

APPLICATION OF LMS METHOD TO SOLVE NON-DYNAMICS OF CABLE EQUATION. COUPLING WITH SECOND ORDER WAVE SOLVER AND APPLICATION ON OFFSHORE STRUCTURES

Gutiérrez–Romero JE^{1*}, García–Espinosa J², Zamora–Parra B³ y
Esteve–Pérez JA¹.

1: Departamento de Tecnología Naval
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Naval y Oceánica
Universidad Politécnica de Cartagena
Paseo Alfonso XIII, nº52, 30202 Cartagena, España
e-mail: jose.gutierrez@upct.es, web: <http://www.upct.es>

2: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)
Campus Nord, Edifici C1, Gran Capitan s/n, 08034 Barcelona, Spain
web: <http://www.cimne.com>

3: Departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial
Universidad Politécnica de Cartagena
Doctor Fleming s/n, 30202 Cartagena, España
web: <http://www.upct.es>

Palabras clave: Linear Multistep Method, Non–Linear Finite Element Method, Cable Dynamics, Fully Coupled Simulations, Offshore Technology

Resumen. *Today, offshore technology has great relevancy. This leads to develop new techniques and methods for solving dynamics of devices which are placed on the sea. Cable dynamics can be considered as special one into offshore technology field. Moorings are formed by cables which permit floating offshore structures to be placed on a fix location into the ocean. Numerical methods are required to solve the non-linear dynamics of mooring cables. Mooring analysis can be considered as a structural dynamic problem. Classical models which used quasi-static modelling for mooring cables are based on catenary lines to solve dynamics. This work presents an alternative strategy for solving the non-linear mooring behaviour, based on the Non–Linear Finite Element Method (NFEM) approach. So, numerical integration is carried out using Linear Multistep Method (LMS) based on Bossak–Newmark scheme. Afterwards, formulation for second order wave equations used to describe the free surface of the ocean is shown. A procedure for solving the coupling between the loads obtained by the non-linear cable model, the second order wave model and other external forces is then described. Some validation examples of the simulated*

non-linear cable, comparisons and validation with results obtained by other authors are also presented. An application on several floating conceptual platform will be carry out using fully coupled simulations, taking into account most of the external loads acting on platform and finally some relevant conclusions will be obtained.

1. RELEVANCIA ACTUAL DE LA INDUSTRIA OFFSHORE

No cabe duda de que el importante interés que ha cobrado actualmente el desarrollo de las tecnologías marinas (conocido en terminología inglesa como *Offshore*) ha sido coadyuvado en los últimos tiempos por el desarrollo de las tecnologías relacionadas con las energías renovables de origen marino y la extracción del gas por fractura hidráulica (conocido popularmente como *fracking*) y que se ha dirigido hacia un cambio de modelo energético en cuanto a generación se refiere. Es preciso indicar que la Ingeniería Oceánica se trata de un ámbito de estudio multidisciplinario, que abarca desde la aerodinámica y la hidrodinámica hasta los sistemas de fondeo, y es en este sentido donde queda focalizado el presente trabajo, en donde se expone la resolución del comportamiento dinámico no lineal de cables de fondeo, que se modelan mediante el Método de Elementos Finitos no lineal [1, 2] y un algoritmo para el acoplamiento de las reacciones del cable con un modelo de interacción fluido–estructura basado en teoría de ondas de Stokes de segundo orden [3, 5, 4], lo que permite analizar el comportamiento de estructuras oceánicas sometidas a condiciones ambientales operativas.

Una de las tendencias en la investigación en Energías Marinas Renovables (*Marine Renewable Energies*) está centrada fundamentalmente en el diseño y estudio de aerogeneradores marinos, debido a la gran expectación que ha despertado esta tecnología en los últimos tiempos. Puede decirse que el campo tecnológico está completamente desarrollado y sin embargo limitado por los diseños para bajas batimetrías. Es conocido que los estándares y herramientas de diseño para estructuras oceánicas proceden de la tecnología existente de la industria del gas y del petróleo (en terminología inglesa, *Oil & Gas*). Se deduce entonces que el desarrollo de tecnología para aguas profundas puede ser uno de los horizontes en la investigación en Ingeniería Oceánica.

En el campo de la industria marina pueden encontrarse fácilmente diferentes tipologías en cuanto plataformas o conceptos de estructuras flotantes se refiere. Los problemas de estabilidad dinámica frente a mares irregulares, viento y corrientes oceánicas hacen que la predicción de la respuesta dinámica de un artefacto flotante en alta mar resulte una tarea para nada sencilla [6]. De hecho, puede considerarse uno de los principales retos del estudio de estructuras oceánicas es la predicción de la respuesta dinámica de estructuras, frente a todos los efectos y sollicitaciones que puedan concurrir a ellas, es decir, cargas de oleaje, de viento, de los sistemas de fondeo, de corrientes, etc. [7, 8].

En las aproximaciones matemáticas clásicas empleadas para el estudio dinámico de estructuras oceánicas, las cargas hidrodinámicas, de viento, de corrientes o fondeo sobre la

estructura se basan en formulación linealizada que se aplica de forma desacoplada en el dominio del tiempo o de la frecuencia. Sin embargo, el estudio de estructuras oceánicas en aguas profundas, como se ha señalado antes, requiere la consideración de una gran variedad de cargas y efectos no lineales que hacen que la aplicación de las aproximaciones clásicas no lleve a una solución precisa del comportamiento dinámico [9, 10]. Como ejemplo puede citarse el caso de un aerogenerador marino, donde resulta necesario considerar la interacción entre los diversos componentes de la estructura, tales como los sistemas de fondeo o la dinámica del rotor.

De acuerdo con lo anterior, los sistemas de fondeo de las estructuras flotantes se consideran de gran importancia en el comportamiento dinámico del flotador. Se componen habitualmente por elementos como cables, cadenas o cabos, que se unen a diferentes puntos de la estructura y al fondo oceánico mediante anclas u otros elementos, evitando el desplazamiento de la estructura respecto de su posición en alta mar. El efecto fundamental de los cables de fondeo sobre una plataforma es un incremento del amortiguamiento y por tanto, una mayor estabilidad de la misma.

Queda patente entonces que el modelado matemático de estructuras oceánicas y el estudio de su comportamiento dinámico resulta de gran interés en la industria marina. A continuación, en la siguiente sección se introduce al comportamiento dinámico de estructuras flotantes.

2. INTRODUCCIÓN AL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE ESTRUCTURAS OCEÁNICAS

Se ha puesto la atención en el análisis de comportamiento de estructuras flotantes, no sólo por el interés que estas suscitan, sino también por el abaratamiento en el coste final que supone una optimización del comportamiento frente a las acciones ambientales.

La combinación de los estudios en aerodinámica, en hidrodinámica, en sistemas dinámicos de fondeo o de control de turbina (en el caso de la tecnología eólica marina) convierte al estudio dinámico de estructuras marinas flotantes en un problema único, que ha de ser estudiado con suficiente detalle. Como ejemplo práctico se toman los aerogeneradores marinos flotantes para ejemplificar el comportamiento dinámico de una estructura en alta mar.

El comportamiento de un sistema aerogenerador marino flotante, sometido a las solicitaciones del medio que le rodea, puede describirse de la siguiente forma. El sistema habitualmente se emplaza en un parque junto a otros artefactos de idénticas características, en donde la acción del viento sobre el rotor genera un par, que por un lado, se transforma en energía eléctrica en el sistema de acoplamiento y por otro lado, genera un momento escorante que varía instantáneamente y que hace que la estructura sea balanceada alrededor de la posición de su centro de gravedad.

La acción del viento sobre el sistema aerogenerador flotante se transmite a la plataforma flotante, a la que está acoplada rígidamente. La plataforma a su vez está sometida a la interacción con el oleaje, las corrientes marinas y otras acciones ambientales, que son

transmitidas al resto de la estructura en forma de desplazamientos y giros. Los elementos de fondeo de estos sistemas también interaccionan con el conjunto transmitiendo las tensiones de recuperación de las líneas a la plataforma en forma de reacciones. La unión de todas estas solicitaciones, giros, desplazamientos, velocidades, etc. hacen que las estructuras oceánicas flotantes se consideren sistemas altamente acoplados. Todo lo anterior muestra la complejidad en el modelado y la descripción matemática de las estructuras oceánicas.

Por tanto, se requieren técnicas y herramientas avanzadas que permitan este estudio en detalle de la estructura y de su comportamiento. Entre este tipo de herramientas se pueden encontrar por ejemplo la CFD (*Computational Fluid Dynamics*) o las herramientas de análisis multi-cuerpo MBS (*Multi-Body System*), que permiten como en el caso de la CFD, la modelización de fenómenos de desprendimientos de vórtices, interacción fluido-estructura, estelas generadas por los rotores, etc.

Se describen a continuación las ecuaciones de gobierno para la interacción fluido-estructura [11, 12] y el comportamiento dinámico de un cable bajo flujo estacionario bidimensional. Seguidamente se describe el algoritmo no lineal para la solución del comportamiento no lineal del cable y el método de integración temporal empleado. Posteriormente, se describe de forma somera el acoplamiento entre la solución para el comportamiento del cable y el movimiento de la plataforma. La implementación del algoritmo de solución se lleva a cabo a través de SeaFEM (www.compassis.com), un solver de última generación desarrollado para permitir las simulaciones de radiación-difracción de olas con múltiples cuerpos, mediante la resolución de ecuaciones de flujo potencial en el dominio del tiempo, utilizando el Método de los Elementos Finitos (MEF) en mallas no estructuradas.

3. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Se muestra en este apartado en primer lugar la formulación que describe la interacción fluido-estructura mediante la presentación de las ecuaciones de gobierno para el problema de flujo potencial, para pasar a continuación a mostrar las expresiones que permiten obtener la solución a la aproximación de segundo orden del problema de radiación-difracción.

3.1. Ecuaciones de gobierno para flujo potencial

Si se supone flujo incompresible e irrotacional, para un dominio Ω con Γ_c la superficie del cuerpo considerado, las ecuaciones de flujo se pueden escribir como,

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = \zeta, \quad (2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla^2\varphi| + g\xi + \frac{P}{\rho} = 0 \quad \text{en } z = \zeta, \quad (3)$$

$$\nabla\varphi \cdot \mathbf{n} - \mathbf{V}_c \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \Gamma_c, \quad (4)$$

$$P_c = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho |\nabla^2 \varphi| - \rho g z_c \quad \text{en } \Gamma_c, \quad (5)$$

donde φ es el potencial de velocidades, ξ es la elevación de ola sobre el nivel de referencia, g es la aceleración de la gravedad, P es la presión de referencia, ρ es la densidad del fluido, ζ es la altura instantánea de ola, P_c es la presión sobre cualquier punto del cuerpo y z_c es la coordenada vertical de un punto de cuerpo

La Ecuación (1) es la de continuidad o de flujo potencial, la Ecuación (2) representa la condición de contorno cinemática de la superficie libre, la Ecuación (3) constituye la condición de contorno dinámica de la superficie libre y las dos ecuaciones restantes son condiciones de contorno relacionadas con el cuerpo en flotación (impermeabilidad y presión sobre la superficie mojada).

3.2. Ecuaciones de gobierno para el problema de radiación–difracción de segundo orden

Para obtener la solución de gobierno del problema de radiación–difracción de segundo orden es posible descomponer el potencial de velocidades entre las ondas radiadas y las ondas incidentes.

El potencial de velocidades de olas radiadas en el problema de radiación–difracción de orden k satisface la ecuación de Laplace en un dominio dado Ω , lo que se puede formular como [3, 4, 5],

$$\nabla^2 \phi_k^d, \quad \text{en } \Omega, \quad (6)$$

y está sujeto a las condiciones de contorno aplicadas al fondo del océano, en la superficie del cuerpo y la superficie libre (véase la Figura 1),

$$\frac{\partial \varphi_k^r}{\partial z} = 0, \quad \text{en } z = -H, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi_k^r}{\partial n} = c_k^1, \quad \text{en } \Gamma_c, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi_k^r}{\partial z} - \frac{\partial \xi_k^r}{\partial t} = c_k^2, \quad \text{en } z = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \varphi_k^r}{\partial t} + g \xi_k^r = c_k^3, \quad \text{en } z = 0, \quad (10)$$

donde r denota el término de potencial de velocidades de olas radiadas, z la profundidad, H es la profundidad del fondo oceánico y t el tiempo. Los coeficientes c_k^1 , c_k^2 , y c_k^3 pueden formularse de forma respectiva como sigue:

$$c_1^1 = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial n} + (\mathbf{r}_1 + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \mathbf{X}) \mathbf{n}, \quad (11)$$

$$c_2^1 = \frac{\partial \varphi_2^i}{\partial n} + (\mathbf{r}_2 + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 + \mathbf{X}) \mathbf{n} + (\dot{\mathbf{H}}\mathbf{X}) \mathbf{n} - [(\dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \mathbf{X}) \cdot \nabla(\nabla \varphi_1)] \mathbf{n} \quad (12)$$

$$+ (\boldsymbol{\alpha}_1 \times \mathbf{n}) \cdot [(\mathbf{r}_1 + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \mathbf{X}) - \nabla \varphi_1],$$

$$c_1^2 = 0, \quad (13)$$

$$c_2^2 = - \left(\frac{\partial \varphi_2^i}{\partial z} - \frac{\partial \xi_2^i}{\partial t} \right) + \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial y} - \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial z^2}, \quad (14)$$

$$c_1^3 = 0, \quad (15)$$

$$c_2^3 = - \left(\frac{\partial \varphi_2^i}{\partial z} - g \xi_2^i \right) + \frac{1}{2} |\nabla \varphi_1|^2 - \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial z \partial t}, \quad (16)$$

donde i denota el término relacionado con el potencial de olas incidente, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ y $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ son los correspondientes vectores de posición y rotación del cuerpo fluido, \mathbf{n} es un vector normal unitario apuntando hacia fuera del espacio fluido, \mathbf{X} es el vector de coordenadas fijadas en el cuerpo y finalmente \mathbf{H} es una matriz definida según [3, 4, 5].

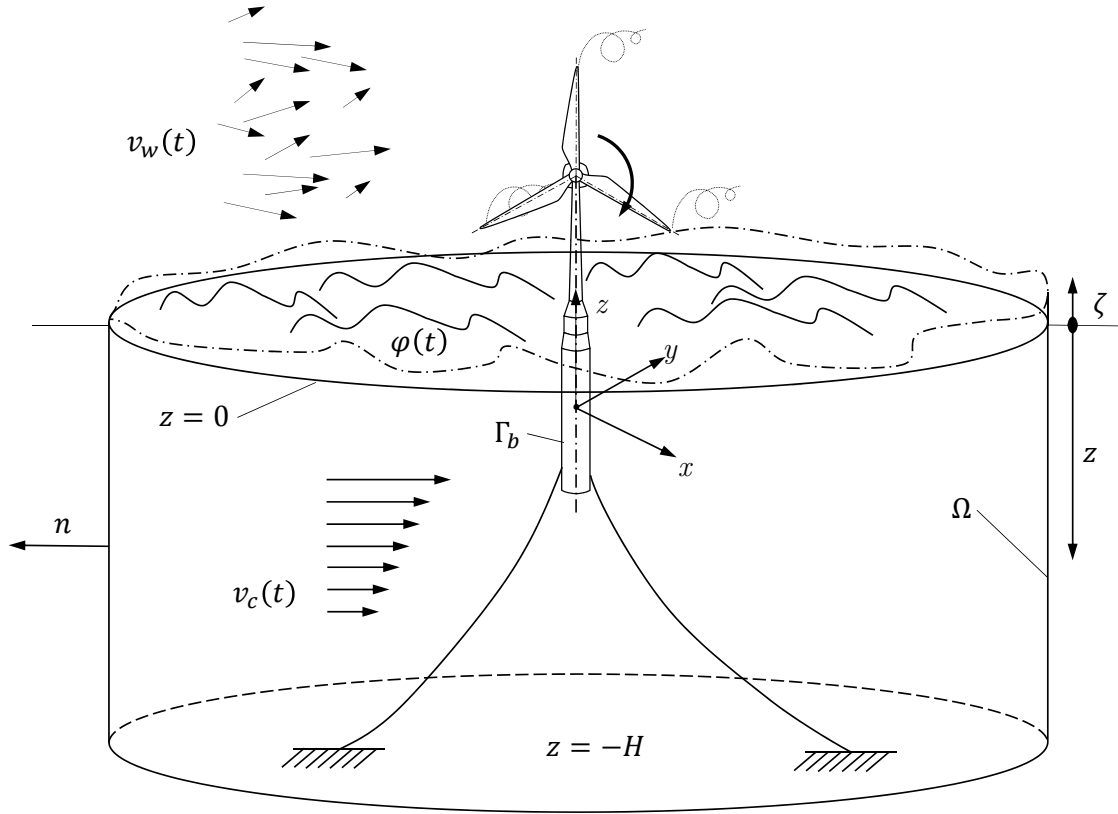


Figura 1: Sistema de referencia para un cuerpo en flotación.

4. MODELO MEF NO LINEAL PARA LA SIMULACIÓN DE CABLE DINÁMICO

4.1. Ecuaciones de gobierno del cable dinámico

En el comportamiento dinámico del cable elástico no lineal de fondeo, considerando rigidez a flexión, sometido a un flujo estacionario en el plano (dos dimensiones) puede expresarse mediante un sistema de ecuaciones empleando formulación Lagrangiana [13]

$$T(\epsilon) \frac{\partial \epsilon}{\partial s} - m \frac{\partial u}{\partial t} + mv \frac{\partial \theta}{\partial t} - Q \frac{\partial \theta}{\partial s} - \omega \cos(\theta) - \frac{1}{2} \rho \pi D C_d V_{rx} |V_{rx}| \sqrt{1 - \epsilon} = 0, \quad (17)$$

$$T(\epsilon) \frac{\partial \epsilon}{\partial s} + \frac{\partial Q}{\partial s} - (m + m_a) \frac{\partial v}{\partial t} [mu + (\rho A + m_a) V_f] \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (18)$$

$$+ w \sin(\theta) - \frac{1}{2} \rho \pi D C_d V_{ry} |V_{ry}| \sqrt{1 - \epsilon} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} - v \frac{\partial \theta}{\partial s} - \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} - u \frac{\partial \theta}{\partial s} - (1 + \epsilon) \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} - \Omega = 0, \quad (21)$$

$$EI \frac{\partial \Omega}{\partial s} Q (1 - \epsilon)^3 = 0, \quad (22)$$

donde ϵ es el alargamiento del cable, θ es el ángulo formado por el cable en el plano, m es el peso del cable por unidad de longitud, Q es el esfuerzo cortante, D es el diámetro del cable, u es la velocidad tangencial del cable, v es respectivamente la velocidad tangencial del cable, V_{rx} y V_{ry} son las velocidades en las direcciones x e y respectivamente, V_f es la velocidad del fluido, EI es la rigidez del cable y Ω es la curvatura de la línea.

Las cargas externas consideradas son el propio peso del cable, las fuerzas hidrostáticas, las fuerzas de arrastre y sustentación, así como, la interacción con el fondo oceánico. Las condiciones de contorno vienen aplicadas a los extremos del cable donde se produce la conexión a otro cable, al cuerpo o al fondo oceánico. Pueden ponerse por

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = 0, \quad s = 0 \quad (\text{en el punto de conexión en el fondo}), \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = \vec{r}_b'', \quad s = L \quad (\text{en el punto de conexión en el cuerpo flotante}), \quad (24)$$

donde \vec{r}_b'' es la segunda derivada del vector posición del cuerpo en el punto de conexión.

4.2. Descripción de la formulación corrotacional de vigas no lineales

En determinadas ocasiones se requiere una descripción diferente del comportamiento dinámico de cables, que se pueden modelar como vigas no lineal, sobre todo cuando las tensiones son moderadas y existen grandes desplazamientos y rotaciones, como ocurre en el caso de cables y líneas de fondeo. Es en estos casos cuando la formulación corrotacional puede resultar de gran utilidad [14, 15].

En la formulación corrotacional los desplazamientos se descomponen en movimientos de sólido rígido y componentes de deformación que se logra mediante el establecimiento de un marco corrotacional en cada elemento en el que se divide el cable, que permite grandes desplazamientos y rotaciones pero no deformaciones. De esta forma, la no linealidad geométrica se introduce a través de las rotaciones del elemento, mientras que la tensión únicamente depende de la deformación pura de la viga; es decir, del alargamiento. El uso de esta descripción del comportamiento de cables tiene ventajas desde el punto de vista computacional y por la simplicidad de programación.

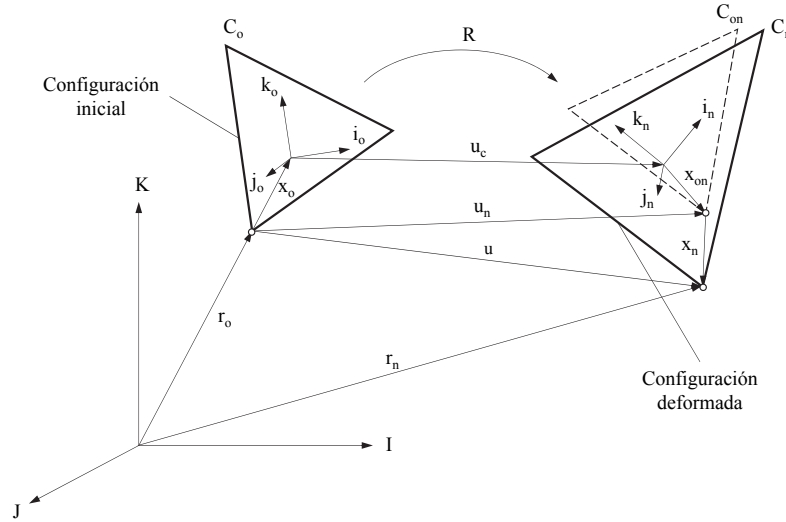


Figura 2: Representación de la traslación y deformación de un elemento.

En la Figura 2, C denota configuración y \mathbf{R} es el tensor de rotaciones que permite pasar de la configuración inicial C_0 a la configuración deformada C_n . Este tensor de rotaciones \mathbf{R} puede ser descompuesto como se indica al inicio en movimientos de sólido rígido \mathbf{R}_{on} y rotaciones deformacionales \mathbf{R}_d e \mathbf{I} representa matriz identidad.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{on}\mathbf{R}_d\mathbf{I}, \quad (25)$$

Mediante la representación de Rodrigues [14] del tensor de rotaciones un vector \mathbf{r}_0 se puede transportar a una nueva posición \mathbf{r}_n alrededor de un vector unitario \mathbf{n} un ángulo θ . Esta relación se expresa

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{R}\mathbf{r}_o, \quad (26)$$

El tensor de rotaciones tiene la siguiente expresión

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin\theta\mathbf{N} + (1 - \cos\theta)\mathbf{N}^2, \quad (27)$$

donde \mathbf{N} representa una matriz antisimétrica. La determinación de la matriz de rotación resulta esencial en el análisis corrotacional.

Pueden encontrarse en la literatura numerosas referencias a la formulación corrotacional, como por ejemplo [1, 2, 14, 15].

5. ALGORITMO MEF NO LINEAL PARA LA SIMULACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE CABLES

Como ya se ha descrito antes el marco corrotacional puede ser adecuado para la descripción del comportamiento de cables. Las líneas de fondeo habitualmente suelen modelarse mediante elementos finitos de tipo cercha, con tres grados de libertad por nodo, en donde los efectos axiales predominan. Se desprecian en la mayor parte de ocasiones los efectos de torsión y flexión [9, 16]. En el modelo presentado se emplea formulación corrotacional que permite tener en cuenta estos efectos. En este caso el número de grados de libertad por nodo será de seis, tres para los desplazamientos y tres para las rotaciones. La Figura 3 muestra un ejemplo de la división del cable adoptada en el modelo MEF.

Si se aplica la formulación MEF estándar para problemas de elastodinámica, las ecuaciones matriciales resultantes del equilibrio dinámico pueden escribirse como,

$$\mathbf{F}^{t+\Delta t} = \mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{P}^0 + \mathbf{S}^{t+\Delta t}, \quad (28)$$

donde \mathbf{F} es el vector de fuerzas externas, \mathbf{M} es la matriz de masas consistente, considerando inercias y masas añadidas, \mathbf{P}^0 es el vector de tensiones en la configuración inicial, y \mathbf{S} es el vector de esfuerzos internos de la viga. Los efectos de amortiguamiento del cable se introducen a través del término de amortiguamiento proporcional o de *Rayleigh* \mathbf{C} .

La configuración en un instante t puede expresarse como,

$$\mathbf{F}^{t+\Delta t} = \mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K}_L^{t+\Delta t} + \mathbf{K}_{NL}^{t+\Delta t}) \delta \mathbf{x} + \mathbf{P}^0 + \mathbf{S}^t, \quad (29)$$

donde \mathbf{K}_L y \mathbf{K}_{NL} son conocidas como matriz de rigidez normal y de rigidez geométrica respectivamente, en la literatura MEF [1]. La suma de ambas matrices se conoce habitualmente como matriz de rigidez tangencial. El incremento de desplazamiento nodal viene representado como $\delta \mathbf{x}$.

La solución al sistema de ecuaciones (29) se obtiene a cabo mediante un esquema implícito de integración temporal denominado de Bossak–Newmark [17, 18, 19]. Su aplicación permite obtener un sistema algebraico que se resuelve de manera iterativa para cada paso de tiempo Δt .

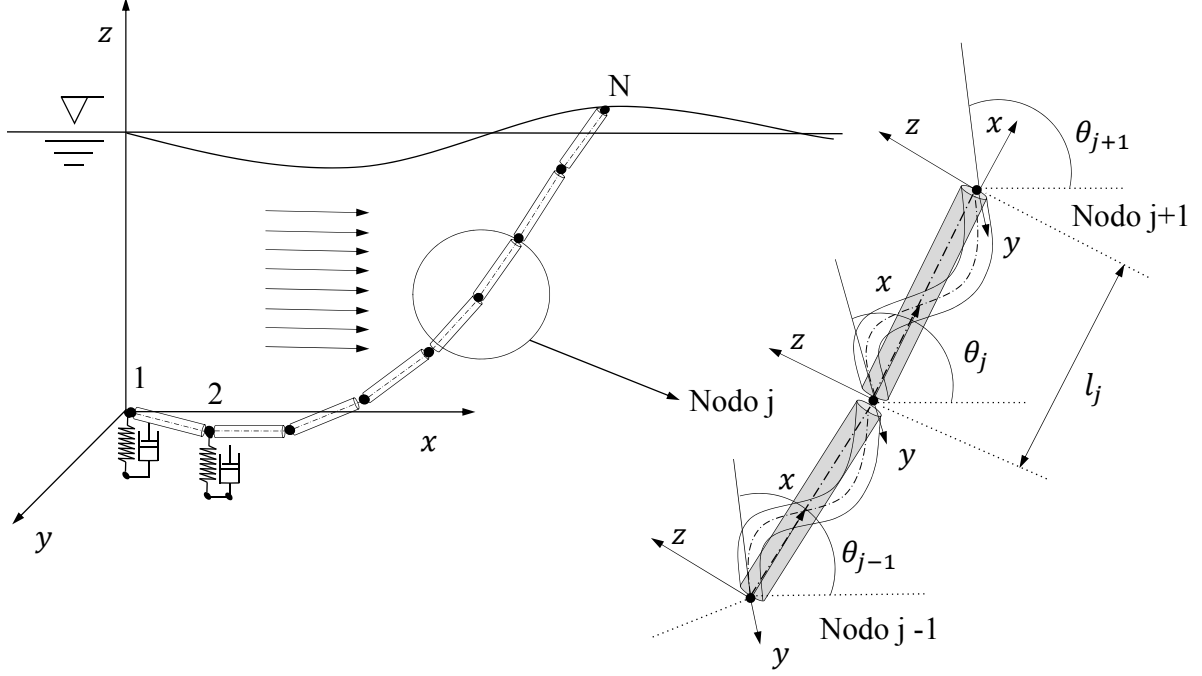


Figura 3: Discretización espacial adoptada para el modelo MEF no lineal.

$$\begin{aligned}
 & \left[(1 - \alpha_b) \mathbf{M}^{t+\Delta t, i} + \Delta t \gamma \mathbf{C}^{t+\Delta t, i} + (\Delta t)^2 \beta \mathbf{K}^{t+\Delta t, i} \right] \cdot \ddot{x}^{t+\Delta t, i+1} = \\
 & \left[(\Delta t)^2 \beta \left(\mathbf{K}_L^{t+\Delta t, i} + \mathbf{K}_{NL}^{t+\Delta t, i} \right) \right] \cdot \ddot{x}^{t+\Delta t, i} + \mathbf{F}^{t+\Delta t, i} - \mathbf{P}^0 - \mathbf{S}^{t+\Delta t, i} \\
 & - \left[\mathbf{C}^{t+\Delta t, i} \left(\dot{x}^t - \Delta t (\gamma + 1) \ddot{x}^t \right) \right] - \left[\alpha_b \mathbf{M}^{t+\Delta t, i} \right] \cdot \ddot{x}^t,
 \end{aligned} \tag{30}$$

donde Δt es el incremento temporal, i denota iteración, α_b es un parámetro relacionado con el método de integración implícito de Bossak–Newmark y γ y β son otros parámetros relacionados con el esquema de integración de Newmark [17].

Finalmente la nueva posición y velocidad de cualquier nodo del cable se puede expresar de acuerdo a [17] como

$$x^{t+\Delta t} = x^t + \Delta t \dot{x}^t + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left[(1 + 2\beta) \ddot{x}^t + 2\beta \ddot{x}^{t+\Delta t} \right], \tag{31}$$

$$\dot{x}^{t+\Delta t} = \dot{x}^t + \Delta t \left[(1 - \gamma) \ddot{x}^t + \gamma \ddot{x}^{t+\Delta t} \right]. \tag{32}$$

6. ESQUEMA DE SOLUCIÓN PARA LA ESTIMACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE ARTEFACTOS FLOTANTES

En la mayor parte de la literatura y códigos informáticos la solución al problema de interacción fluido–estructura y la estimación de los movimientos de sólido rígido de cuerpos en flotación se determina mediante el uso de integrales de convolución [20]. Se presenta a continuación un algoritmo para la estimación de cinéticas y cinemáticas de artefactos en flotación sometidos a cargas externas, como oleaje (ya se mostró al inicio del artículo el modelo de segundo orden empleado) o la interacción con los cables de fondeo, anteriormente tratados. De forma esquemática el procedimiento para la estimación del comportamiento de un cuerpo en flotación, en un instante t de tiempo, sometido a cargas externas puede describirse como sigue [3]:

1. Se determina el potencial de velocidades φ en una iteración i en el tiempo de simulación t .
2. A continuación, se arranca con una iteración para estimar la dinámica del flotador. En la primera iteración del bucle de cálculo de la dinámica del flotador se determina la nueva posición del cable de fondeo. Las fuerzas de reacción del cable se determinan mediante diferenciación numérica.
3. Posteriormente se calcula la presión del fluido sobre la superficie mojada del flotador, con ello se estiman las fuerzas y momentos originados por la acción del mar, así como otras fuerzas externas lineales o no lineales, como la acción del fondeo, el viento, etc.
4. Se obtiene la nueva posición del flotador para la iteración j resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\mathbf{M} \left[(1 - \alpha_b) \ddot{\mathbf{X}}^{t+\Delta t} + \alpha_b \mathbf{X}^t \right] = \mathbf{F}^{t+\Delta t} + \mathbf{F}_f^{t+\Delta t}, \quad (33)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de inercia del flotador, $\ddot{\mathbf{X}}$ es la segunda derivada del vector posición del flotador, \mathbf{F} es el vector de cargas externas actuantes sobre el flotador y \mathbf{F}_f es el vector de fuerzas restauradoras causadas por las reacciones del extremo del cable de fondeo.

5. Se actualiza la posición del extremo del cable de acuerdo a la nueva posición del flotador.
6. Para cada iteración j del bucle de estimación de la dinámica del flotador, se evalúan las fuerzas de restauración ejercidas por los sistemas de fondeo \mathbf{F}_f .
7. Se repite de forma iterativa los pasos de 2 a 6, hasta que se alcanza la convergencia del bucle interior de estimación del comportamiento dinámico del flotador.

8. Finalmente, una vez que se determina el comportamiento del flotador se inicia una nueva iteración $i + 1$ para la estimación del potencial de velocidades hasta que se llega a la convergencia. Cuando esto ocurre se inicia un nuevo paso de tiempo Δt .

El procedimiento descrito permite la estimación simultánea en el dominio del tiempo del comportamiento dinámico de artefactos flotantes sometidos a cargas externas lineales y no lineales. Una ventaja del proceso descrito antes es la posibilidad de incorporar de forma sencilla cargas ambientales de cualquier índole de una forma sencilla y natural. En las secciones posteriores se muestran mediante ejemplos de validación y aplicación las bondades de lo descrito antes.

7. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Se muestran a continuación una serie de ejemplos de validación del modelo MEF no lineal para la resolución del comportamiento dinámico de cables mediante la comparación con otros autores. Seguidamente se exponen dos ejemplos significativos de estructuras oceánicas sometidas a condiciones operativas. Finalmente se exponen unas conclusiones al trabajo presentado.

7.1. Cable en vibración libre

Se propone como caso de validación la comparación con los resultados propuestos por Lazzari et al. [21]. Este experimento consiste básicamente en un cable inicialmente colocado en posición horizontal, sujeto por ambos extremos. Después de el instante inicial uno de los extremos queda libre y el cable queda oscilando hasta una posición de equilibrio sometido a la aceleración gravitatoria.

Los resultados se comparan con los obtenidos por Lazzari et al. [21], y los correspondientes a la simulación con el código RamSeries (www.compassis.com). Las propiedades del cable vienen dadas por: $L = 1,0$ m, rigidez $EA = 50$ N/m², peso por unidad de longitud $w = 0,98$ N/m y un vano inicial de $0,881$ m de longitud. El intervalo temporal adoptado para las simulaciones es de $0,001$ s para una correcta descripción del movimiento del cable. La Figura 5 muestra que los resultados obtenidos presentan un buen ajuste si se compara con la experimentación y con lo obtenido por otros autores.

7.2. Cable unido en su extremo a una placa giratoria

A continuación se comparan los resultados numéricos obtenidos para las tensiones en el extremo del cable, con los obtenidos experimentalmente por Lindhal y Sjöberg en 1983 [22]. Un extremo del cable se une a una plancha circular que rota a una velocidad constante y en el otro se fija al fondo. Se analizan dos casos con diferente periodo de rotación, $T_r = 1,25$ s y $T_r = 3,5$ s de forma respectiva.

Las propiedades del cable son: una longitud L de 33 m, una rigidez axial EA de 10^4 N/m², un peso por unidad de longitud w igual a $0,18$ N/m y un diámetro de $D = 10^{-3}$

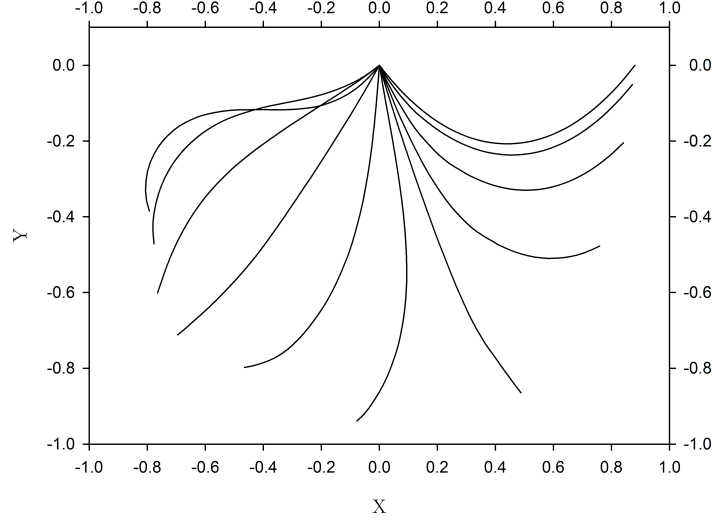


Figura 4: Ejemplo 1. Diferentes posiciones del cable bajo vibración libre.

m. Para llevar a cabo esta validación el cable se divide en 200 elementos y el paso temporal adoptado es de 0,001 s.

Los resultados se trasladan al origen y se comparan con los experimentales obtenidos por otros autores [22]. Se observa que la solución obtenida para las reacciones del cable en su extremo presenta un buen ajuste comparados con los resultados experimentales (véanse las Figuras 6 y 7). Puede observarse una pérdida de tensión de forma constante en cada ciclo de giro de la placa. Esta pérdida de tensión se acentúa a medida que aumenta la frecuencia de rotación de la placa giratoria. Se pueden apreciar pequeñas diferencias probablemente asociadas a la incertidumbre de los datos experimentales con los que se ha llevado a cabo las simulaciones numéricas.

7.3. Análisis de la estructura semi-sumergible GVA 4000

Se muestra en este apartado el análisis de una estructura oceánica de tipo semi-sumergible basada en la plataforma GVA 4000 [23] (véanse las Figuras 8 y 9), cuyas características principales quedan recogidas en la Tabla 1, sometida a un estado de mar aleatorio caracterizado por el espectro JONSWAP (*Joint North Sea Wave Observation Project*). La plataforma analizada dispone de 8 líneas de fondeo dispuestas de forma simétrica, tal y como muestra la Figura 9. Los parámetros clave de la simulación se muestran en la Tabla 1 junto con las características de las líneas de fondeo. Los cables se dividen en 100 elementos cada uno de ellos.

Los resultados obtenidos para los tres grados de libertad representados en las Figuras 10, 11 y 12 (*largada*, *arfada* y *cabeceo*) muestran que los desplazamientos y giros de la plataforma GVA 4000 son mínimos en ambas simulaciones. Además, se observan pequeñas

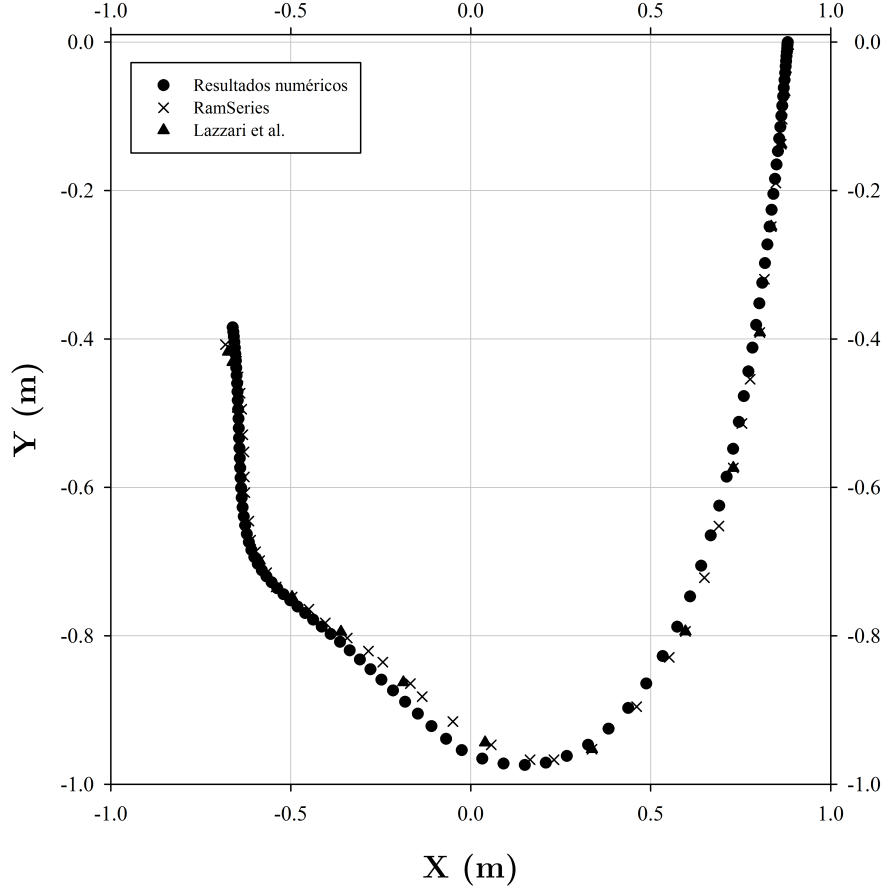


Figura 5: Ejemplo 1. Diferentes posiciones del extremo libre del cable obtenidas de la simulación numérica comparadas con los resultados obtenidos frente a otros autores.

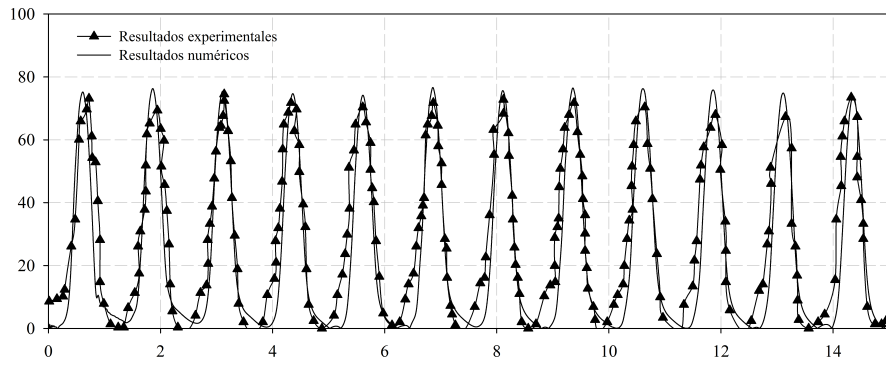


Figura 6: Ejemplo 2. Comparación de las tensiones entre los resultados numéricos y experimentales obtenidos por Lindhal y Sjöberg [22] para $T_r = 1,25$ s.

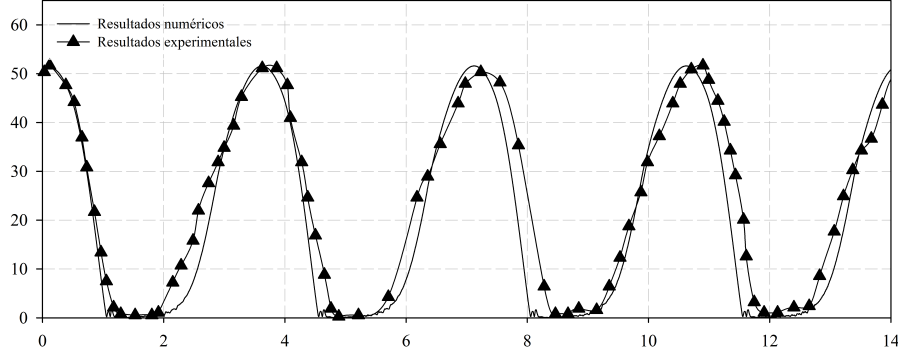


Figura 7: Ejemplo 2. Comparación de las tensiones entre los resultados numéricos y experimentales obtenidos por Lindhal y Sjöberg [22] para $T_r = 3,5$ s.

Item	Valor
Longitud característica (m)	70,0
Calado (m)	20,0
Centro de gravedad (m) ($x_g; y_g; z_g$) (m)	(0, 0; 0, 0; 0, 85)
i_{xx}/masa (m^2)	31,06
i_{yy}/masa (m^2)	31,06
i_{zz}/masa (m^2)	31,06
Espectro de oleaje	JONSWAP
Periodo Pico (s)	7,7
Altura significativa (m)	3,0
Dirección principal del oleaje (deg)	0,0
Profundidad de análisis (m)	120,0
Número de líneas de fondeo	8
Rigidez (N)	$3,84 \times 10^7$
Longitud (m)	520,0
Peso por metro (N/m)	698,1

Tabla 1: Características generales de la plataforma semi-sumergible GVA 4000 analizada y parámetros claves de la simulación realizada.

diferencias entre los modelos de difracción–radiación de primer y segundo orden. Por otra parte, en la Figura 13 se comparan las tensiones en el extremo de una de las líneas de fondeo. Como se aprecia los sistemas de fondeo de la plataforma cumplen con el requisito específico de mantener a la estructura en una posición especificada en alta mar, con un valor medio de la tensión de $4,15 \times 10^5$ N para cada una de las líneas.

7.4. Simulación acoplada de la boya Spar OC3

Para completar el presente trabajo se presenta un análisis completamente acoplado de un aerogenerador marino basado en el concepto de boya *Spar* OC3 [24]. Se asume en este análisis que el rotor está operando con una velocidad de viento de 11,4 m/s, que corresponde al punto dónde se genera el máximo empuje y par en el buje del rotor. El flujo de viento se considera constante y perpendicular al plano del rotor y las cargas de viento se aplican en los centros de presión de torre y palas. El efecto de la turbina sobre la plataforma

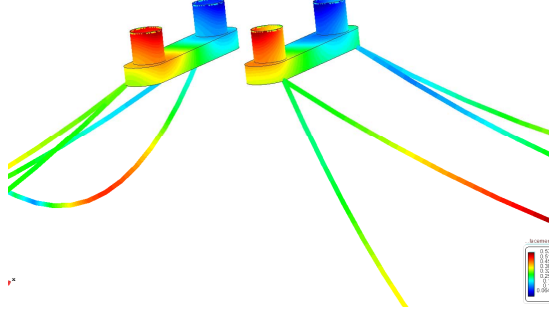


Figura 8: Representación de la estructura oceánica semi-sumergible GVA 4000.

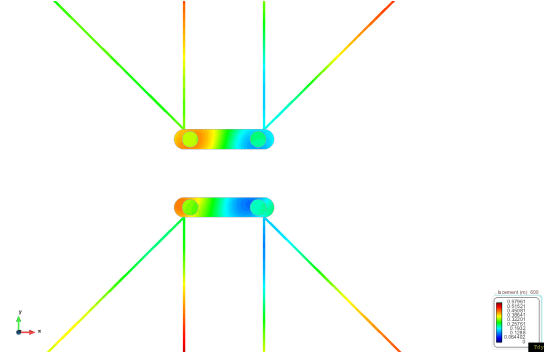


Figura 9: Representación de la disposición de las líneas de fondeo en la estructura semi-sumergible GVA 4000.

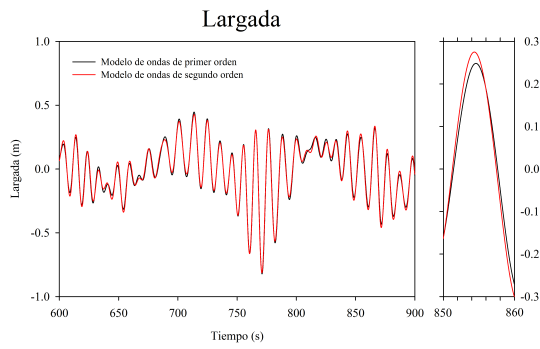


Figura 10: Comparación entre los valores de largada para los modelos de onda de primer y segundo orden.

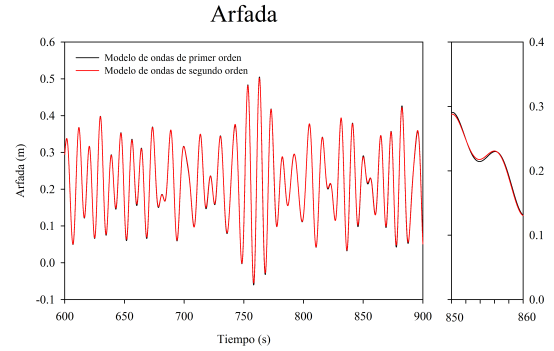


Figura 11: Comparación entre los valores de arfada para los modelos de onda de primer y segundo orden.

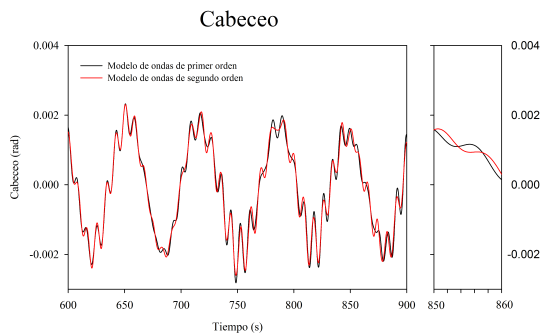


Figura 12: Comparación entre los valores de cabeceo para los modelos de onda de primer y segundo orden.

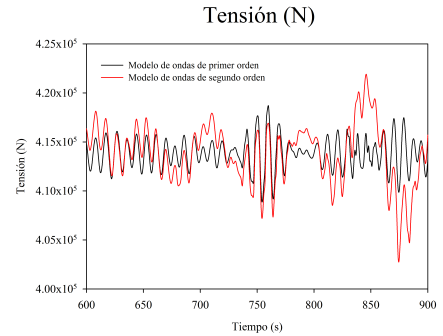


Figura 13: Comparación entre los valores de tensión en el extremo de un cable para cada uno de los modelos de ondas analizados.

flotante se lleva a cabo mediante la linealización de su comportamiento dinámico, que consiste en la extracción de la matrices linealizadas del sistema. Se estudian a continuación las tensiones de las líneas de fondeo y los movimientos y giros de la estructura oceánica considerada. Las características de la plataforma *Spar* OC3 y de las líneas de fondeo pueden encontrarse en el trabajo desarrollado por Jonkman [24], mientras que los datos relativos a la simulación se muestran en la Tabla 2.

Item	Valor
Espectro de oleaje	JONSWAP
Periodo Pico (s)	12,0
Altura significativa (m)	5,0
Dirección principal del oleaje (deg)	0,0
Profundidad de análisis (m)	320,0

Tabla 2: Características generales de la simulación realizada sobre la plataforma *Spar* OC3.

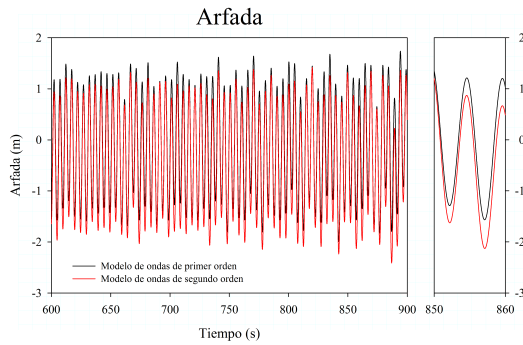


Figura 14: Comparación entre los valores de arfada para los modelos de onda de primer y segundo orden.

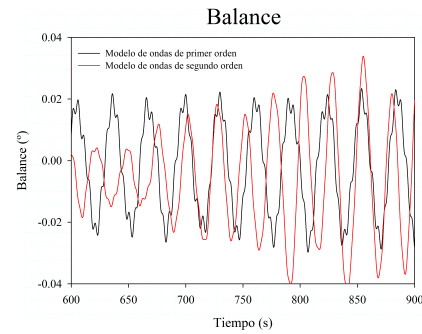


Figura 15: Comparación entre los valores de balance para los modelos de onda de primer y segundo orden.

Puede apreciarse en las figuras anteriores que los valores de los tres grados de libertad representados presentan variaciones poco significativas comparadas con el tamaño de aerogenerador (con más de 90 metros de altura desde la base hasta el núcleo del rotor). La amplitud de la arfada se sitúa próxima a los cuatro metros mientras que los valores relacionados con las amplitudes de los giros (*balance* y *cabeceo*) apenas superan la décima de grado, lo que se traduce en unos pocos metros en el extremo de la estructura. Se observa además que los resultados comparados entre el modelo de primer y de segundo orden son similares en todos los casos, aunque con mayores amplitudes en el caso del modelo de radiación–difracción de segundo orden. En cuanto a las tensiones en ambos casos los valores son similares en amplitud y en fase, tanto en el modelo de primer orden como en el segundo respectivamente. Los valores medios de tensión se sitúan en torno a $9,0 \times 10^5$, valor próximo al peso de la línea, indicativo de la coherencia con los valores de tensión esperados en el análisis.

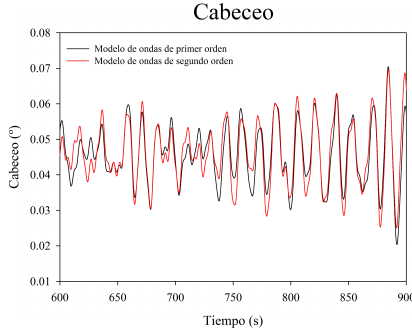


Figura 16: Comparación entre los valores de cabeceo para los modelos de onda de primer y segundo orden.

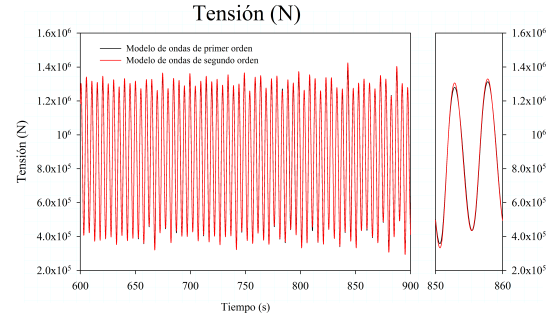


Figura 17: Comparación entre los valores de tensión en el extremo de un cable para cada uno de los modelos de ondas analizados.

8. CONCLUSIONES

De forma esquemática se presentan las siguientes conclusiones al trabajo de investigación realizado:

- Se han expuesto las ecuaciones de gobierno del problema de radiación–difracción de segundo orden. La resolución de las ecuaciones de gobierno se basa en el Método de Elementos Finitos (MEF) aplicado en mallas no estructuradas.
- Se han presentado los aspectos básicos de la formulación co–rotacional para la resolución del comportamiento dinámico de vigas no lineales. Para la resolución de las componentes cinemáticas y dinámicas de líneas de fondeo se ha empleado un modelo MEF no lineal para la obtención de un modelo de cables más realistas.
- Se ha descrito el esquema de acoplamiento entre la interacción fluido–estructura, el comportamiento dinámico del cable, las tensiones del cable y los movimientos del artefacto flotante.
- Se han presentado dos casos de validación y comparación de resultados numéricos y se ha verificado el buen ajuste entre los valores numéricos y los experimentales obtenidos por otros autores.
- Finalmente, se ha analizado el comportamiento de dos estructuras oceánicas en operación normal, una estructura semi–sumergible dedicada a la industria del gas y el petróleo y un aerogenerador marino flotante basado en el concepto OC3. Estas estructuras se han sometido a cargas de viento, corriente y efecto de fondeo. Se han comparado además gráficamente el comportamiento de la estructuras sometida a los modelos de oleaje de primer y segundo orden respectivamente.

REFERENCIAS

- [1] C.A. Felippa. *Nonlinear Finite Element Method*. ASEN 6107, Department of Aerospace Engineering Sciences. University of Colorado at Boulder, USA, (2014).
- [2] M.A. Crisfield, R. Borst, J.J.C. Remmers y C. V. Verhoosel. *Non-Linear Finite Element Method Analysis of Solid and Structures*. Second Edition. Wiley. (2012).
- [3] Compassis. *SeaFEM Theory Manual*. Recuperado de: www.compassis.com/soporte. (2014).
- [4] J. Y-t. Ng. *Time-domain Secon-Order wave interactions with floating offshore structures*. Ph.D. dissertation, The University British Columbia, (1993).
- [5] W. Bai y B. Teng. Simulation of second order wave interaction with fixed and floating structures in time domain. *Ocean Eng.*, Vol **74**, pp. 168–177, (2013).
- [6] S.H. Jeon, Y.U. Cho, M.W. Seo, J.R. Cho y W.B. Jeong. Dynamic response of floating substructure of spar-type offshore wind turbine with catenary mooring cables. *Ocean Eng.* Vol.**72**, pp. 356–364, (2013).
- [7] P. Sclavounos, S. Butterfield, W. Musial y J.M. Jonkman. *Engineering challenges for floating offshore wind turbines*. *Copenhagen Offshore Wind Conference*, Copenhagen, Denmark, (2005).
- [8] A. Cordle y J.M. Jonkman. *State of the art in floating wind turbine design tools*. *ISOPE 2011 21st International Offshore and Polar Engineering Conference*. Hawaii, USA, (2011).
- [9] P.B. Jacob, R.A. Bahiense, F.N. Correa y B.M. Jacovazzo. 2012. Parallel implementations of coupled formulations for the analysis of floating production systems, part I: Coupling formulations. *Ocean Eng.* Vol.**55**, pp. 206–218, (2012).
- [10] P.B. Jacob, L.D. Franco, M.V. Rodrigues, F.N. Correa, y B.M. Jacovazzo. Parallel implementations of coupled formulations for the analysis of floating production systems, part II: Domain decomposition strategies. *Ocean Eng.* Vol.**55**, pp. 219–234, (2012).
- [11] S.Y. Hong y Nam, B-W. *Analysis of second-order wave force of floating bodies using FEM in time-domain*. *ISOPE 2010 Proceeding of the Twentieth International Offshore and Polar Engineering Conference*, Beijing, China, (2010).
- [12] B. Serván y J. Garcia–Espinosa. Accelerated 3D multi-body seakeeping simulations using unstructured finite elements. *J. Compu. Phys.* Vol. **252**, pp. 382–403. (2013).

- [13] A. Tjavaras. *Dynamics of highly extensible cables*. PhD dissertation, Massachusetts Institute of Technology, USA, (1996).
- [14] B. Haugen. *Buckling and Stability Problems for thin shell structures using high performance finite elements*. PhD. Dissertation. University of Colorado, USA, (1994).
- [15] C.E. Martínez, Franklin. *A Theoretical and Numerical Evaluation of Non-linear Beam Elements*. MsC Thesis. Massachusetts Institute of Technology, USA, (1997).
- [16] O.M. Aamo y T.I. Fossen. Finite element modelling of mooring lines. *Math. Comput. Simul.*, Vol. **53**, pp. 415–422, (2000).
- [17] N. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics*, Vol. **84**, pp. 67–94, (1959)
- [18] W. Wood, M. Bossak y O. Zienkiewicz. An alpha modification of Newmark’s method. *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. **1**, pp. 1562–1566, (1980).
- [19] B.M. Irons y R.C. Tuck. A version of the Aitken accelerator for computer iteration. *International J. Num. Meth. Engng.*, Vol.**1**, pp. 275–277, (1969).
- [20] W. Cummins. *The impulse response function and ship motions. Symposium on Ship Theory*. Institut fur Schiffbauder Universitat, Hamburg, Germany, (1962).
- [21] M. Lazzari, A.V. Saetta y R.V.Vitaliani. Non-linear dynamic analysis of cable-suspended structures subjected to wind actions. *Comput. Struct.* Vol. **79**, pp. 953–969, (2001).
- [22] L. Lindahl y A. Sjoberg. *Dynamic analysis of mooring cables. The second international symposium on ocean engineering and ship handling*, pp. 281–319, (1983).
- [23] CompassIS. *SeaFEM–Validation Case 5. Semisubmersible structure GVA 4000*. Compass Ingeniería y Sistemas. www.compassis.com, (2014).
- [24] J.M. Jonkman. *Definition of the floating system for Phase IV of OC3*. Technical Report NREL/TP-500-47535. National Renewable Energy Laboratory, www.nrel.gov, Colorado, USA, (2010).