

UN MÉTODO DE COLOCACIÓN SIN MALLA, OBTENIDO A PARTIR DE LA ECUACIÓN INTEGRAL DE CONTORNO INDIRECTA, Y SU APLICACIÓN A PROBLEMAS DE LAPLACE Y HELMHOLTZ.

Sebastián Sensale¹, Alfredo Canelas² y Berardi Sensale²

1: Instituto de Física
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República
Julio Herrera y Reissig 565, Montevideo, Uruguay
e-mail: ssensale@fing.edu.uy

2: Instituto de Estructuras y Transporte
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República
Julio Herrera y Reissig 565, Montevideo, Uruguay
e-mail: acanelas@fing.edu.uy

Palabras clave: Métodos de la Solución Fundamental, Ecuación integral de contorno indirecta, Ecuación de Laplace, Ecuación de Helmholtz, Método de Reciprocidad Múltiple.

Resumen El método de la solución fundamental se presenta como un método muy eficaz para resolver problemas de Laplace y Helmholtz; sin embargo, tiene el inconveniente de necesitar un contorno auxiliar. Recientemente varios investigadores estudiaron como solucionar esta dificultad [Young]. En el presente trabajo, a partir de la formulación indirecta del método de los elementos de contorno y mediante la discretización del contorno con elementos constantes, se obtiene un método de colocación sin malla (donde de la discretización solo perduran puntos en el contorno, ya que las longitudes de los elementos se pueden asociar con las incógnitas de colocación) que usa las soluciones fundamentales del problema a resolver sin utilizar un contorno auxiliar (ya que es derivado de la formulación indirecta del método de los elementos de contorno y, por lo tanto, calcula las integrales singulares como dicho método). Ésta es una característica que comparte con el método de la solución fundamental. Confrontando los resultados obtenidos según el método propuesto con los disponibles en la bibliografía en problemas de Laplace y Helmholtz se constata la eficiencia del método. También se constata que, cuando las soluciones fundamentales son enriquecidas mediante la adición de una expansión de funciones globales apropiada (como por ejemplo 1, x , y , xy en el caso de la ecuación de Laplace), aumenta la precisión de los resultados.

1. INTRODUCCIÓN

El Método de la Solución Fundamental (MFS), introducido por Kupradze y Aleksidze [1], se ha convertido en un método sin malla popular para resolver varios tipos de Ecuaciones

Diferenciales en Derivadas Parciales (PDE) de gran importancia en la ingeniería, como las de Laplace y Helmholtz, de las cuales nos ocuparemos en el presente trabajo.

El MFS puede clasificarse dentro de los llamados métodos de contorno [2] y, como el Método de los Elementos de Contorno (BEM), puede aplicarse cuando se conoce una solución fundamental de la ecuación diferencial que gobierna el problema.

Si bien el MFS tiene sobre el BEM la ventaja de no generar una malla ni calcular integrales, algunas de ellas singulares, tiene dos grandes desventajas. La primera es la necesidad de trabajar con un contorno artificial, fuera del dominio físico del problema, para evitar las singularidades de la solución fundamental; como la ubicación de este contorno es arbitraria, puede incidir en los resultados obtenidos, sobre todo en problemas con una geometría compleja o que presente singularidades. La segunda es que el número de condición de la matriz del sistema obtenido en el MFS puede ser muy grande (según [3], para obtener exactitud en los cálculos, el número de condición de la misma debe ser del orden de 10^{16}).

En los últimos años varios investigadores estudiaron cómo solucionar estos inconvenientes.

Young et. Al. [4,5,6] aplicaron el método de sustracción (y consecuente adición) de la singularidad para problemas de potencial en dos dimensiones, donde el número de condición del sistema no aumenta tan rápidamente como en el MFS. Cheng y Wang [7] propusieron una técnica de interpolación invertida para evaluar singularidades y la aplicaron a problemas de Laplace y Helmholtz en dos dimensiones. Sarler [8] introdujo, posteriormente, un método que utiliza integrales complejas para el cálculo de los elementos singulares de la diagonal de la matriz del sistema, y Liu [9] trabajó con la integración de la solución fundamental singular en pequeñas áreas que cubren los puntos fuente, de forma tal que los coeficientes del sistema de ecuaciones pueden ser evaluados analíticamente. Chen [10] introdujo el concepto de ‘factor de intensidad en el origen’ para aislar las singularidad de la solución fundamental, junto con una técnica de interpolación invertida para evaluar ese factor, facilitando la resolución de diversos problemas de ingeniería, incluídos los de Laplace [10], Helmholtz [11] y Helmholtz Modificado [12].

El método de los elementos de contorno es un método consolidado [13] el cual, incluso con elementos de interpolación constante, da excelentes resultados para los problemas gobernados por las ecuaciones de Laplace y Helmholtz. Usualmente se pueden considerar dos formulaciones de este método [13]: la formulación directa (DBEM o BEM), y la indirecta (IBEM).

La formulación directa utiliza la identidad de Green para reducir en un orden la dimensión del problema, y de él puede deducirse el IBEM. El IBEM es atractivo debido a su simplicidad, dado que las variables de campo primarias y sus derivadas están vinculadas indirectamente. A diferencia del DBEM, solamente requiere las ecuaciones integrales originales para obtener las soluciones en el interior del dominio.

En el IBEM, al igual que en el BEM, es necesario calcular integrales singulares. Una alternativa para evitar el cálculo de estas integrales es el método conocido como Regular Indirect Boundary Element Method (RIBEM), [14]. En este método, los puntos fuente del

contorno son trasladados hacia un contorno auxiliar, exterior al dominio analizado, evitando el cálculo de las integrales singulares. Por otro lado, este método tiene el inconveniente de generar un sistema de ecuaciones mal condicionado.

En este trabajo se mostrará que el MFS puede deducirse a partir del RIBEM considerando elementos con variación constante y un único punto de integración. De forma análoga, deduciremos el MFS sin contorno auxiliar a partir del IBEM mediante un desarrollo similar.

2. FUNDAMENTO TEÓRICO

2.1 Ecuación Integral de Contorno

Sean u y v son dos funciones vectoriales independientes, \mathfrak{I} un operador diferencial lineal, \mathfrak{I}^* su operador adjunto, \mathfrak{R} una derivada normal generalizada, \mathfrak{R}^* su operador adjunto, Ω una región de \mathbb{R}^2 y Γ su contorno. De acuerdo con el teorema de Green generalizado [15],

$$\int_{\Omega} (v \cdot \mathfrak{I}(u) - u \cdot \mathfrak{I}^*(v)) dV = \int_{\Gamma} (v \cdot \mathfrak{R}(u) - u \cdot \mathfrak{R}^*(v)) dS \quad (1)$$

donde el segundo miembro de la ecuación anterior se obtiene a partir de la integración por partes de los operadores del primer miembro.

Suponiendo que u es solución de la ecuación

$$\mathfrak{I}(u) = b \quad \text{en } \Omega \quad (2)$$

con ciertas condiciones de contorno, y v^* es la solución fundamental del operador adjunto

$$\mathfrak{I}^*(v^*) = \delta \quad \text{en } \mathbb{R}^n \quad (3)$$

donde δ es el delta de Dirac aplicada en un punto de la región Ω , (1) se transforma en

$$u(P) = \int_{\Gamma} (u(X) \cdot \mathfrak{R}^*(v^*(P, X)) - v^*(P, X) \cdot \mathfrak{R}(u(X))) dS(X) + \int_{\Omega} (v^*(P, X) \cdot b(X)) dV(X) \quad (4)$$

para todo $P \in \Omega$. Esta ecuación recibe el nombre de “ecuación integral de contorno”.

Cuando el operador \mathfrak{I} corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden en derivadas parciales, como la que estudiaremos en este trabajo, de la forma

$$\mathfrak{I}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u \quad (5)$$

donde el coeficiente λ es cero, positivo o negativo según se trate de un problema de Laplace, Helmholtz o Helmholtz Modificado, los restantes operadores son:

$$\mathfrak{I}^*(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda v \quad (6)$$

$$\mathfrak{R}(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) n_x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) n_y \quad (7)$$

$$\mathfrak{R}^*(v) = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) n_y \quad (8)$$

2.2 Ecuación Integral de Contorno Indirecta

Sea u' una solución de la ecuación homogénea $\mathfrak{I}(u') = 0$ en $\mathbb{R}^n - \Omega$, que cumple la condición de contorno $u = u'$ en Γ . Para un punto P de la región Ω la ecuación integral de contorno generalizada será

$$0 = \int_{\Gamma} \left(u(X) \cdot \mathfrak{R}^*(v^*(P, X)) - v^*(P, X) \cdot \mathfrak{R}(u'(X)) \right) dS \quad (9)$$

Restando (1) y (9), se obtiene

$$u(P) = \int_{\Gamma} v^*(P, X) \cdot (\mathfrak{R}(u'(X)) - \mathfrak{R}(u(X))) dS(X) + \int_{\Omega} (v^*(P, X) \cdot b(X)) dV(X) \quad (10)$$

para todo punto $P \in \Omega$. Definiendo $\alpha(X) = \mathfrak{R}(u'(X)) - \mathfrak{R}(u(X))$, la ecuación anterior se escribe de la forma

$$u(P) = \int_{\Gamma} \alpha(X) \cdot v^*(P, X) dS(X) + \int_{\Omega} (v^*(P, X) \cdot b(X)) dV(X) \quad (11)$$

y aplicando el operador derivada normal generalizada \mathfrak{R} a la ecuación anterior,

$$\mathfrak{R}_p(u(P)) = \int_{\Gamma} \alpha(X) \cdot \mathfrak{R}_p(v^*(P, X)) dS(X) + \int_{\Omega} [b(X) \cdot \mathfrak{R}_p(v^*(P, X))] dV(X) \quad (12)$$

Para un problema homogéneo ($b=0$) con el contorno Γ particionado en dos conjuntos disjuntos Γ_u y Γ_q en los cuales las condiciones de contorno son $u = \bar{u}$, y $\mathfrak{R}(u) = \bar{q}$ respectivamente, las ecuaciones que resuelven el problema homogéneo quedan de la forma [16]:

$$u(P) = \int_{\Gamma} \alpha(X) \cdot v^*(P, X) dS(X) \quad \forall P \in \Omega \quad (13)$$

$$\mathfrak{R}_p(u(P)) = \int_{\Gamma} \alpha(X) \cdot \mathfrak{R}_p(v^*(P, X)) dS(X) \quad \forall P \in \Omega \quad (14)$$

De acuerdo con Brebbia [13], en la formulación del IBEM, es necesario agregar una constante

α_0 a la ecuación (13) para garantizar la unicidad de la solución en los problemas con condición de contorno de Dirichlet; en este trabajo usaremos la propuesta de Chen et al. [17], que utiliza el IBEM enriquecido con soluciones $v(P)$ de la ecuación homogénea que gobierna el problema para asegurar la unicidad. En tal caso las funciones $\alpha(X)$ deben verificar la condición:

$$\int_{\Gamma} \alpha(X) dS(X) = 0 \quad (15)$$

3. DESARROLLO DEL MFS A PARTIR DEL RIBEM

Golberg [18] deduce las ecuaciones del Método de la Solución Fundamental a partir de las ecuaciones integrales de contorno indirectas. A continuación veremos que si aplicamos el Método de los Elementos de Contorno Indirecto llegamos a las mismas ecuaciones.

Supongamos que queremos resolver el problema gobernado por la ecuación de campo

$$\Im(u) = b \quad \text{en el dominio } \Omega \quad (16)$$

con condiciones de contorno $u = \bar{u}$, y $\Re(u) = \bar{q}$ en Γ_u y Γ_q respectivamente.

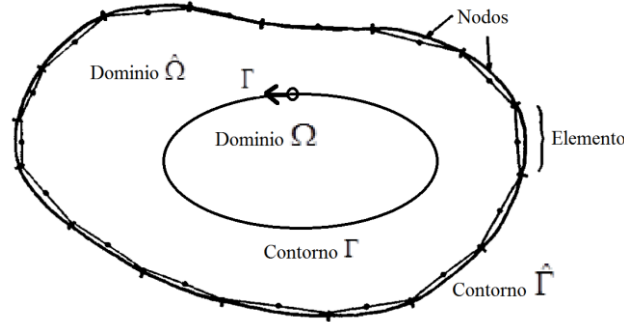


Figura 1 – Malla de Elementos de Contorno para deducir el MFS

Para eso consideremos un dominio auxiliar $\hat{\Omega}$ de contorno $\hat{\Gamma}$ como se representa en la figura adjunta. Un punto P del contorno del problema Γ será interior al dominio $\hat{\Omega}$, por lo que las ecuaciones integrales de contorno indirectas serán:

$$u(P) = \int_{\hat{\Gamma}} \alpha(X) \cdot v^*(P, X) dS(X) \quad \forall P \in \Omega \quad (17)$$

$$\Re_p(u(P)) = \int_{\hat{\Gamma}} \alpha(X) \cdot \Re_p(v^*(P, X)) dS(X) \quad \forall P \in \Omega \quad (18)$$

Observemos que, como el punto P no pertenece al contorno auxiliar $\hat{\Gamma}$, todas las integrales son regulares. Discretizando el contorno auxiliar $\hat{\Gamma}$ en M elementos $\hat{\Gamma}_i$ de variación constante, con un único punto de integración, de longitudes L_i , y centros Q_i se tiene

$$u(P) = \sum_{i=1}^M \int_{\hat{\Gamma}_i} \alpha(X) \cdot v^*(P, X) dS(X) = \sum_{i=1}^M \alpha(Q_i) \cdot v^*(P, Q_i) \cdot L_i \quad (19)$$

Llamando $\alpha(Q_i)L_i = a_i$,

$$u(P) = \sum_{i=1}^M a_i v^*(P, Q_i) \quad (20)$$

Análogamente,

$$\Re_p(u(P)) = \sum_{i=1}^M \int_{\hat{\Gamma}_i} \alpha(X) \cdot \Re_p(v^*(P, X)) dS(X) = \sum_{i=1}^M \alpha(Q_i) \cdot \Re_p(v^*(P, Q_i)) \cdot L_i \quad (21)$$

Sabemos que $\alpha(Q_i)L_i = a_i$, por lo que

$$\Re_p(u(P)) = \sum_{i=1}^M a_i \Re_p(v^*(P, Q_i)) \quad (22)$$

Las ecuaciones obtenidas coinciden con las presentadas por Golberg [18] para el Método de la Solución Fundamental. Por lo cual, el Método de la Solución Fundamental se puede considerar como un caso particular del Método de los Elementos de Contorno Regular, conservando sus atributos (incluido el hecho de que el sistema de ecuaciones que se obtiene sea mal condicionado [3]).

4. DESARROLLO DEL MFS SIN CONTORNO AUXILIAR A PARTIR DEL IBEM

Discretizando el contorno en N elementos constantes con los nodos de la forma representada en la figura 2, y considerando p funciones de enriquecimiento, las ecuaciones integrales de contorno indirectas quedan de la siguiente forma:

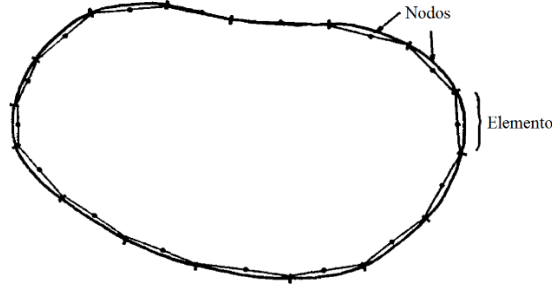


Figura 2 – Malla de Elementos de Contorno para deducir el MFS sin contorno auxiliar

$$u(P_i) = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \alpha(X) \cdot v^*(P_i, X) dS(X) \quad \forall P_i \in \Omega \quad (23)$$

$$\Re_p(u(P_i)) = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \alpha(X) \cdot \Re_p(v^*(P_i, X)) dS(X) \quad \forall P \in \Omega \quad (24)$$

Haciendo la integración numérica con un único punto de integración coincidiendo con el nodo del elemento, se tiene:

$$u(P_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \alpha(P_j) v^*(P_i, P_j) L_j + \alpha(P_i) \int_{\Gamma_i} v^*(P_i, P_i) dS(X) \quad \forall P_i \in \Omega \quad (25)$$

$$\Re_p(u(P_i)) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \alpha(P_j) \Re_p(v^*(P_i, P_j)) L_j + \alpha(P_i) \int_{\Gamma_i} \Re_p(v^*(P_i, P_i)) dS(X) \quad \forall P_i \in \Omega \quad (26)$$

Donde separamos las integrales del elemento i correspondientes al nodo P_i , ya que cuando trabajamos con la solución fundamental presentan una singularidad. Dichas integrales las calcularemos en forma analítica.

Llamando $a_j = \alpha(P_j) L_j$, las ecuaciones (24) y (25) toman la forma:

$$u(P_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_j v^*(P_i, P_j) + \frac{a_i}{L_i} \int_{\Gamma_i} v^*(P_i, P_i) dS(X) \quad (27)$$

$$\Re_p(u(P_i)) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_j \Re_p(v^*(P_i, P_j)) + \frac{a_i}{L_i} \int_{\Gamma_i} \Re_p(v^*(P_i, P_i)) dS(X) \quad (28)$$

Una vez impuestas las condiciones de contorno, obtenemos un sistema de N ecuaciones con N incógnitas. Según Brebbia [13], en el IBEM la singularidad del núcleo asegura que la matriz del sistema siempre será diagonal dominante, y el sistema es, en general, bien condicionado.

4.1 Ecuación de Laplace.

La ecuación de Laplace es:

$$\mathfrak{I}(u) = \Delta u(x, y) = 0 \quad \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (29)$$

De acuerdo con la formulación general planteada en (5) para las ecuaciones diferenciales de segundo orden en derivadas parciales, tendremos $\lambda=0$.

La solución fundamental correspondiente a $\mathfrak{I}^*(v^*) = \delta$ en \mathbb{R}^2 , en este caso es:

$$v^*(X) = \frac{1}{2\pi} \ln(r) \quad (30)$$

Y tenemos:

$$q^* = \Re(v^*) = \frac{\partial v^*}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial v^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} \quad (31)$$

En este caso, las integrales que aparecen en las ecuaciones (27) y (28) se pueden calcular analíticamente como en el BEM cuando se trabaja con elementos de variación constante [13], con la idea que se indica en la figura 3.

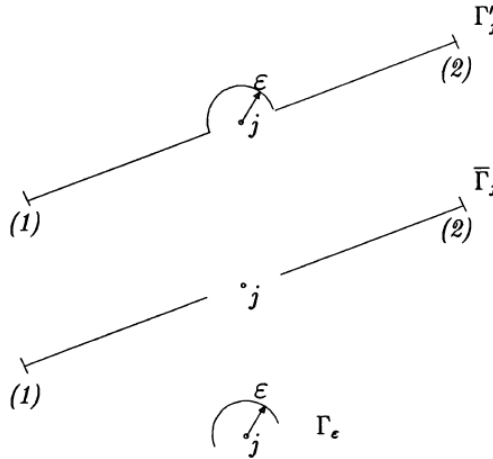


Figura 3 – Integración dentro del elemento de variación constante

$$\int_{\Gamma_i} \ln r(X, P_i) dS(X) = \int_{\langle \Gamma_i \rangle} \ln r(X, P_i) dS(X) + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \ln \varepsilon d\varphi = L_i \left(\ln \frac{L_i}{2} - 1 \right) \quad (32)$$

Donde el símbolo $\int_{\langle \Gamma \rangle}$ representa una integral en el sentido de valor principal de Cauchy.

Analogamente:

$$\int_{\Gamma_i} \frac{1}{r(P_i, X)} \frac{\partial r(P_i, X)}{\partial \vec{n}(P_i)} dS(X) = \int_{\langle \Gamma \rangle} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} dS + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\varepsilon} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \varepsilon d\varphi = 0 + \pi = \pi \quad (33)$$

Observemos que el sistema de ecuaciones obtenido es:

$$u(P_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_j v^*(P_i, P_j) + a_i \left(\ln \frac{L_i}{2} - 1 \right) \quad (34)$$

$$\Re_p(u(P_i)) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_j \Re_p(v^*(P_i, P_j)) + a_i \frac{\pi}{L_i} \quad (35)$$

El cual, salvo la diferencia formal en la definición de la longitud L_i , coincide con el propuesto por los autores de las diferentes propuestas de MFS sin un contorno auxiliar [6], [10].

Si tomamos p funciones de enriquecimiento, $v_1=I$, $v_2=x$, $v_3=y$, $v_4=xy$, $v_5=x^2$, $v_6=y^2$, etc., las ecuaciones anteriores quedan de la forma:

$$u(P_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_j v^*(P_i, P_j) + a_i \left(\ln \frac{L_i}{2} - 1 \right) + \sum_{k=1}^p a_{N+k} v_k(P_i) \quad (36)$$

$$\Re_p(u(P_i)) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_j \Re_p(v^*(P_i, P_j)) + a_i \frac{\pi}{L_i} + \sum_{k=1}^p a_{N+k} \Re_p(v_k(P_i)) \quad (37)$$

$$\sum_{j=1}^{N+p} \alpha_j = 0 \quad (38)$$

4.2 Ecuación de Helmholtz Modificado.

La ecuación de Helmholtz Modificado es:

$$\Delta u(x, y) - k^2 u(x, y) = 0 \quad \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (39)$$

De acuerdo con la formulación general planteada en (5) para las ecuaciones diferenciales de segundo orden en derivadas parciales, tendremos $\lambda = -k^2$.

La solución fundamental correspondiente a $\mathfrak{F}^*(v^*) = \delta$ en \mathbb{R}^2 , en este caso es:

$$v^*(Q_i, P) = \frac{1}{2\pi} (I_0(kr) + K_0(kr)) \quad (40)$$

Donde I_0 , y K_0 , son las funciones de Bessel modificado, de orden cero y de primera y segunda clase respectivamente, P es el punto donde se tiene el potencial, Q_i el punto donde se aplica la carga unitaria y r es la distancia entre los puntos P y Q .

De esta forma,

$$q^* = \Re(v^*) = \frac{\partial v^*}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial v^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} = \frac{k}{2\pi} (I_1(kr) - K_1(kr)) \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} \quad (41)$$

Calculando las integrales que aparecen en las ecuaciones (27) y (28) analíticamente de la forma clásica del BEM, por medio de las fórmulas dadas en la referencia [19], se tiene:

$$\int_{\Gamma_i} (I_o(kr) + K_o(kr)) dS(X) = \frac{1}{2\pi} I_0(kL) + \frac{1}{4} [SL_1(kL)I_0(kL) - SL_0(kL)I_1(kL)] \quad (42)$$

Donde SL_0 y SL_1 son las funciones modificadas de Struve de orden cero y uno respectivamente.

Análogamente,

$$\int_{\Gamma_i} (I_1(kr) - K_1(kr)) \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} dS(X) = \int_{\langle \Gamma \rangle} (I_1(kr) - K_1(kr)) \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} dS - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\varepsilon} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \varepsilon d\varphi = 0 - \pi = -\pi \quad (43)$$

Observemos que el sistema de ecuaciones obtenido es:

$$u(P_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_j v^*(P_i, P_j) + a_i \left\{ \frac{1}{2\pi} I_0(kL_i) + \frac{1}{4} [SL_1(kL_i)I_0(kL_i) - SL_0(kL_i)I_1(kL_i)] \right\} \quad (44)$$

$$\Re_p(u(P_i)) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_j \Re_p(v^*(P_i, P_j)) - a_i \frac{\pi}{L_i} \quad (45)$$

Este sistema difiere del obtenido por los autores de las diferentes propuestas de MFS sin un contorno auxiliar solamente en el término de la diagonal correspondiente a las funciones de Struve; sin embargo, al tomar el desarrollo de dichas funciones cuando L_i tiende a cero y quedarse con los términos de menor orden, coinciden [12].

En este caso, tomamos las p funciones de enriquecimiento como: $v_1 = sh(kx)$, $v_2 = ch(kx)$, $v_3 = sh(ky)$, $v_4 = ch(ky)$, etc., quedando el sistema de ecuaciones como (36)-(38).

4.3 Ecuación de Helmholtz.

La ecuación de Helmholtz es:

$$\Delta u(x, y) + k^2 u(x, y) = 0 \quad \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (46)$$

De acuerdo con la formulación general planteada en (5) para las ecuaciones diferenciales de segundo orden en derivadas parciales, tendremos $\lambda = k^2$.

La solución fundamental correspondiente a $\Im^*(v^*) = \delta$ en \mathbb{R}^2 , en este caso, es

$$v^*(Q_i, P) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) \quad (47)$$

Donde $H_0^{(1)}$ es la función de Hankel de orden cero y de primera clase, P es el punto donde se tiene el potencial, Q_i el punto donde se aplica la carga unitaria y r es la distancia entre los puntos P y Q_i .

De esta forma,

$$q^* = \Re(v^*) = \frac{\partial v^*}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial v^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} = -\frac{i}{4} k H_1^{(1)}(kr) \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} \quad (48)$$

Calculando las integrales que aparecen en las ecuaciones (27) y (28) analíticamente de la forma clásica del BEM, por medio de las formulas dadas en la referencia [19], se tiene:

$$\int_{\Gamma_i} H_0^{(1)}(kr) dS(X) = H_0^{(1)}(kL_i) - \frac{1}{2} \left[SH_1(kL_i) H_0^{(1)}(kL_i) - SH_0(kL_i) H_1^{(1)}(kL_i) \right] \quad (49)$$

Donde SL_0 y SL_1 son las funciones de Struve de orden cero y uno respectivamente.

Análogamente,

$$\int_{\Gamma_i} H_1^{(1)}(kr) \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} dS(X) = \int_{\langle \Gamma \rangle} H_1^{(1)}(kr) \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} dS - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \frac{\pi}{\varepsilon} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \varepsilon d\varphi = 0 - 2 = -2 \quad (50)$$

Observemos que el sistema de ecuaciones obtenido es:

$$u(P_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_j v^*(P_i, P_j) + a_i \left\{ H_0^{(1)}(kL_i) - \frac{1}{2} \left[SH_1(kL_i) H_0^{(1)}(kL_i) - SH_0(kL_i) H_1^{(1)}(kL_i) \right] \right\} \quad (51)$$

$$\Re_p(u(P_i)) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_j \Re_p(v^*(P_i, P_j)) - a_i \frac{2}{L_i} \quad (52)$$

Este sistema difiere del obtenido por los autores de las diferentes propuestas de MFS sin un contorno auxiliar solamente en el término de la diagonal correspondiente a las funciones de Struve. Sin embargo, al tomar el desarrollo de dichas funciones cuando L_i tiende a cero y quedarse con los términos de menor orden, coinciden [11].

En este caso, tomamos las p funciones de enriquecimiento como: $v_1 = \sin(kx)$, $v_2 = \cos(kx)$, $v_3 = \sin(ky)$, $v_4 = \cos(ky)$, etc., quedando el sistema de ecuaciones como (36)-(38).

5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

5.1 Problema gobernado por la ecuación de Laplace

Estudiaremos el siguiente problema analizado por De Figueiredo [20], este problema tiene la

particularidad de presentar una singularidad en el potencial en el punto O.

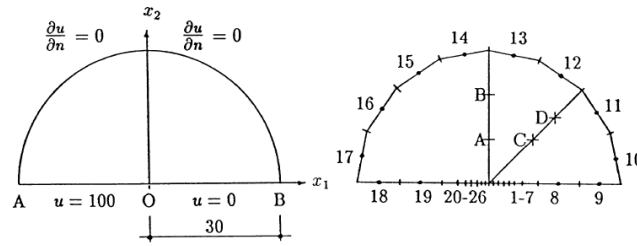


Figura 4 - Geometría del problema

La solución analítica está dada en la siguiente figura.

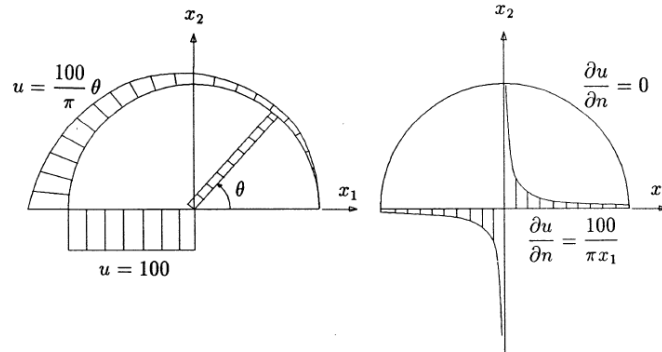


Figura 5 - Solución analítica

Se consideraron cinco discretizaciones de 40, 80, 190, 320 y 640 nodos; en la discretización de 40 nodos de contorno, debido a la singularidad en el punto O, se dividió el radio OA de longitud 30 del contorno en cuatro tramos de longitudes 2, 4, 8 y 16. En la discretización de 40 nodos, se tomaron cuatro nodos en cada intervalo; lo mismo se hizo con el radio OB, y en la circunferencia se tomaron otros ocho. Para las restantes discretizaciones se fue duplicando el número de nodos tomando los nuevos nodos en los puntos medios de la discretización anterior.

En la siguiente figura se muestran los resultados obtenidos en el potencial sobre el contorno de la circunferencia en comparación con la solución analítica. En este ejemplo se utilizó una única función de enriquecimiento.

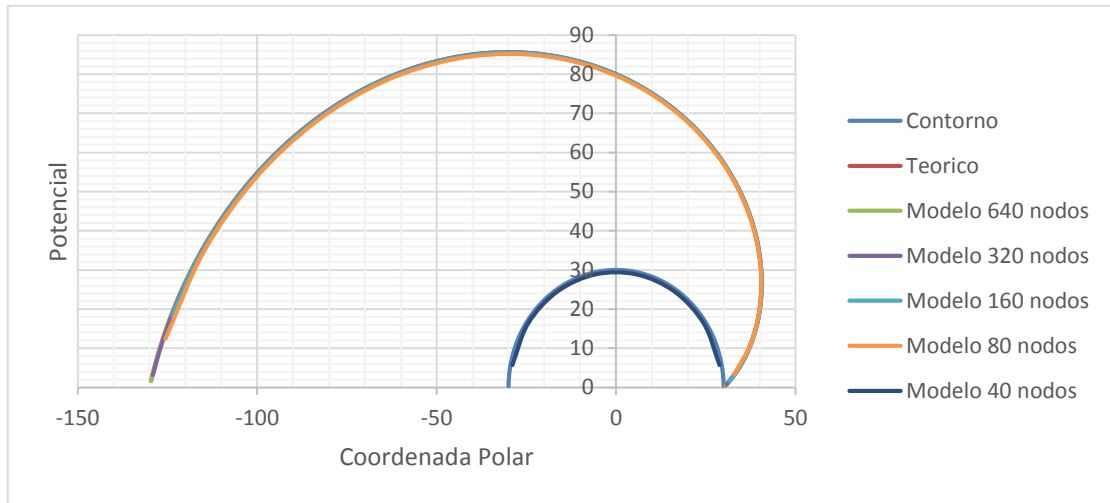


Figura 6 – Potencial en el Contorno

En la figura adjunta se presenta la variación del flujo en el radio OA comparado con la solución analítica.

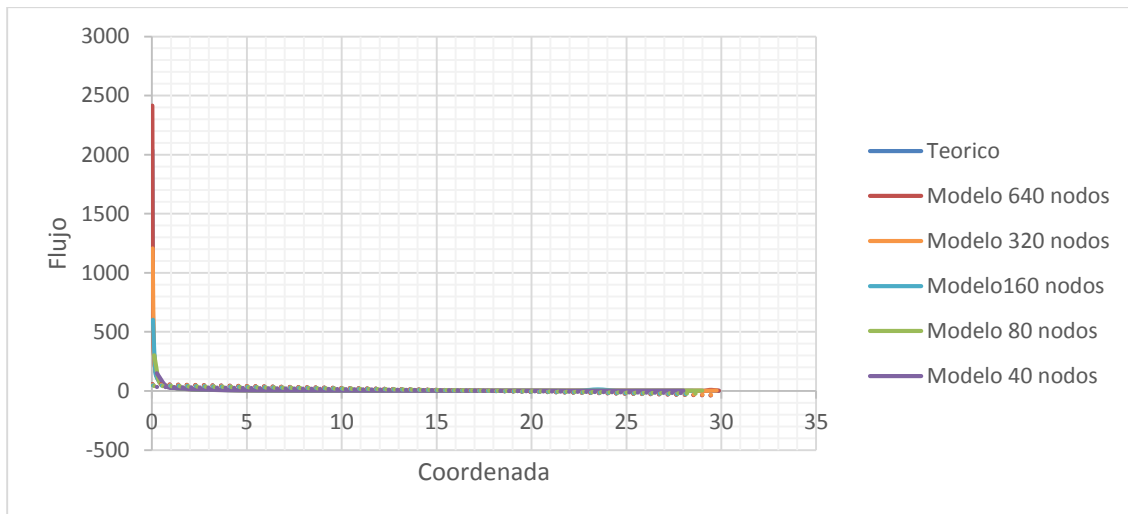


Figura 7 – Flujo en el Contorno

5.2 Problema gobernado por la ecuación de Helmholtz Modificado.

Consideremos el problema gobernado por la ecuación de Helmholtz modificado, con constante $k=\pi$, sobre un dominio Ω cuadrado definido por las relaciones $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$.

Con solución analítica [12]:

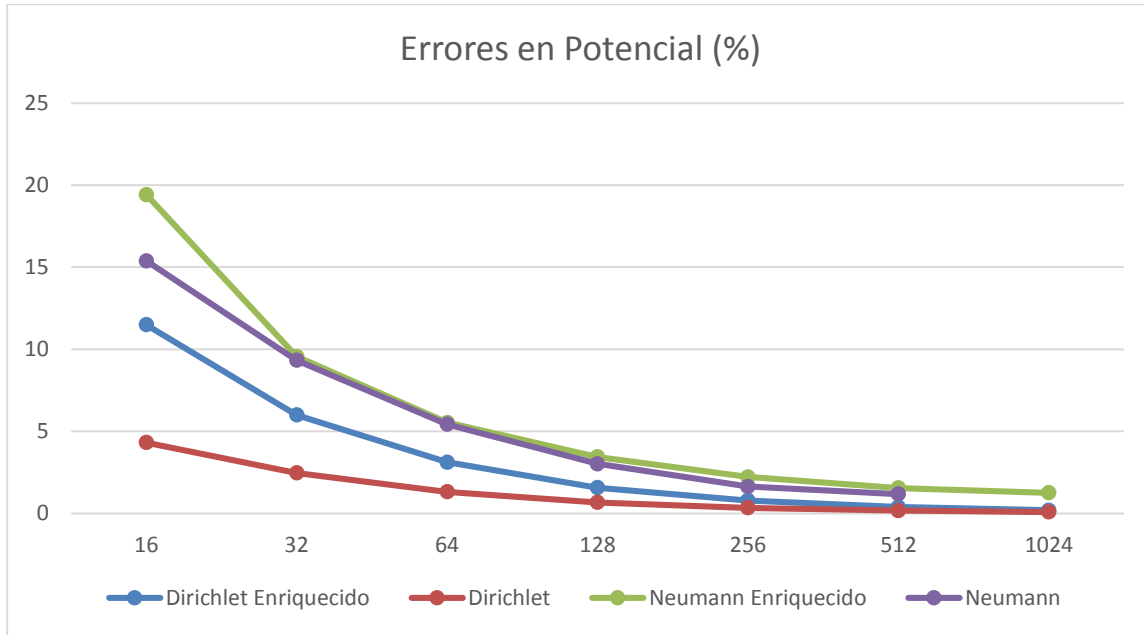
$$u(x, y) = e^{\frac{\pi}{2}(x+\sqrt{3}y)} \quad (53)$$

Primero lo resolveremos con las correspondientes condiciones de contorno de Dirichlet y luego con condiciones de contorno de Neumann.

Utilizaremos siete distribuciones de nodos en el contorno, equiespaciados de 16, 32, 64, 128, 256, 512 y 1024 nodos. Para cada distribución de nodos, calcularemos los valores del potencial, el flujo en la dirección x y el flujo en la dirección y, en nueve puntos en las posiciones del centro del cuadrado y los vértices y puntos medios de otro cuadrado concéntrico con el anterior pero de lado uno. Determinaremos los errores promedio de estas magnitudes en los puntos considerados, definiendo el error como:

$$Err = \frac{|u_{analítica} - u_{modelo}|}{u_{analítica}} \quad (54)$$

Las gráficas siguientes muestran la variación del error para cada distribución de nodos, para las condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann.



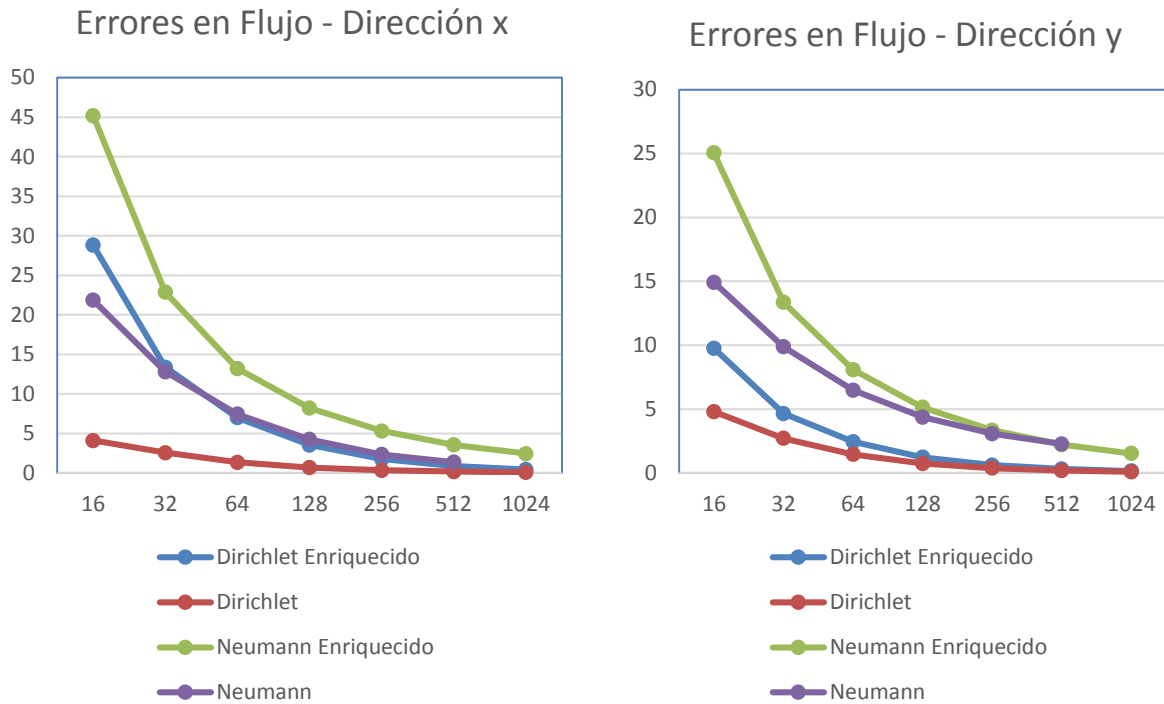


Figura 8 – Error en Porcentaje para los Distintos Números de Nodos

5.3 Problema gobernado por la ecuación de Helmholtz

El problema de determinar las frecuencias naturales de la ménsula representada en la figura 6, es gobernado por la ecuación de Helmholtz [21]. Para determinar dichas frecuencias se impone un desplazamiento pequeño al punto medio del lado empotrado, mientras que los nodos pertenecientes a los restantes lados están libres de tensiones y verifican la condición de contorno de Neumann, como se representa en la figura.

La viga tiene un largo $L=0.9$ y una altura $b=0.2$

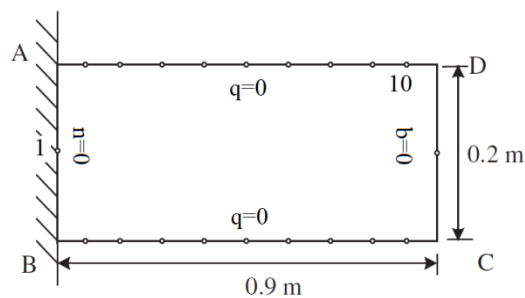


Figura 9 - Condiciones de contorno en la ménsula

La solución analítica de las frecuencias naturales es [22]:

$$\omega_n = k_n c_o = \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} \right] c_o \quad (55)$$

Donde c_o es una constante que depende de las propiedades del material y fue tomada uno.

En la siguiente figura se representa la gráfica frecuencia contra promedio de desplazamientos en los nudos del contorno, obtenida con una distribución de 20 nudos en el contorno de los cuales uno se encuentra en el punto medio del lado empotrado, otro en el lado opuesto y los 18 restantes se encuentran equiespaciados en los dos lados largos de la viga. Se trabajó con cuatro funciones de enriquecimiento.

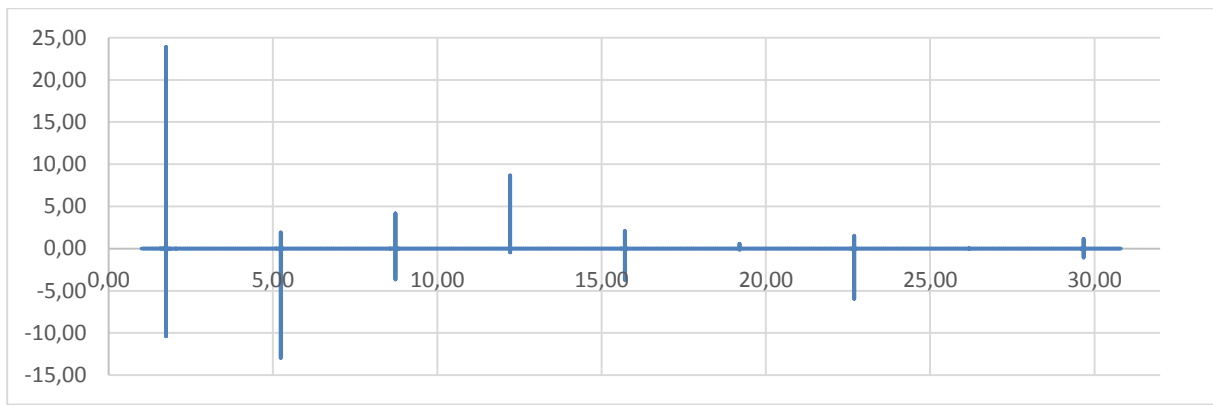


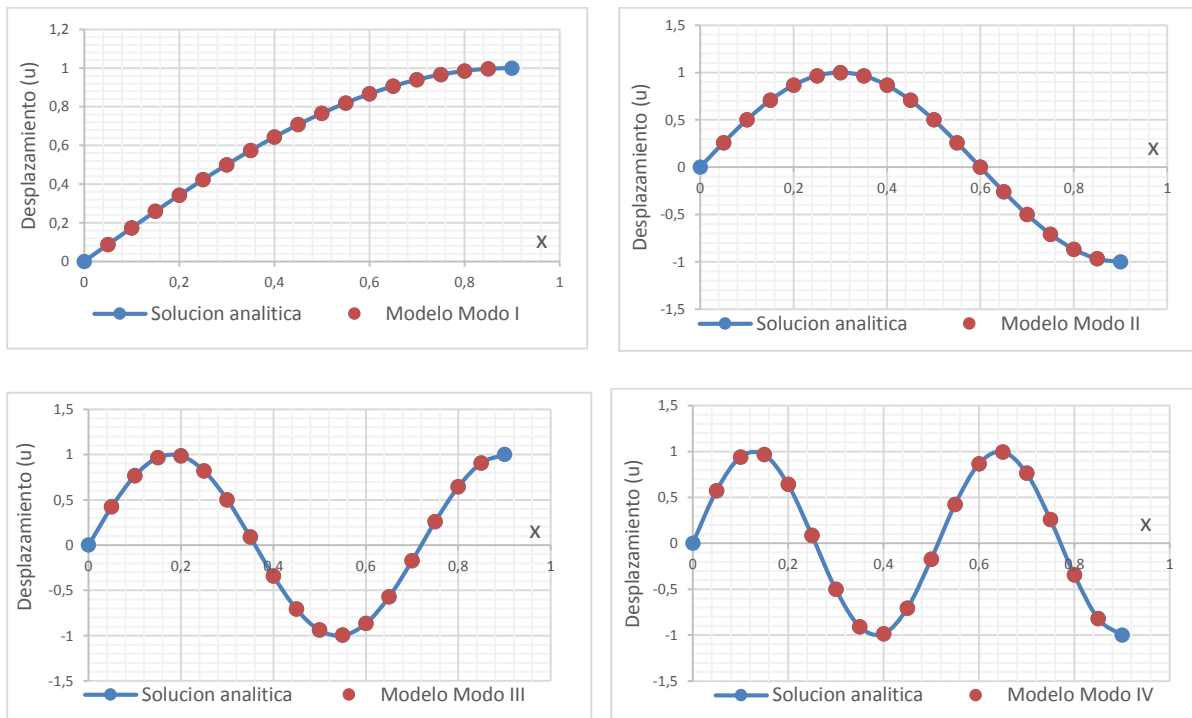
Figura 9 - Grafica frecuencia- promedio de desplazamientos

Los correspondientes modos de vibración están dados por [22]:

$$U_n(x) = C \operatorname{sen} \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} x \right] \quad (56)$$

En nuestros cálculos consideraremos la constante C igual a uno.

En la siguiente figura se grafican los desplazamientos obtenidos en 17 puntos equiespaciados en el interior de la viga a la altura de la línea neutra (puntos rojos) y la solución analítica (línea azul), para los cuatro primeros modos de vibración.



Figuras 10 a 14 – Modos de Vibración

6. CONCLUSIONES

Si bien se realizaron las deducciones trabajando con una malla de N elementos constantes en el contorno, con sus longitudes L_i y puntos medios M_i , también se puede modelar el problema considerándolo como un Método sin Malla, donde se toman M_i puntos ordenados en el contorno y longitudes asociadas a cada punto L_i , igual al promedio de las distancias entre M_i y sus puntos adyacentes M_{i-1} y M_{i+1} ; de esta manera se trabaja con un método sin malla que requiere conocer los mismos datos que utilizaron los investigadores que se citan en la bibliografía.

Los resultados obtenidos en los ejemplos son muy buenos, lo cual era de esperar debido al buen comportamiento que presentan los elementos de variación constante en problemas de Laplace y Helmholtz. En ningún ejemplo se presentaron problemas de mal condicionamiento del sistema, resultado que era previsible debido al comportamiento del Método de los Elementos de Contorno Indirecto.

REFERENCIAS

- [1] Kupradze V.D. and Aleksidze M.A. "The method of the fundamental equations for the approximation of certain boundary value problems". *USSR Comput. Math. Math. Phys.* Vol. 4, pp. 82–126.(1964)
- [2] Alves C.J.S. "On the choice of source points in the method of fundamental solutions".

- Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol 33 (12), pp.1348-1361 (2009).
- [3] Drombosky, T.W., Meyer, A.L., Ling, L., “Applicability of the method of fundamental solutions”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 33, pp.637-643(2009).
 - [4] Young D.L., Chen K.H., Lee C.W., “Novel meshless method for solving the potential problems with arbitrary domain”. *J Comput Phys*, Vol. 209, pp. 290–321 (2005).
 - [5] Young D.L., Chen K.H., Lee C.W., “Singular meshless method using double layer potentials for exterior acoustics”, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.119 pp. 96–107 (2005).
 - [6] Young D. L.; Chen K. H., Chen, J. T., Kao J. H “A modified method of fundamental solutions with source on the boundary for solving Laplace equations with circular and arbitrary domains”. *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Vol. 19, pp. 197-221 (2007).
 - [7] Chen W., Wang F.Z., “A method of fundamental solutions without fictitious boundary” *Engineering Analysis with Boundary Elements* Vol 34 pp.530–532 (2010).
 - [8] Šarler B. “Solution of potential flow problems by the modified method of the fundamental solution: formulations with the single layer and double layer fundamental solutions” *.Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol.33 pp. 1374–1382 (2009).
 - [9] Liu Y.S. “A new boundary meshfree method with distributed sources” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol.34 pp. 914–919 (2010).
 - [10] Chen W., Gu Y., “An Improved Formulation of Singular Boundary Method”, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics* Vol.4 (5 pp.543–558, (2012).
 - [11] Lin J., Chen W., Chen C.S., “Numerical treatment of acoustic problems with boundary singularities by the singular boundary method” *Journal of Sound and Vibration* Vol. 333, pp. 3177–3188 (2014).
 - [12] Chen W., Zhang J.Y., Fu Z.J., “Singular boundary method for modified Helmholtz equations” *Engineering Analysis with Boundary Elements* Vol. 44 pp.112–119 (2014).
 - [13] Brebbia C.A. , Telles J.C.F. , Wrobel L.C. *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, (1984)
 - [14] Wearing J. L., Sheikh M. A. “ A Regular Indirect Boundary Element for Thermal Analysis”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.25, pp. 485-515 (1988).
 - [15] Morse P.M., Feshbach H., *Methods of theoretical physics*. McGraw-Hill, (1953)
 - [16] Brebbia C.A. , Butterfield R. “Formal equivalence of Direct and Indirect Boundary Element Method” *Applied Mathematical Modelling*, Vol.2, pp. 132-134 (1978).
 - [17] Chen J., Chang Y., Kao S., Jian J., “Revisit of the Indirect Boundary Element Method: Necessary and Sufficient Formulation” *Journal of Scientific Computation* (2015, pre-published).
 - [18] Golberg M.A., Chen C.S., “The method of fundamental solutions for potential, Helmholtz and diffusion problema”. In M.A. Golberg ed., *Boundary Integrals Methods-Numerical and Mathematical Aspects*, Comput. Mech. Publ. , pp.103-176 (1998).
 - [19] Abramowitz M., Stegun L.A. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, (1972)
 - [20] De Figueiredo, T.G.A., *A new boundary element formulation in engineering*. Springer-

- Verlag, (1991).
- [21] Miao Y., Wang Y, Wang Y.H., “A meshless hybrid boundary-node method for Helmholtz problems”. *Engineering Analysis with Boundary Elements* Vol. 33 pp.120–127 (2009).
- [22] Craig R.R., *Structural Dynamics*, John Wiley, (1981)