em laboratório por Beavers e Joseph [2], utilizado para estabelecer a condição de interface (22). O experimento consiste no escoamento acoplado de um fluido viscoso newtoniano com um meio poroso saturado, gerado por um gradiente de pressão uniforme. Como se trata de um exemplo meramente ilustrativo, omitiremos as unidades das variáveis. O domínio é composto por um meio poroso isotrópico e homogêneo definido sobre um subdomínio $(0, 0; 1, 0) \times (0, 0; 0, 5)$ e por um canal, limitado por uma placa impermeável e o meio poroso, definido sobre o subdomínio $(0, 0; 1, 0) \times (0, 5; 1, 0)$. A interface Γ_{SD} é a linha $y = 0, 5$. Na interface esquerda, prescrevemos a pressão inicial $p_i = 1, 0$ e na extremidade direita a pressão final $p_f = 0, 0$. Sobre a placa superior, indicada pela linha $y = 1, 0$, é prescrita a condição de não-deslizamento $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e no bordo inferior ($y = 0, 0$) do meio poroso é considerada a condição de fluxo nulo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$. A Figura 2 dá uma idéia do problema descrito acima. O problema em questão apresenta solução analítica dada por

$$\mathbf{u}_S = \begin{bmatrix} (y-1) \left(\frac{y}{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{k}}(u_0 + k) \right) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_S = 1 - x \quad (35)$$

no subdomínio de Stokes, com

$$u_0 = -\frac{1}{2\sqrt{k} + \alpha} \left[\frac{2\alpha k + \sqrt{k}}{2} \right]$$

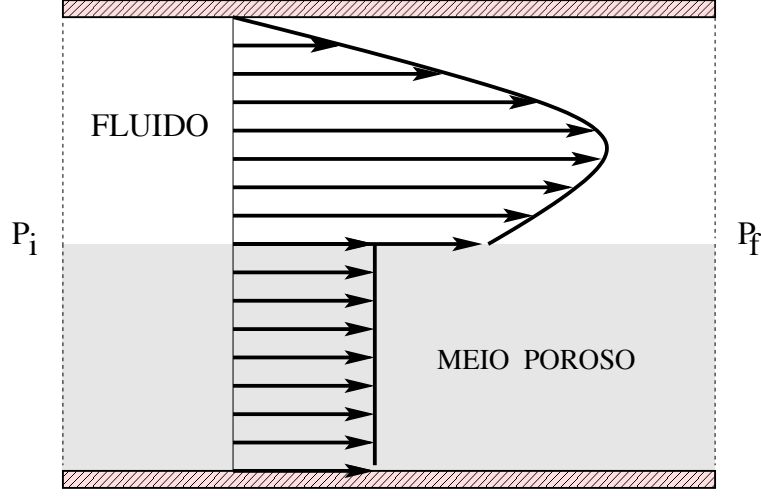


Figura 2: Perfil do experimento de Beavers e Joseph.

e

$$\mathbf{u}_D = \begin{bmatrix} k/\mu \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_D = 1 - x \quad (36)$$

no meio poroso. Nas simulações numéricas adotamos malhas de 16×16 elementos quadrilaterais no espaço polinomial $\mathbb{Q}_1\mathbb{Q}_1 - p_1$ e fixamos a viscosidade $\mu = 1,0$, a regularização $\varepsilon = 10^{-10}$ e para os parâmetros de estabilização, $\beta_u^S = 12$ e $\beta_u^D = 1$, respectivamente.

A Figura 3(a) exibe o perfil da solução aproximada da componente x da velocidade adotando os parâmetros $\alpha = 10^{-1}$ e $k = 10^{-2}$ e ao lado, na Figura 3(b), a projeção da solução no plano XY é comparada com a solução exata (35)-(36) do experimento descrito acima. Como a solução analítica é constante no meio poroso e parabólica no canal, a aproximação pelo método híbrido praticamente coincide com a solução exata.

A Figura 4 apresenta os resultados para $\alpha = 1,0$ e $k = 10^{-2}$. O estudo mostra que o aumento do parâmetro α diminuiu o salto da velocidade na interface fluido livre/meio poroso. Por fim, a escolha dos parâmetros $\alpha = 1,0$ e $k = 10^{-7}$ dão origem aos resultados que podem ser vistos na Figura 5. Neste caso, o meio poroso pode ser assumido como impermeável e a condição de não-deslizamento é recuperada na interface. Nos exemplos apresentados observamos que o campo de pressão independe dos parâmetros α e k e o perfil da solução aproximada para a pressão é mostrado na Figura 6.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, propomos uma nova formulação de elementos finitos híbrida estabilizada para o problema acoplado de Stokes-Darcy combinando formulações híbridas já propostas para os problemas de Stokes e de Darcy. A continuidade entre os elementos em cada meio é garantida com a introdução de multiplicadores de Lagrange sendo tomados como

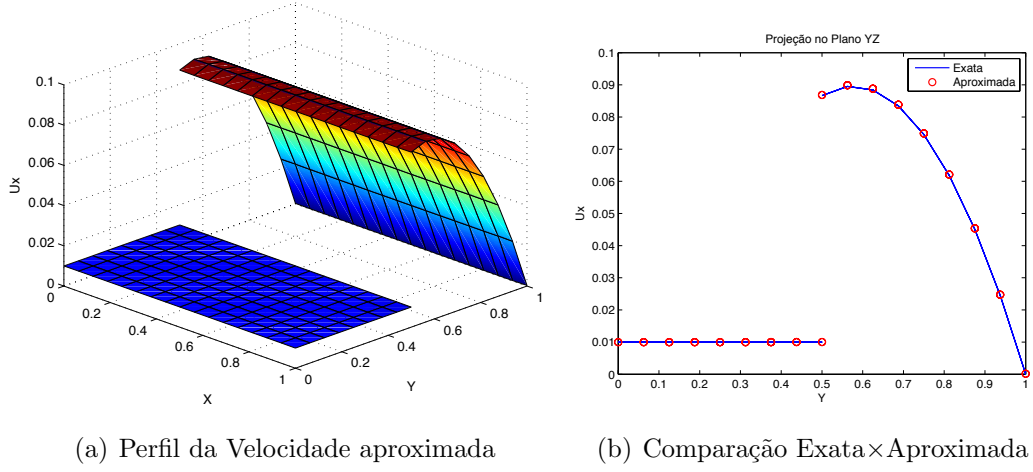


Figura 3: Experimento de Beavers e Joseph: $\alpha = 10^{-1}$ e $k = 10^{-2}$.

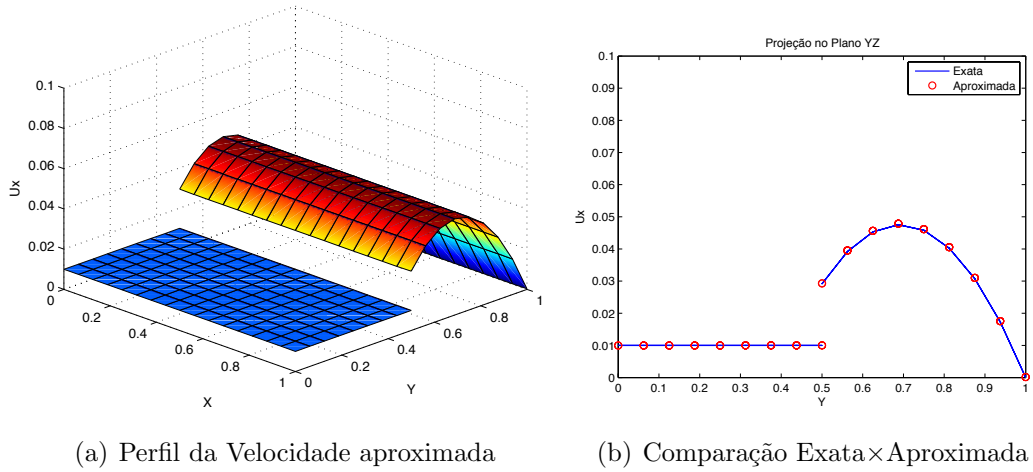


Figura 4: Experimento de Beavers e Joseph: $\alpha = 1,0$ e $k = 10^{-2}$.

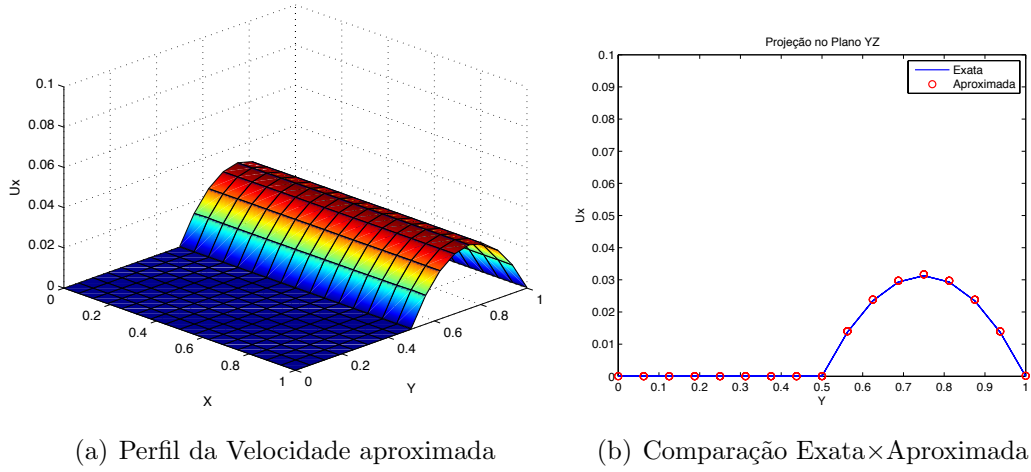


Figura 5: Experimento de Beavers e Joseph: $\alpha = 1,0$ e $k = 10^{-7}$.

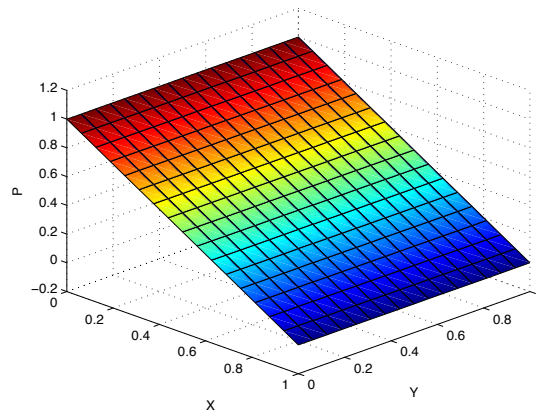


Figura 6: Perfil da Pressão aproximada.

o traço do campo da velocidade. E na interface entre os meios, a condição de Beavers-Joseph é imposta naturalmente. O método é facilmente implementado usando a mesma estrutura de dados empregada nos métodos de elementos finitos de Galerkin contínuo, permitindo diferentes graus de interpolação polinomial para as variáveis locais e para o multiplicador favorecendo uma maior flexibilidade e uma maior precisão. Para validação do método SHSD, o experimento de Beavers-Joseph foi reproduzido numericamente e a solução aproximada obtida captura exatamente o perfil da solução exata.

REFERÊNCIAS

- [1] N. C. B. Arruda, A. F. D. Loula, and R. C. Almeida. Locally Discontinuous but Globally Continuous Galerkin methods for elliptic problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 255:104–120, 2013.
- [2] G.S. Beavers and D.D. Joseph. Boundary conditions at a naturally permeable wall. *J. Fluid Mech.*, 30(1):197–207, 1967.
- [3] F. Brezzi, Thomas J. R. Hughes, L. Donatella Marini, and A. Masud. Mixed discontinuous Galerkin methods for Darcy flow. *Journal of Scientific Computing*, 1(3):119–145, 2005.
- [4] S. Brunson, D. *Simulating Fluid Flow in Vuggy Porous Media*. PhD thesis, University of Texas at Austin, 2005.
- [5] B. Cockburn, G. Kanschat, D. Schötzau, and C. Schwab. Local discontinuous Galerkin methods for the Stokes system. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(1):319–343, 2002.
- [6] Bernardo Cockburn, Jayadeep Gopalakrishnan, and Raytcho Lazarov. Unified hybridization of discontinuous galerkin, mixed, and continuous galerkin methods for second order elliptic problems. 47(2):1319–1365, 2009.
- [7] M. R. Correa. *Métodos de elementos finitos estabilizados para escoamentos de Darcy e de Stokes-Darcy acoplados*. PhD thesis, Laboratório Nacional de Computação Científica, LNCC, 2006.
- [8] M. R. Correa and A. F. D. Loula. A unified mixed formulation naturally coupling Stokes and Darcy flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 198:2710–2722, 2009.
- [9] M. Discacciati. Iterative methods for Stokes/Darcy coupling, domain decomposition methods in science and engineering. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, 40:563–570, 2005.
- [10] M. Discacciati, E. Miglio, and A. Quarteroni. Mathematical and numerical models for coupling surface and groundwater flows. *Appl. Numer. Math.*, 43:57–74, 2002.

- [11] M. Discacciati and A. Quarteroni. Analysis of a domain decomposition method for the coupling of Stokes and Darcy equations. *Numerical Mathematics and Advanced Applications, ENUMATH2001, Springer, Milan*, pages 3–20, 2003.
- [12] M. Discacciati and A. Quarteroni. Navier-Stokes/Darcy coupling: modeling, analysis, and numerical approximation. *Revista Matemática Complutense*, 22(2):315–426, 2009.
- [13] H. Egger and C. Waluga. hp analysis of a hybrid DG method for Stokes flow. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 33:687–721, 2013.
- [14] C. O. Faria, A. F. D. Loula, and J. B. dos Santos, A. Primal stabilized hybrid and DG finite element methods for the linear elasticity problem. *submitted*, 2014.
- [15] G. N. Gatica, R. Oyarzúa, and Francisco-Javier Sayas. Convergence of a family of galerkin discretizations for the Stokes–Darcy coupled problem. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27(3):721–748, 2009.
- [16] G. N. Gatica, R. Oyarzúa, and Francisco-Javier Sayas. A residual-based a posteriori error estimator for a fully-mixed formulation of the Stokes–Darcy coupled problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 200(21-22):1877–1891, 2011.
- [17] I. Igreja, C. O. Faria, and A. F. D. Loula. Hybridized mixed finite element method for the Stokes problem. *Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE), 2013, Pirenópolis. Anais Proceedings*, 2013.
- [18] I. Igreja, Abimael F. D. Loula, and C. O. Faria. A new hybridized mixed finite element method for heterogenous porous media flow. *Proceedings of the XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)*, 2014.
- [19] W. J. Layton, F. Schieweck, and I. Yotov. Coupling fluid flow with porous media flow. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(6):2195–2218, 2003.
- [20] B. Rivière. Analysis of a discontinuous finite element method for the coupled Stokes and Darcy problems. *J. Sci. Comput.*, 22-23:479–500, 2005.
- [21] Béatrice Rivière. *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations: theory and implementation*. SIAM, 2008.
- [22] Béatrice Rivière and I. Yotov. Locally conservative coupling of Stokes and Darcy flow. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(5):1959–1977, 2005.
- [23] P.G. Saffman. On the boundary condition at the surface of a porous medium. *Stud. Appl. Math.*, L(2):93–101, 1971.

- [24] A. G. Salinger, R. Aris, and J. J. Derby. Finite element formulations for large-scale coupled flows in adjacent porous and open fluid domains. *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, 18:1185–1209, 1994.