

## ENCURVADURA DE BARRAS DE PAREDE FINA COM SECÇÃO FECHADA SUJEITAS A CARREGAMENTO ARBITRÁRIO: APLICAÇÃO DA TEORIA GENERALIZADA DE VIGAS

Rui Bebiano<sup>1\*</sup>, Cilmar Basaglia<sup>2</sup>, Dinar Camotim<sup>1</sup> e Rodrigo Gonçalves<sup>3</sup>

1: ICIST, CERis, DECivil  
Instituto Superior Técnico  
Universidade de Lisboa  
Avenida Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal  
e-mail: {rbebiano, dcamotim}@civil.ist.utl.pt  
web: <http://www.civil.ist.utl.pt/gbt/>

2: Departamento de Estruturas  
Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo  
Universidade Estadual de Campinas  
Rua Saturnino de Brito, 224, 13083-889, São Paulo, Brasil  
e-mail: cbasaglia@fec.unicamp.br

3: ICIST, CERis, DEC  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Universidade Nova de Lisboa  
2829-516 Caparica, Portugal  
e-mail: rodrigo.goncalves@fct.unl.pt

**Palavras-chave:** Teoria Generalizada de Vigas (GBT), Barras com secção fechada, Encurvadura global/local/distorcional, Efeito da posição da carga

**Resumo.** *Utiliza-se uma formulação recente da Teoria Generalizada de Vigas (GBT) para realizar análises lineares de estabilidade de barras de parede fina que (i) exibem secções transversais arbitrárias (com paredes retas), ou seja, combinações de células fechadas e ramos abertos, e (ii) são atuadas por cargas gerais, incluindo cargas transversais aplicadas fora do eixo dos centros de corte. A formulação acima referida, que é brevemente descrita na primeira parte do artigo, é utilizada para analisar o comportamento de encurvadura de duas vigas de secção fechada que consistem em (i) uma viga-consola com secção retangular vazada (RHS) sujeita a uma força transversal na extremidade e (ii) uma viga em I com banzos celulares (CIS) simplesmente apoiada e submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída. Em ambos os casos, as cargas são aplicadas tanto ao nível do eixo dos centros de corte como de eixos paralelos a este, situados nas partes superior e inferior da viga. Os resultados apresentados e discutidos – que consistem em campos de tensões de pré-encurvadura, curvas de encurvadura ( $P_{cr} - L$ ) e representações 3D dos modos críticos de instabilidade – são obtidos por meio do programa de cálculo automático recém-lançado GBTUL 2.0 e validados por meio de modelos de elementos finitos de casca analisados no programa ANSYS.*

## 1. INTRODUCTION

A avaliação da eficiência estrutural de barras de parede fina requer habitualmente a avaliação do seu comportamento de estabilidade linear, uma tarefa que envolve determinar os modos de encurvadura relevantes e as cargas de bifurcação/tensões associadas. No entanto, a dificuldade em realizar esta tarefa tende a aumentar com (i) a complexidade da geometria da secção e (ii) a esbelteza das suas paredes, condições que proporcionam fenómenos de encurvadura envolvendo combinações de modos de deformação local, distorcional, de corte e de extensão transversal das paredes – em barras cujas secções transversais contenham células fechadas, é também sabido que a torção implica tensões tangenciais associadas à presença de fluxos de corte (*e.g.*, [1]).

A Teoria Generalizada de Vigas (GBT<sup>1</sup>) é uma teoria de barras de parede fina que leva em conta os vários tipos de deformação mencionados no parágrafo anterior – assim, esta técnica constitui uma alternativa eficiente a métodos mais disseminados, como o dos elementos finitos de casca (SFEM) ou o das faixas finitas restrito (cFSM). Originalmente proposta por Schardt [2], a GBT tem vindo a ser consideravelmente desenvolvida na última década, principalmente devido aos esforços de investigação levados a cabo no Instituto Superior Técnico (*e.g.*, [3-4]), onde tem sido empregue no contexto de uma ampla variedade de problemas estruturais, designadamente em análises (i) linear, (ii) de encurvadura, (iii) de vibração, (iv) de pós-encurvadura e (v) de resposta dinâmica de barras e sistemas estruturais de parede fina, nomeadamente treliças e pórticos. A principal vantagem, e característica distintiva, da GBT reside no fato de a configuração deformada da barra (*e.g.*, um modo de encurvadura) ser expressa através de uma combinação linear de contribuições de *modos de deformação da secção*, cada qual com um determinado significado estrutural relevante. Cada "contribuição" consiste em um produto que envolve (i) uma função de forma definida ao longo da linha média da secção transversal (que define o referido modo de deformação) e (ii) a correspondente função da amplitude longitudinal, que quantifica a variação da sua amplitude ao longo do comprimento. Os procedimentos para a determinação das funções de forma e de amplitude acima referidas são designados por *análise da secção* e *análise da barra*, respetivamente. Finalmente, note-se que a GBT mantém a simplicidade das teorias unidimensionais, enquanto exhibe capacidades equiparáveis ao SFEM.

Recentemente, Basaglia & Camotim [5] alargaram significativamente o domínio de aplicação da GBT no contexto de análises de encurvadura, por via do desenvolvimento, aplicação numérica e validação de uma formulação capaz de analisar barras sujeitas a cargas *arbitrárias* – incluindo, com particular interesse, cargas transversais que atuam fora do eixo dos centros de corte da barra. No entanto, a formulação anterior foi desenvolvida e validada exclusivamente no contexto de barras com secção aberta, ou seja, não é aplicável a barras com secção transversal contendo células fechadas. Por outro lado, e mais recentemente, foi desenvolvido um novo procedimento de análise da secção capaz de lidar com secções genéricas (abertas ou fechadas) [6-7]<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Sigla da designação anglo-saxónica "Generalised Beam Theory".

<sup>2</sup> Vale a pena notar que um outro procedimento capaz de lidar com secções transversais arbitrárias já estava disponível anteriormente [8]. Esse procedimento, no entanto, para além de não ser de fácil automatização, envolvia uma classificação e hierarquização diferente dos modos de deformação obtidos.

Assim, o objetivo deste trabalho consiste em expandir o âmbito de aplicação da formulação da GBT desenvolvida por Basaglia & Camotim [5] a barras com secções transversais contendo células fechadas, e aplicar/validar essa técnica no contexto de exemplos concretos. Vale a pena notar que a principal característica específica das barras com secção fechada reside na possível necessidade de se incluir nas análises modos de deformação que envolvam fluxos de corte nas células (por exemplo, para captar adequadamente o comportamento torsional da barra). Os resultados de GBT apresentados e discutidos neste trabalho foram obtidos através do código GBTUL 2.0, o qual foi desenvolvido no Instituto Superior Técnico e foi recentemente disponibilizado on-line como freeware [9-10]. Estes resultados dizem respeito a duas vigas de secção fechada que consistem em (i) uma viga-consola com secção retangular vazada (RHS) sujeita a uma força transversal na extremidade e (ii) uma viga em I com banzos celulares (CIS) simplesmente apoiada e submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída. Em ambos os casos, as cargas são aplicadas tanto ao nível do eixo dos centros de corte como de eixos paralelos a este, situados nas partes superior e inferior da viga. Os resultados apresentados e discutidos – que consistem em campos de tensões de pré-encurvatura, curvas de encurvatura ( $P_{cr} - L$ ) e representações 3D dos modos críticos de instabilidade. Além disso, para fins de validação, alguns dos resultados da GBT são comparados com os valores obtidos por meio de simulações de elementos finitos de casca realizadas no código comercial ANSYS [11].

## 2. BREVE INTRODUÇÃO À TEORIA GENERALIZADA DE VIGAS (GBT)

Conforme acima mencionado, a GBT é uma teoria de barras unidimensional que expressa e discretiza a configuração deformada da barra como uma combinação linear de modos de deformação da secção multiplicados pelas respectivas funções de amplitude modal. Nesta secção, é feita uma apresentação breve da GBT – na literatura poderão ser encontradas descrições mais detalhadas (*e.g.*, [3-4]).

Considere-se a barra de parede fina prismática com secção transversal (supostamente arbitrária) representada na fig. 1(a), onde se adota em cada parede o sistema de coordenadas local  $x - s - z$  como mostrado na Fig. 1(b). Segundo a GBT, as componentes axial ( $u$ ), transversal ( $v$ ) e normal ( $w$ ) do campo de deslocamentos do plano médio de cada parede –  $u(x, s)$ ,  $v(x, s)$  e  $w(x, s)$  – são dadas por

$$u(x, s) = u_k(s)\varphi_{k,x}(x) \quad v(x, s) = v_k(s)\varphi_k(x) \quad w(x, s) = w_k(s)\varphi_k(x) \quad , \quad (1)$$

onde (i)  $u_k(s)$ ,  $v_k(s)$  e  $w_k(s)$  são as funções, definidas na linha media, que representam o modo de deformação da secção  $k$  (ou “o modo  $k$  da GBT”) (ii)  $\varphi_k(x)$  ou  $\varphi_{k,x}(x)$  é a função de amplitude que descreve a sua variação ao longo do comprimento da barra, e (iii)  $1 \leq k \leq N_d$ , em que  $N_d$

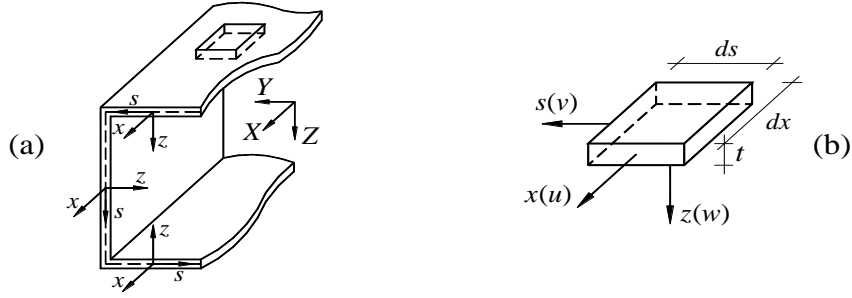


Figura 1. (a) Barra de parede fina prismática com secção transversal arbitrária e sistema de coordenadas global, e (b) elemento de parede infinitesimal com o seu sistema de coordenadas locais e componentes de deslocamento.

é o número total de modos de deformação. Assim, a configuração deformada da barra pode ser expressa como a soma das contribuições dos  $N_d$  modos de deformação – a contribuição do modo  $k$  consiste no produto das suas funções da linha média pela correspondente função de amplitude. Alternativamente, (1) pode ser escrita em forma matricial como

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^T \boldsymbol{\varphi}_{,x} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \boldsymbol{\varphi} \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi} \quad , \quad (2)$$

em que (i)  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são vetores que contém as funções  $u_k(s)$ ,  $v_k(s)$  e  $w_k(s)$ , respetivamente, e (ii)  $\boldsymbol{\varphi}$  é um vetor que contém as correspondentes funções de amplitude longitudinal  $\varphi_k(x)$ . A energia de deformação elástica da barra  $U$  é dada por ( $V$  é o volume da barra)

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad , \quad (3)$$

onde  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  são as várias componentes de tensão e de deformação consideradas – em consequência de se adotar a hipótese de Kirchhoff-Love, resulta um estado plano de tensão nas paredes da barra, cujas componentes são  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{ss}$  e  $\tau_{xs}$ . Por outro lado, usando a Eq. (2) e considerando o tensor das deformações linear de Cauchy e a lei constitutiva de Hooke ([11]), a Eq. (3) pode ser expressa na forma

$$U = \frac{1}{2} \int_L (\boldsymbol{\varphi}_{,xx}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}_{,xx} + \boldsymbol{\varphi}_{,x}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_{,x} + \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi}_{,xx}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{E}^T \boldsymbol{\varphi}_{,xx}) dx \quad , \quad (4)$$

onde  $L$  é o comprimento da barra e  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  são as matrizes de rigidez linear ( $N_d \times N_d$ ), associadas às várias propriedades mecânicas da secção, nomeadamente (i) warping primário/secundário, (ii) extensão/flexão transversal, (iii) distorção/torção de placa (iv) efeitos de Poisson de membrana/flexão, respetivamente – as expressões analíticas das suas componentes são dadas no Anexo A.

O primeiro passo de uma análise estrutural baseada na GBT consiste na determinação dos modos de deformação da secção (as funções  $u_k(s)$ ,  $v_k(s)$  e  $w_k(s)$ ) e as correspondentes propriedades mecânicas (as componentes  $C_{ik}$ ,  $B_{ik}$ ,  $D_{ik}$  e  $E_{ik}$ ), o que é feito por via de um procedimento sistemático designado por *Análise da Secção*. Neste trabalho, utiliza-se uma versão recentemente desenvolvida deste procedimento [6-7], aplicável a secções de parede fina arbitrárias. A primeira etapa consiste em especificar uma discretização nodal da secção transversal e determinar, automática e sistematicamente, os  $N_d$  modos de deformação que

podem ser agrupados em três famílias principais: (i) os modos de Vlasov (para os quais  $\gamma_{xs} = \varepsilon_{ss} = 0$ ), (ii) os modos de corte (para os quais  $\gamma_{xs} \neq 0$ ;  $\varepsilon_{ss} = 0$ ) e (iii) os modos de extensão transversal (para os quais  $\varepsilon_{ss} \neq 0$ ) – sendo que todos eles podem ser divididos em várias subfamílias [7]<sup>3</sup>. Após a obtenção dos modos, é possível (facultativo) seleccionar qualquer subconjunto de  $n_d$  modos de deformação ( $1 \leq n_d \leq N_d$ ) para serem incluídos na restante análise, reduzindo-se assim o número de graus de liberdade envolvidos.

Depois de conhecer os modos de deformação da secção transversal e as propriedades mecânicas modais, torna-se possível realizar a *Análise da Barra*, que fornece a solução do problema de valores e funções próprias que traduz o equilíbrio adjacente: cargas/momentos críticos (valores próprios) e os modos de vibração associados (funções próprias), definidos em termos de  $\varphi_k(x)$ . Sempre que a carga – ou, mais precisamente, o campo de tensões atuantes – for relativamente simples, torna-se fácil determinar os termos de rigidez geométrica necessários para realizar uma análise de encurvadura (*e.g.*, [12]). No entanto, para carregamentos mais gerais/complexos (por exemplo, cargas transversais atuando longe do eixo dos centros de corte) tal abordagem não é viável – em vez disso, é indispensável quantificar as tensões atuantes rigorosamente, por meio de uma *análise linear de pré-encurvadura* preliminar.

## 2.1. Análise de Pré-Encurvadura

As equações de equilíbrio de primeira ordem podem ser estabelecidas por vi do Princípio da Estacionariedade da Energia Potencial, *i.e.*,

$$\delta(U + \Pi) = 0 \quad , \quad (5)$$

onde  $\Pi$  é o potencial das cargas aplicadas. A fim de definir este potencial, seja  $Q_s$  uma carga genérica consistindo em cargas distribuídas de superfície aplicadas sobre o plano médio de uma parede e atuando ao longo da direcção  $s$  – nestas condições, a carga pode ser expressa sob a forma

$$Q_s(x, s) = q_s(s)\phi(x) \quad , \quad (6)$$

em que  $q_s(s)$  descreve o perfil do carregamento ao longo da linha média da secção e  $\phi(x)$  é a correspondente função de amplitude longitudinal. Assim, o potencial das cargas aplicadas vem

$$\Pi = - \iint_M q_s \phi v ds dx \quad , \quad (7)$$

onde  $M$  é o domínio do plano médio da barra. Introduzindo (2) em (7) e integrando ao longo da linha média da secção  $S$ , chega-se a

$$\Pi = - \int_x \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{q} \phi dx \quad , \quad (8)$$

onde as componentes do tensor de primeira ordem  $\mathbf{q}$  são forças modais generalizadas, dadas por

<sup>3</sup> Obviamente, o número, a natureza e a qualidade dos modos de deformação obtidos dependem da discretização nodal da secção, a qual envolve (i) nós internos naturais, (ii) nós exteriores naturais e (iii) nós intermédios (definido pelo utilizador) [7].

$$q_i = \int_S q_s v_i ds \quad . \quad (9)$$

A Figura 2 apresenta dois exemplos de perfis de carregamento da secção transversal  $q_s(s)$ , consistindo em cargas atuando transversalmente à alma de uma secção em C (horizontal): (i) uma carga uniformemente distribuída  $p$  (Fig. 2(a)) e (ii) uma força concentrada  $P$  (Fig. 2(b)) –  $H(s)$  e  $\delta(s)$  representam as funções de Heaviside e delta de Dirac). Finalmente, introduzindo (4) e (8) em (5), chega-se à forma fraca da condição de equilíbrio de primeira ordem, ou seja

$$\int_L (\delta \boldsymbol{\varphi}_{,xx}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}_{,xx} + \delta \boldsymbol{\varphi}_{,x}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_{,x} + \delta \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi} + \delta \boldsymbol{\varphi}_{,xx}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varphi} + \delta \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{E}^T \boldsymbol{\varphi}_{,xx} - \delta \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{q} \boldsymbol{\varphi}) dx = 0. \quad (10)$$

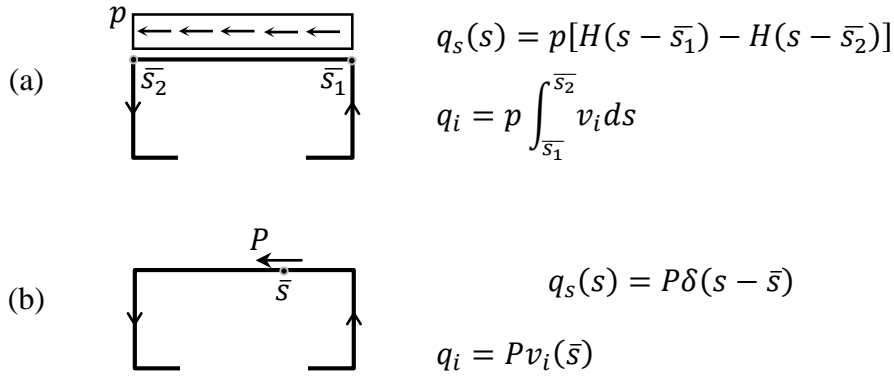


Figura 2. Perfis de carregamento da secção: cargas transversais (a) distribuída e (b) concentrada (alma de secção em C).

Se  $\mathbf{q}$  representa a carga aplicada, pode-se então realizar uma análise de pré-encurvatura geral por via de (10) – a sua solução  $\boldsymbol{\varphi}^0$  (vetor cujas componentes são as funções de amplitude longitudinal,  $\varphi_j^0(x)$ ), define a configuração deformada do estado linear de pré-encurvatura, dada por

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^T \boldsymbol{\varphi}_{,x}^0 \quad \mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^T \boldsymbol{\varphi}^0 \quad \mathbf{w}^0 = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}^0 \quad . \quad (11)$$

Quanto às componentes de membrana das tensões de pré-encurvatura, estas são dadas por

$$\sigma_{xx}^0 = \frac{E}{1-\nu^2} \mathbf{u}^T \boldsymbol{\varphi}_{,x}^0 + \frac{E\nu}{1-\nu^2} \mathbf{v}_{,s}^T \boldsymbol{\varphi}^0 \quad , \quad (12a)$$

$$\sigma_{ss}^0 = \frac{E}{1-\nu^2} \mathbf{v}_{,s}^T \boldsymbol{\varphi}^0 + \frac{E\nu}{1-\nu^2} \mathbf{u}^T \boldsymbol{\varphi}_{,x}^0 \quad , \quad (12b)$$

$$\tau_{xs}^0 = G(\mathbf{u}_{,s}^T \boldsymbol{\varphi}^0 + \mathbf{v}^T \boldsymbol{\varphi}_{,x}^0) \quad , \quad (12c)$$

onde  $E$ ,  $G$ ,  $\nu$  são o módulo de elasticidade, módulo de distorção e coeficiente de Poisson do material.

Finalmente, note-se que sendo obviamente mais rigoroso incluir todos os  $N_d$  modos de deformação da GBT para expressar os campos de tensões acima, é possível considerar aqui apenas um subconjunto desses modos ( $n_d^0 \leq N_d$ ) – o campo de tensões de pré-encurvatura combina, assim, apenas alguns padres específicos de tensões.

## 2.2. Análise de Encurvadura

Em análises lineares de encurvadura, as equações de equilíbrio podem igualmente ser expressas segundo o Princípio da Estacionariedade da Energia Potencial, que agora se expressa por

$$\delta(U + U^0) = 0 \quad , \quad (13)$$

onde  $U^0$  representa o trabalho realizado pelas tensões de pré-encurvatura, definidas em (12a)-(12c), nas componentes de deformação não-lineares (quadráticas). Assim, (13) pode expressar-se como [5]

$$U = \frac{1}{2} \int_L \left( \begin{aligned} &\boldsymbol{\varphi}_{,xx}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}_{,xx} + \boldsymbol{\varphi}_{,x}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_{,x} + \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi}_{,xx}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{E}^T \boldsymbol{\varphi}_{,xx} + \\ &+ \lambda \{ \boldsymbol{\varphi}_{,x}^T [\mathbf{X}_j^{\sigma-x} \varphi_{j,xx}^0 + \mathbf{X}_j^{\sigma-xP} \varphi_j^0] \boldsymbol{\varphi}_{,x} + \\ &+ \boldsymbol{\varphi}^T [\mathbf{X}_j^{\sigma-sP} \varphi_{j,xx}^0 + \mathbf{X}_j^{\sigma-s} \varphi_j^0] \boldsymbol{\varphi} + \\ &+ \boldsymbol{\varphi}^T [\mathbf{X}_j^{\tau} \varphi_{j,x}^0] \boldsymbol{\varphi}_{,x} + \boldsymbol{\varphi}_{,x}^T [\mathbf{X}_j^{\tau T} \varphi_{j,x}^0] \boldsymbol{\varphi} \} \end{aligned} \right) dx = 0 \quad , \quad (14)$$

onde  $1 \leq j \leq n_d^0$  e as 4 linhas dentro do integral correspondem, respetivamente, a termos de (i) rigidez linear (os mesmos apresentados em (4)) e (ii) rigidez geométrica associados às tensões de pré-encurvatura  $\sigma_{xx}^0$ ,  $\sigma_{ss}^0$  e  $\tau_{xs}^0$ . Por outro lado,  $\lambda$  é o parâmetro de carga e  $\mathbf{X}_j^{\sigma-x}$ ,  $\mathbf{X}_j^{\sigma-xP}$ ,  $\mathbf{X}_j^{\sigma-sP}$ ,  $\mathbf{X}_j^{\sigma-s}$  e  $\mathbf{X}_j^{\tau}$  são as matrizes de rigidez geométrica da secção associadas às componentes de tensão<sup>4</sup> (i) normais longitudinais ( $\mathbf{X}_j^{\sigma-x}$  e  $\mathbf{X}_j^{\sigma-xP}$ ), (ii) normais transversais ( $\mathbf{X}_j^{\sigma-sP}$  e  $\mathbf{X}_j^{\sigma-s}$ ) e (iii) tangenciais ( $\mathbf{X}_j^{\tau}$ ) – as suas expressões analíticas são dadas no Anexo A. Note-se que as funções  $\varphi_j^0(x)$  (componentes de  $\boldsymbol{\varphi}^0$ ), que definem o estado de pré-encurvatura, já são conhecidas neste ponto.

A análise de encurvadura, *i.e.*, o procedimento necessário para resolver (13), levando à determinação de  $\lambda$  e  $\boldsymbol{\varphi}(x)$ , pode ser realizada (i) analiticamente, apenas para barras simplesmente apoiadas submetidas a diagramas de esforços constantes (a forma forte de (13) constitui um sistema de equações diferenciais de equilíbrio com soluções exatas sinusoidais para as funções  $\varphi_k(x)$ ) ou (ii) numericamente. A solução numérica de (13), que pode ser obtida para qualquer combinação de condições de carga e de suporte, envolve a discretização longitudinal da barra em *elementos finitos de GBT* – os graus de liberdade desses elementos são os valores e derivadas nodais das funções  $\varphi_k(x)$ , aproximadas por meio de polinómios cúbicos Hermite ou Lagrange. Assim, o plano médio da barra é discretizado (i) longitudinalmente, em elementos finitos de GBT, e (ii) transversalmente em "segmentos de parede" (troços entre nós consecutivos), de uma maneira semelhante a uma malha de elementos finitos bidimensionais.

<sup>4</sup> Note-se que os termos  $\mathbf{X}^{(\cdot)P}$  de referem a efeitos de Poisson.

### 3. APLICAÇÃO A VIGAS DE SECÇÃO FECHADA

A aplicação da formulação da GBT acima descrita para o caso de barras (vigas) com seções contendo células fechadas é agora ilustrada, analisando-se o comportamento de encurvadura das duas vigas seguintes: (i) uma viga-consola com secção retangular vazada (RHS<sup>5</sup>) sujeita a duas forças transversais na extremidade livre (Fig. 3 (a)) e (ii) uma viga em I com banzos em caixão (CIS) simplesmente apoiada e submetida a uma carga uniformemente distribuída (Fig. 3(b)). Em ambos os casos, as cargas são aplicadas quer ao nível do eixo dos centros de corte ( $P_{Sc}, p_{Sc}$ ) quer na parte superior ( $P_{Top}, p_{Top}$ ) ou inferior ( $P_{Bot}, p_{Bot}$ ) da secção. Para cada caso, são obtidas as curvas de encurvadura para uma ampla gama de comprimentos  $L$ :  $100 \leq L \leq 10.000mm$ . Para fins de validação, os resultados obtidos com GBT, através do código GBTUL 2.0, são comparados com resultados do programa ANSYS.



Figura 3. Exemplos ilustrativos: (a) cantoneira RHS atuada por duas cargas de extremidade e (b) viga CSI simplesmente apoiada atuada por carga uniformemente distribuída as cargas podem atuar nas 3 posições indicadas.

#### 3.1. Viga-Consola RHS sujeita a Cargas de Extremidade

As Figs. 4 (a)-(b) mostram a geometria da secção RHS bem como a discretização nodal da GBT adotada – o número relativamente grande de nós intermédios considerados nas almas destina-se a obter uma aproximação adequada das variações de tensão (designadamente de  $\sigma_{ss}$ ) que aí se desenvolvem, na vizinhança dos pontos de aplicação da carga. A Figura 5 mostra as configurações dos modos de deformação mais relevantes (de um total de  $N_d = 60$ ) obtidos com a discretização secção transversal mostrada na Fig. 4(b) – estes modos de deformação dividem-se em (i) Convencionais (globais **1-3**, distorcionais **5** e locais **6-11**), (ii) de corte (torção com fluxo de corte **4**, globais **22-24** e locais **25-34**) e (iii) extensão transversal (isotrópico **41**, deviatórico **42** e distorcional **43-44**).

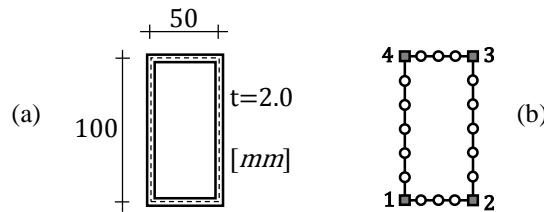


Figura 4. Secção retangular vazada (RHS): (a) geometria e (b) discretização nodal.

<sup>5</sup> “RHS” – Rectangular Hollow Section; “CIS” – Closed-flange I-Section.



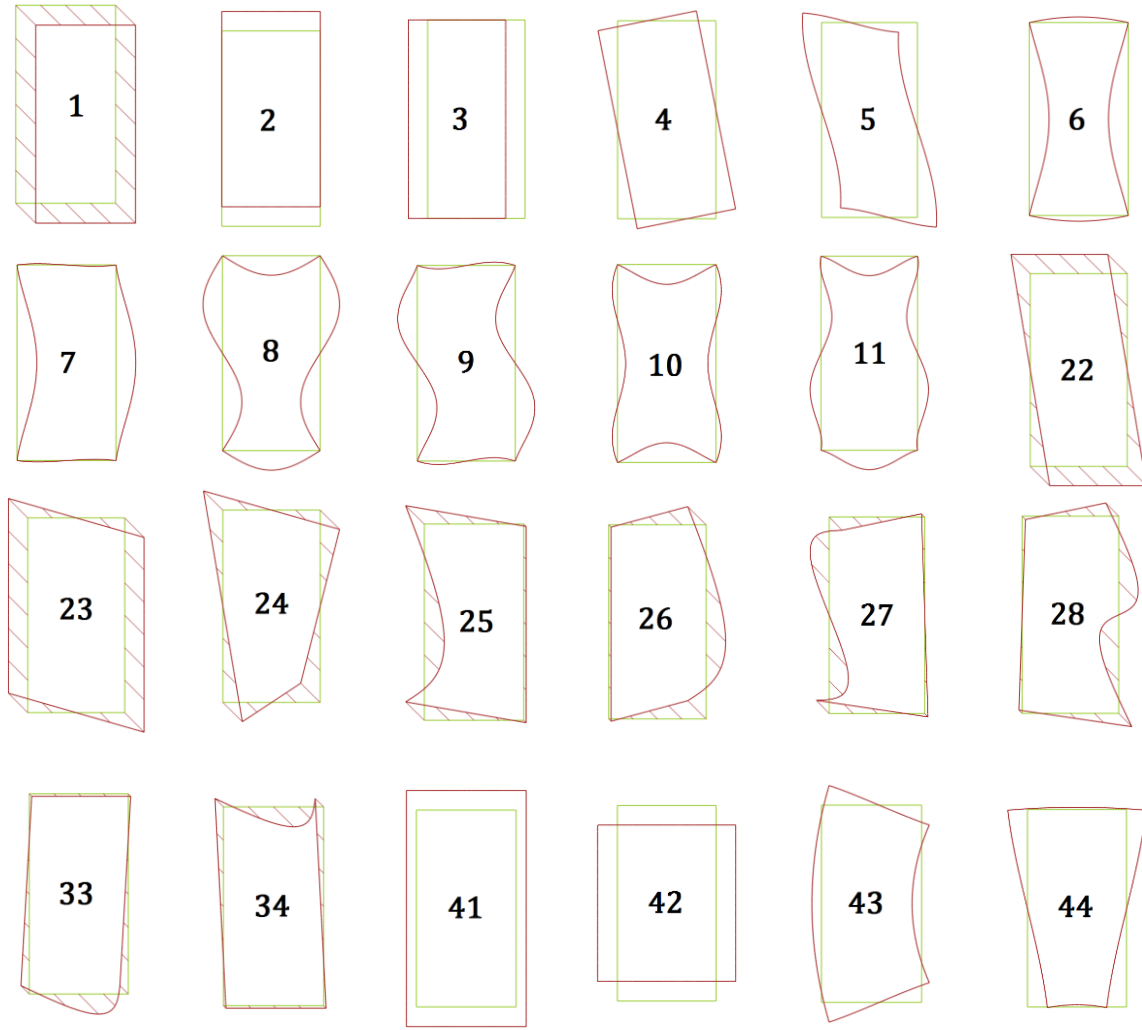


Figura 5. Configurações dos modos de deformação mais relevantes da secção RHS.

A Figura 6 apresenta as curvas de encurvadura ( $P_{cr} - L$ ) para as duas cargas de extremidade atuando em 3 posições diferentes (Fig. 3(a)): (i) parte superior da secção (GBT – Top), (ii) nível do centro de corte (GBT – SC) e (iii) parte inferior da secção (GBT – Bottom) – a figura inclui também os resultados do ANSYS, relativos às situações da carga atuando na parte superior (ANSYS – Top) e inferior (ANSYS – Bottom) da secção. Por outro lado, a Fig. 7 ilustra os modos críticos de instabilidade (obtidos através do GBTUL 2.0) para as vigas com  $L = \{200, 320, 1200mm\}$ . Finalmente, a Fig. 8 fornece representações (também do GBTUL 2.0) dos campos de tensões de pré-encurvadura  $\sigma_{xx}^0$ ,  $\sigma_{ss}^0$ ,  $\tau_{xs}^0$  para a viga  $L = 320mm$  sujeita a cargas na parte inferior da secção. A observação das Figs. 6-8 conduz às seguintes conclusões:

- (i) A comparação com as cargas críticas das vigas carregadas ao nível do centro de corte mostra que a deslocação vertical do ponto de aplicação da carga apenas altera os valores críticos desta para (i<sub>1</sub>)  $L < 450mm$ , para carregamento inferior, e (i<sub>2</sub>)  $L < 700mm$ , para

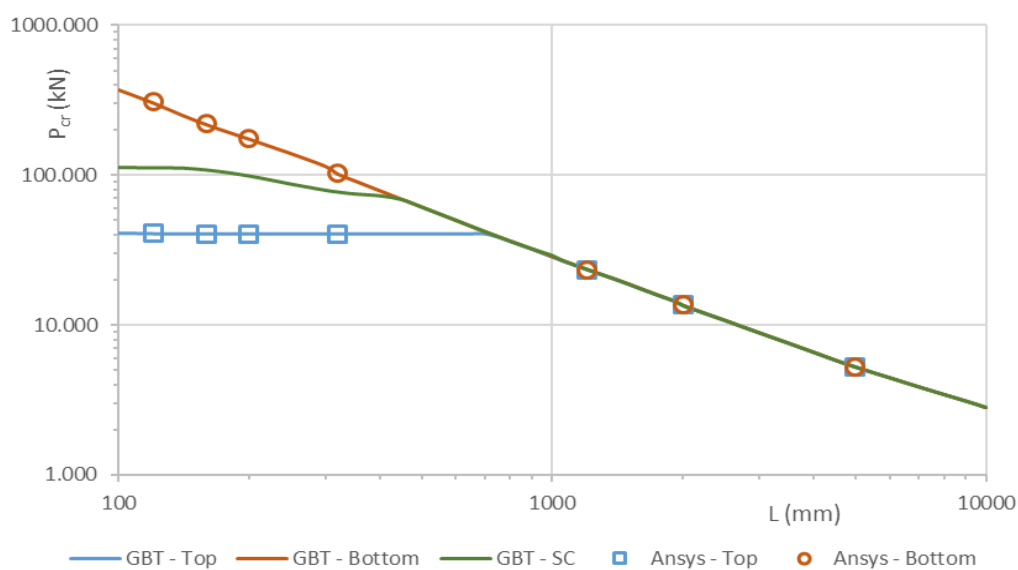


Figura 6. Curvas de encurvadura ( $P_{cr} - L$ ) das consolas RHS, para as 3 posições das cargas.

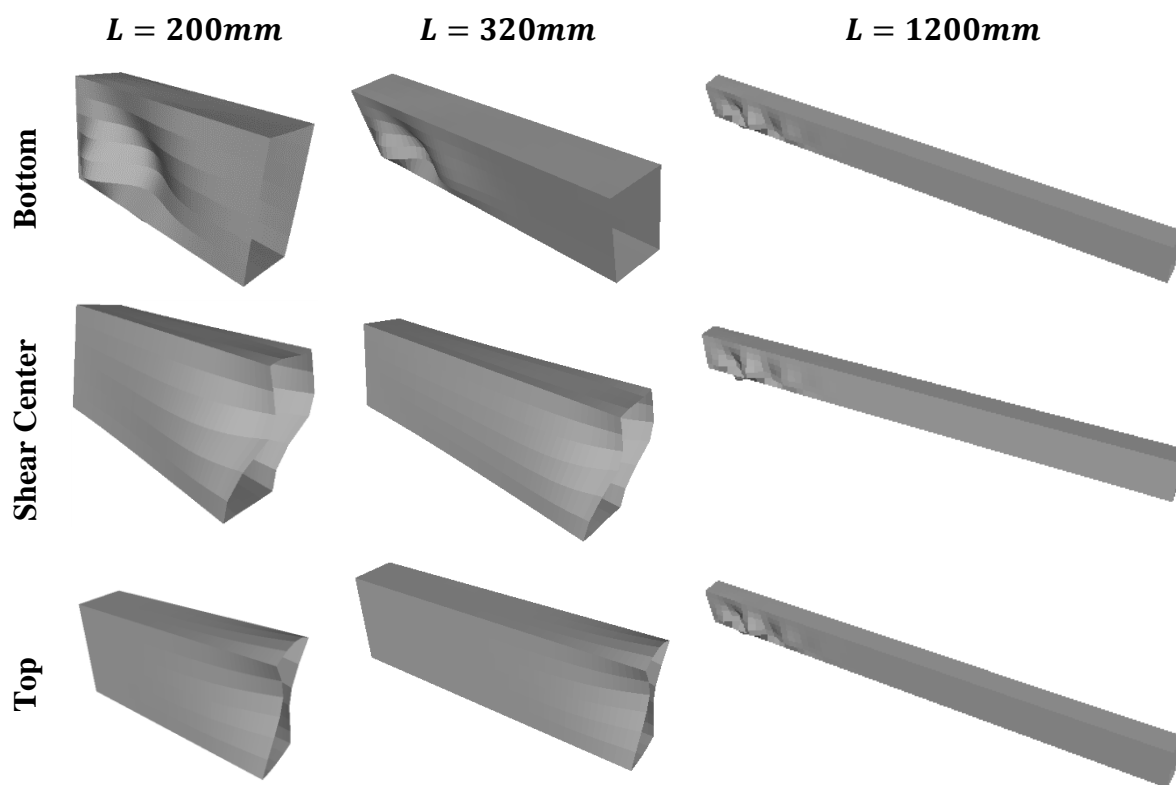


Figura 7. Modos de instabilidade para consolas RHS com  $L = \{200, 320, 1200mm\}$ .

carregamento superior – para vigas mais longas, as cargas críticas são virtualmente independente do nível (vertical) a que a carga é aplicada. Nas vigas mais curtas, movendo-se o ponto de aplicação da carga aplicada para baixo/cima aumenta/diminui o valor  $P_{cr}$ .

- (ii) Os valores das cargas críticas obtidas através do ANSYS, relativas a cargas superiores e inferiores, resultaram em excelente acordo com os valores da GBT, como se pode confirmar na Tabela 1 – de facto, as diferenças obtidas são inferiores a 3%.

Tabela 1. Comparação entre os valores das cargas críticas ( $P_{cr}$ ) das consolas RHS obtidos com o GBTUL e o ANSYS.

			$L$ (mm)						
			120	160	200	320	1200	2000	5000
Top	$P_{cr}$ (kN)	GBTUL	40.91	40.80	40.79	40.84	23.54	13.52	5.24
		ANSYS	40.69	40.59	40.59	40.59	23.38	13.55	5.21
	$\delta$ (GBT/SFEM)		0.53%	0.51%	0.51%	0.63%	0.69%	-0.22%	0.54%
Bottom	$P_{cr}$ (kN)	GBTUL	302.84	215.86	173.39	101.46	23.54	13.52	5.24
		ANSYS	311.93	220.43	175.80	103.08	23.38	13.55	5.21
	$\delta$ (GBT/SFEM)		-2.91%	-2.07%	-1.37%	-1.57%	0.69%	-0.22%	0.54%

- (iii) A figura 7 permite avaliar o impacto da movimentação das cargas aplicadas nas configurações dos modos de instabilidade. No último caso (carregamento inferior) e independentemente do comprimento, a consola sempre instabiliza segundo um modo que envolve deformação local na vizinhança do suporte e, naturalmente, na região junto ao encastramento – este modo de encurvadura combina participações<sup>6</sup> significativas dos modos da GBT **8** (~40%), **10** (~30%), **6** (~20%) (ver Fig. 5). Em relação aos outros casos (carga no centro de corte ou ao nível superior), para comprimentos menores ( $L < 700\text{mm}$ ) obtém-se diferentes naturezas de modo crítico, nomeadamente, (iii<sub>1</sub>) um modo local-distorcional, combinando contribuições dos modos de deformação **7** (~38%), **5** (~35%), **9** (~15%), **12** (~8%) e envolvendo principalmente deformações anti-simétricas na zona de extremidade livre (carga no centro de corte), e (iii<sub>2</sub>) um modo localizado, que ocorre nas regiões da alma perto da extremidade livre (onde as cargas são aplicadas) e as contribuições de modos de deformação **6** (~73%), **8** (~22%), **11** (~3%) (carregamento superior).

- (iv) Enquanto para o carregamento inferior a instabilidade é causada pelas tensões longitudinais normais  $\sigma_{xx}$  compressivas que atuam na metade inferior das secções junto ao encastramento (onde estas tensões são mais elevadas), para os outros casos a instabilidade é despoletada pelas tensões normais transversais de compressão  $\sigma_{ss}$  que

<sup>6</sup> Os valores percentuais indicados após cada modo de deformação GBT são os *fatores de participação modal*, que quantificam a importância relativa de cada um desses modos na configuração do modo de encurvadura da viga. No programa GBTUL 2.0, os fatores de participação modal são calculados como a razão entre as energias de deformação internas associadas (i) à contribuição do modo de deformação sob consideração e (ii) a todo o modo de encurvadura [11].

atuam nas almas da secção de extremidade sob os pontos de aplicação das cargas – note-se que estas tensões são de tração no caso da carga inferior. Estas observações proporcionam uma explicação para as diferenças verificadas entre as 3 curvas para comprimentos pequenos (Fig. 6). Para os comprimentos maiores, as tensões longitudinais normais que atuam nas imediações do encastramento tornam-se dominantes e, portanto, o efeito da posição das cargas deixa de ser relevante.

- (v) As tensões de pré-encurvatura  $\sigma_{xx}^0$ ,  $\sigma_{ss}^0$ ,  $\tau_{xs}^0$  obtidas através do GBTUL e apresentadas na Fig. 8 exibem as características esperadas: (v<sub>1</sub>)  $\sigma_{xx}^0$  variam linearmente ao longo da altura da secção e a sua magnitude aumenta gradualmente da extremidade livre para o encastramento, (v<sub>2</sub>)  $\sigma_{ss}^0$  consistem essencialmente em dois “bolbos”, localizados nas regiões sobre as duas cargas e (v<sub>3</sub>) os valores mais elevados de  $\tau_{xs}^0$  também ocorrem nessas mesmas regiões. Vale ainda a pena mencionar que as correspondentes distribuições de tensões obtidas através do ANSYS não são aqui apresentadas, em virtude dos diferentes tipos de espectro de cores utilizados pelos dois códigos (impedindo uma fácil comparação direta).

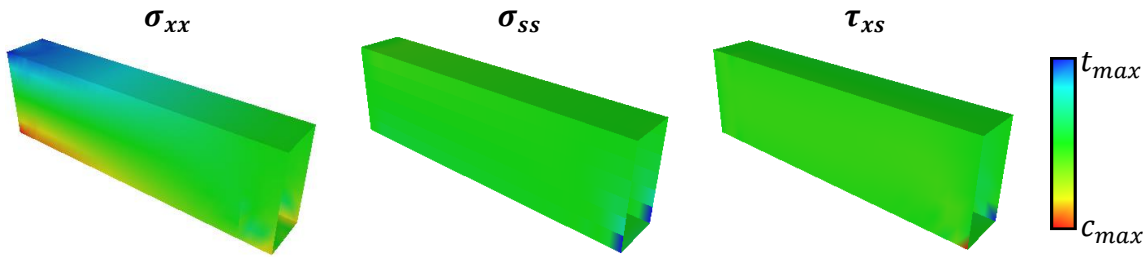


Figura 8. Distribuições de tensões de pré-encurvatura do GBTUL ( $\sigma_{xx}^0$ ,  $\sigma_{ss}^0$ ,  $\tau_{xs}^0$ ) para a consola RHS de  $L = 320\text{mm}$  sujeita a carregamento inferior.

### 3.2. Exemplo 2: Vigas Simplesmente Apoiadas com Secção em I Fechada

As figuras 9(a)-(b) mostram a geometria e a discretização nodal da secção em I de banzos fechados (CIS) considerada neste trabalho. Na figura 10 mostram-se as configurações dos modos de deformação mais importantes (de um total de  $N_d = 60$ ) obtidos após a Análise da Secção – eles são modos (i) de Vlasov (globais **1-3**, distorcionais **6-10** e locais **11-15**), (ii) de corte (de fluxo de corte **4-5**, globais **26-34** e locais **35-36**) e (iii) de extensão transversal (isotrópico **50**, deviatório **51-56** e distorcionais **57-58**).

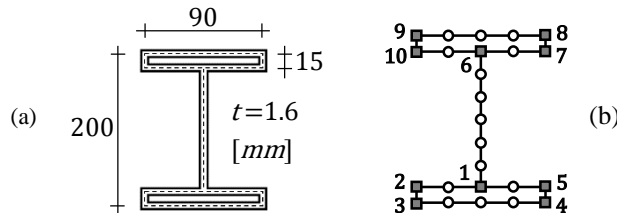


Figura 9. Secção em I com banzos fechados (CIS) (a) geometria e (b) discretização nodal da GBT.

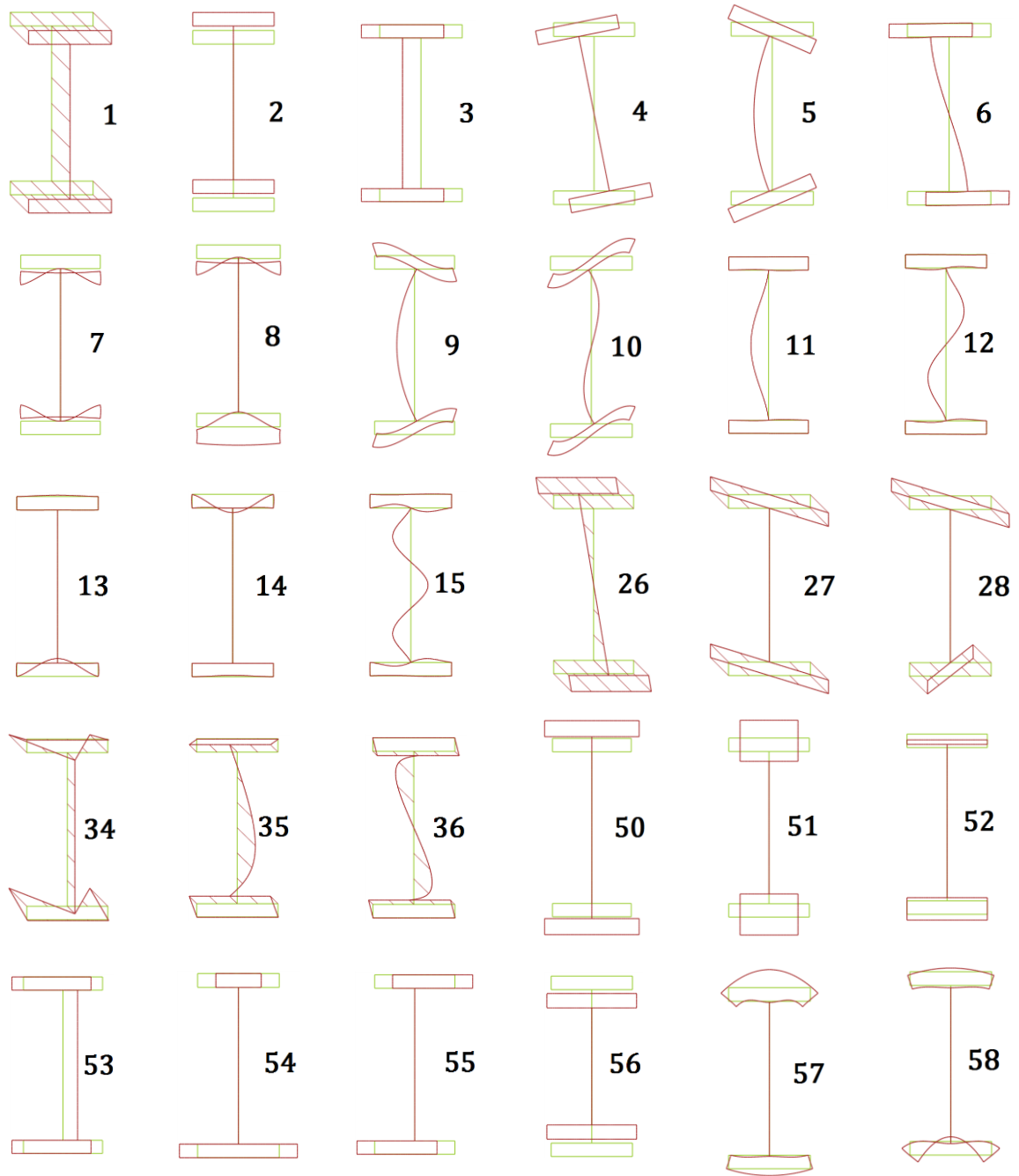


Figura 10. Configurações dos modos de deformação mais relevantes da secção CIS.

A figura 11 mostra as curvas de encurvadura ( $p_{cr} - L$ ) das vigas CIS simplesmente apoiadas sujeitas a cargas uniformemente distribuídas aplicadas em 3 diferentes pontos Fig. 3(b), nomeadamente (i) na intersecção entre a alma e o banzo superior (GBT – Top), (ii) no centro de corte (GBT – SC) e (iii) na intersecção entre a alma e o banzo inferior (GBT – Bottom). A

figura inclui também alguns resultados obtidos através do ANSYS relativos ao carregamento superior (ANSYS – Top) e inferior (ANSYS – Bottom). A Figura 12 ilustra as configurações dos modos de encurvadura, obtidos pelo GBTUL, para vigas com  $L = \{500, 1700, 4000mm\}$  sujeitas aos três diferentes carregamentos. A observação dos resultados apresentados nas Figs. 10 e 11 conduz às seguintes conclusões:

- (i) Tal como nas consolas RHS analisadas anteriormente, as curvas de encurvaduras associadas a carregamento inferior/superior surgem significativamente acima/abaixo da correspondente à carga no centro de corte, para comprimentos menores ( $L < 600mm$ ). Para comprimentos mais longos as três curvas tendem a encontrar-se, mesmo que mantenham uma diferença superior a 5% dentro dos limites do gráfico apresentado. Note-se que, para  $1800 \leq L \leq 3000mm$ , as cargas críticas associadas à carga inferior ou no centro de corte são praticamente coincidentes.
- (ii) A Tabela 2 permite comparar os valores de carga crítica  $p_{cr}$  obtidos pelo GBTUL e pelo ANSYS. Observa-se que, a menos de uma só exceção, as diferenças entre os dois conjuntos de valores nunca ultrapassa 5%. A exceção diz respeito à viga com  $L = 200mm$  sujeita a carregamento inferior, para a qual se obteve uma diferença de cerca de 10%, que se revelou ser devida ao facto de a discretização nodal da GBT não ser suficiente<sup>7</sup>.

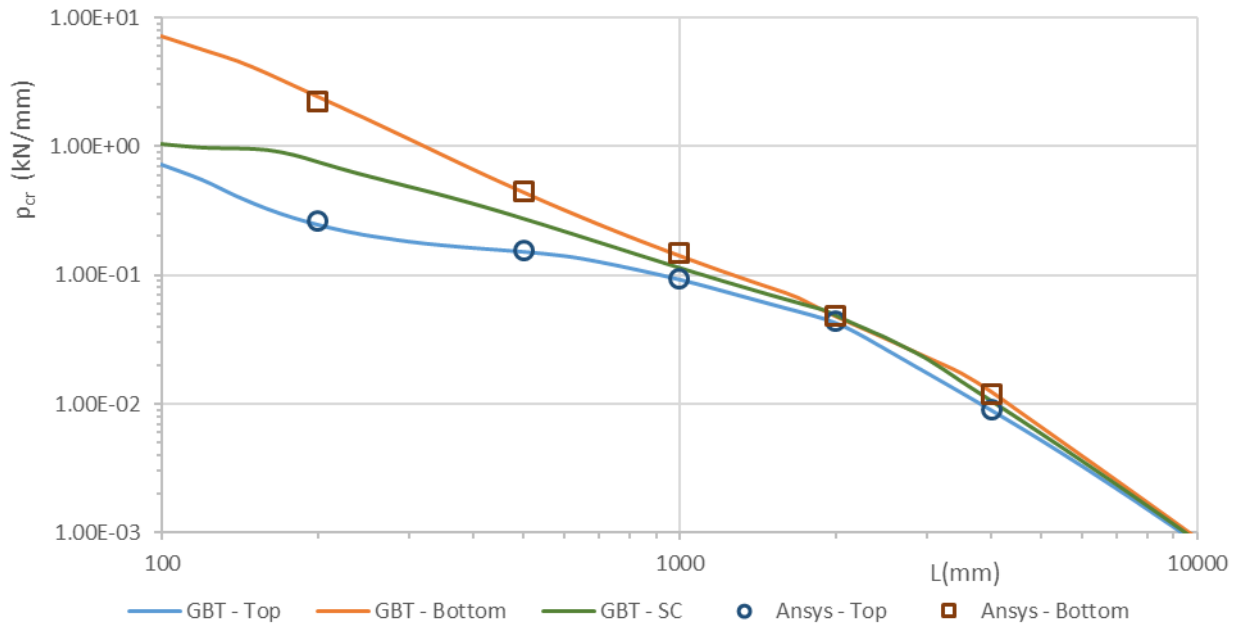


Figura 11. Curvas de encurvadura ( $p_{cr} - L$ ) das vigas CIS, para as 3 posições das cargas.

<sup>7</sup> A discretização nodal adoptada não permite capturar com rigor as deformações localizadas que, para o modo em questão, ocorrem na parta inferior da alma – considerando 7 (em vez de 5) nós intermédios na alma conduz a  $p_{cr} = 2.568kN/mm$  ( $\delta = -1.37\%$ ).

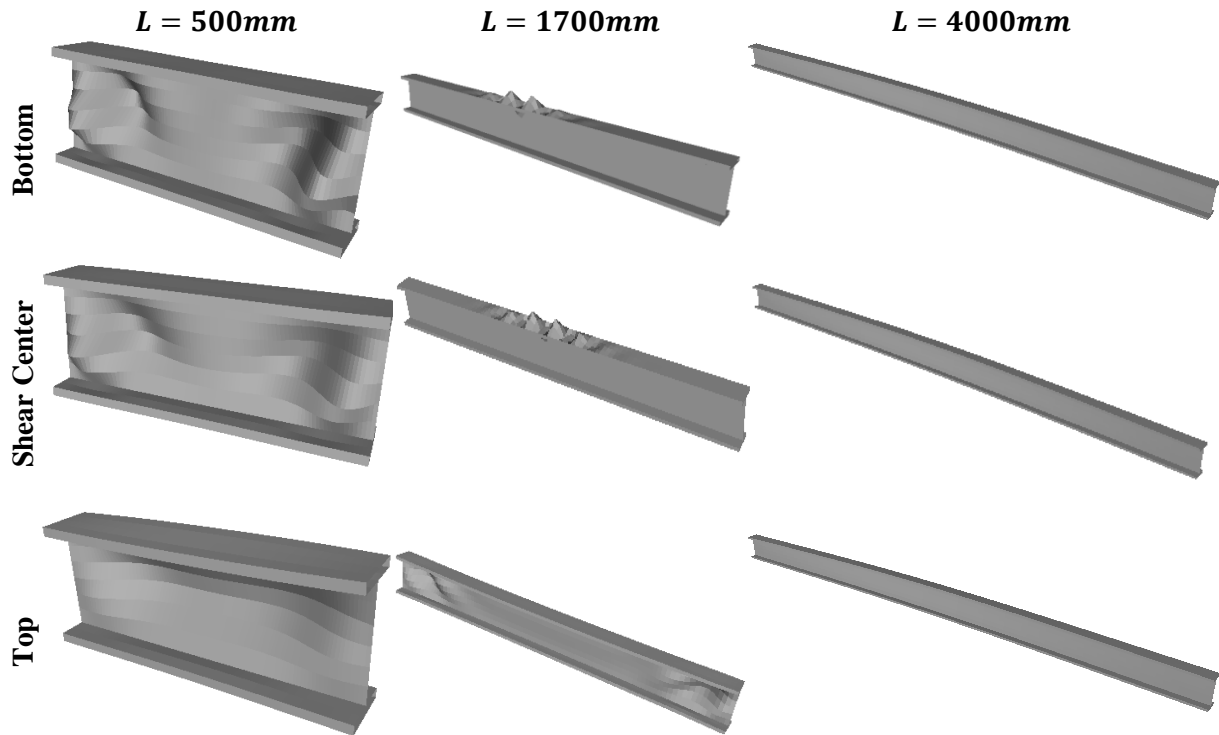


Figura 12. Modos de instabilidade para vigas CIS com  $L = \{500, 1700, 4000\text{mm}\}$ .

Tabela 2. Comparação entre os valores das cargas críticas ( $p_{cr}$ ) das vigas CIS obtidos com o GBTUL e o ANSYS.

			$L \text{ (mm)}$				
			200	500	1000	2000	4000
<i>Top</i>	$p_{cr}$ ( $kN/mm$ )	GBTUL	0.248	0.152	0.092	0.043	0.009
		ANSYS	0.260	0.154	0.095	0.043	0.009
	$\delta$ (GBT/SFEM)		-4.63%	-1.55%	-2.35%	-1.82%	-0.13%
<i>Bottom</i>	$p_{cr}$ ( $kN/mm$ )	GBTUL	2.458	0.442	0.142	0.048	0.013
		ANSYS	2.239	0.445	0.148	0.048	0.012
	$\delta$ (GBT/SFEM)		9.76%	-0.59%	-3.89%	0.26%	4.48%

- (iii) Para  $L < 1700\text{mm}$ , todas as vigas instabilizam em modos que exibem predominantemente deformações de corte nas secções de extremidade (perto dos apoios) e combinam participações dos modos de deformação **11** ( $\sim 70\%$ ), **12** ( $\sim 23\%$ ), **9** ( $\sim 5\%$ ) (ver Fig. 10). Este modo crítico de instabilidade também ocorre para vigas mais longas ( $1800 \leq L \leq 3000\text{mm}$ ) para carregamento superior. No entanto, as mesmas vigas, quando submetidas a carregamento inferior ou no centro de corte, instabilizam em modos locais despoletados

pelas tensões normais longitudinais de compressão que atuam sobre a região de meio-vão da parede superior (topo do banzo superior). Estes modos consistem quase exclusivamente no modo da GBT **14** (~95%) e, uma vez que as referidas tensões de compressão são praticamente independentes do ponto de aplicação da carga, as curvas de encurvadura associadas a carregamento inferior e no centro de corte coincidem para esta gama de comprimentos. Finalmente, as vigas mais longas instabilizam num modo de global de flexão-torção (*i.e.*, instabilidade lateral), apresentando contribuições similares de modos **3** e **4** acompanhados de uma presença, mais ou menos relevante, do modo distorcional **6**. Embora o modo de instabilidade seja idêntico, verifica-se o resultado clássico de que mover o nível de carga aplicada para baixo/cima faz aumentar/diminuir o valor  $p_{cr}$  – para este caso particular, as diferenças encontram-se na faixa de  $5\% < |\delta| < 18\%$ .

#### 4. CONCLUSÃO

A formulação da Teoria Generalizada de Vigas (GBT) desenvolvida por Basaglia & Camotim [5], que torna possível a análise linear de encurvadura de barras de parede fina sujeitas a cargas arbitrárias (incluindo cargas transversais aplicadas fora do eixo dos centros de corte), foi brevemente revista e empregue para estudar o comportamento de instabilidade de vigas com duas geometrias de seção transversal envolvendo células fechadas – a formulação referida nunca antes tinha sido empregue neste contexto (secções fechadas). As vigas analisadas consistem em (i) consolas com secção retangular vazada (RHS) atuadas por duas forças de extremidade transversais e (ii) vigas simplesmente apoiadas com secção em I com banzos fechados (CIS) sujeitas a uma carga uniformemente distribuída – em ambos os casos, as cargas são aplicadas em localizações superior, inferior e ao nível do centro de corte.

A fim de validar a aplicação da formulação GBT às vigas descritas no parágrafo anterior, os resultados baseados na GBT, obtidos com o programa GBTUL 2.0, foram comparados com os valores gerados análises de elementos finitos de casca realizadas com o programa comercial ANSYS. Em todos os casos foi obtida uma excelente correlação entre os dois métodos, independentemente da natureza do modo de encurvadura (local, distorcional, local, corte, flexão-torção), mostrando-se assim que a formulação acima mencionada fornece resultados precisos de encurvadura no contexto de vigas com secções contendo células fechadas. Além disso, demonstrou-se que, como era conhecido ou esperado, a distância entre o ponto de aplicação da carga e o eixo dos centros de corte pode influenciar significativamente (i) a carga de encurvadura e/ou (ii) a natureza/forma do modo de instabilidade da viga, particularmente para comprimentos menores. Tal deve-se ao desenvolvimento de grandes tensões compressivas normais transversais na vizinhança do ponto de aplicação da carga, que podem ser responsáveis pelo desencadeamento de fenómenos de encurvadura diferentes (*p.e.*, instabilidade localizada).

Finalmente, uma última palavra para referir que nenhum dos problemas considerados neste trabalho envolvem tensões tangenciais de pré-encurvadura associadas aos modos de fluxo de corte **4** e **5** (ver Fig. 13 (b) e note que o modo **4** representa a torção da secção). A fim de verificar se a presente formulação da GBT também fornece resultados precisos de encurvadura nestes casos especiais, é necessário analisar barras com formas de secção transversal e cargas tais



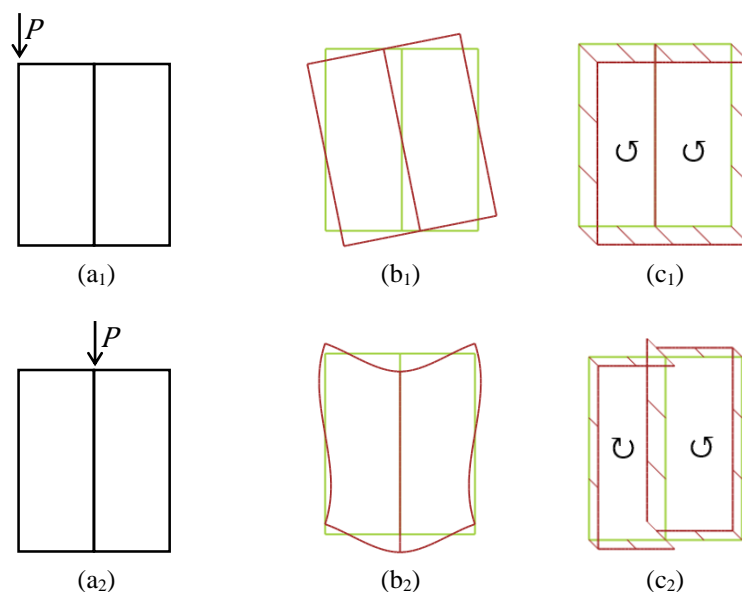


Figura 13. Secção RHS bicelular (a) carregamentos que causam fluxos de corte na pré-encurvadura: (a<sub>1</sub>) torção e (a<sub>2</sub>) distorção; (b<sub>1</sub>)-(b<sub>2</sub>) deformações no plano e (c<sub>1</sub>)-(c<sub>2</sub>) fluxos de corte envolvidos nos modos da GBT **4-5**.

como os representados nas Figs. 13 (a), relativas a uma secção RHS bi-celular submetida a cargas transversais, atuando ao nível de uma alma lateral ou da alma central. No primeiro caso, que envolve torção, uma parte das tensões tangenciais de pré-encurvadura são representadas por ambos os modos de **4** e **5**, cujos fluxos de corte são apresentados nas Figs. 13(c). No segundo caso, onde não está envolvida a torção, surgem tensões tangenciais associadas apenas ao modo **5**. Os autores estão presentemente a investigar a aplicação da formulação GBT a este tipo de problemas – os resultados deste trabalho de investigação serão divulgados em um futuro próximo.

## AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece o apoio financeiro prestado pela FCT (*Fundação para a Ciência e Tecnologia* – Portugal), através da Bolsa de Pós-Doutoramento nº SFRH/BPD/98111/2013.

## REFERÊNCIAS

- [1] N. Murray, *Introduction to the Theory of Thin-Walled Structures*, Clarendon Press, Oxford, (1984).
- [2] R. Schardt, *Verallgemeinerte Technische Biegetheorie*, Springer-Verlag, Berlin, (1989). (em Alemão)
- [3] D. Camotim, C. Basaglia, N.F. Silva e N. Silvestre, “Numerical analysis of thin-walled structures using Generalised Beam Theory (GBT): recent and future developments”, *Computational Technology Reviews*, Vol. 1, Topping, B., Adam, J., Pallarés, F., Bru, R., M Romero (eds.), Saxe-Coburg Publications, Stirlingshire, pp. 315-354, (2010).

- [4] D. Camotim, C. Basaglia, R. Bebiano, R. Gonçalves e N. Silvestre, “Latest developments in the GBT analysis of thin-walled steel structures”, *Proceedings of International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures Stability (SDSS’Rio – Rio de Janeiro, 8-10/9)*, E. Batista, P. Vellasco, L. Lima (eds.), pp. 33-58, (2010).
- [5] C. Basaglia e D. Camotim, “Enhanced Generalised Beam Theory buckling formulation to handle transverse load application effects”, *International Journal of Solids and Structures*, **50**(3-4), pp. 531-547, (2013).
- [6] R. Gonçalves, R. Bebiano e D. Camotim, “On the shear deformation modes in the framework of Generalised Beam Theory”, *Thin-Walled Structures*, **84**(November), pp. 325-334, (2014).
- [7] R. Bebiano, R. Gonçalves e D. Camotim, “A cross-section analysis procedure to rationalise and automate the performance of GBT-based structural analyses”, *Thin-Walled Structures*, **92**(July), pp. 29-47 (2015).
- [8] R. Gonçalves, M. Ritto-Corrêa e D. Camotim, “A new approach to the calculation of cross-section deformation modes in the framework of Generalized Beam Theory”, *Computational Mechanics*, **46**(5), pp. 759-781, (2010).
- [9] R. Bebiano, R. Gonçalves e D. Camotim, *GBTUL 2.0 – Buckling and Vibration of Thin-Walled Members*, available at <http://www.civil.ist.utl.pt/gbt/>, (2014).
- [10] R. Bebiano, R. Gonçalves e D. Camotim, “GBTUL 2.0 – a freeware computer code for the buckling and vibration analysis of thin-walled members”, submitted for publication, (2015).
- [11] SAS (Swanson Analysis Systems Inc.), Ansys Reference Manual, v.12, (2009).
- [12] R. Bebiano, N. Silvestre e D. Camotim, “GBT formulation to analyze the buckling behavior of thin-walled members subjected to non-uniform bending”, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **7**(1), pp. 23-54, (2007).

## ANEXO A

As componentes das matrizes de rigidez linear/geométrica da secção são dadas por

$$C_{ik} = \int_S \frac{Et}{1-\nu^2} u_i u_k ds + \int_S \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} w_i w_k ds, \quad (A.1)$$

$$B_{ik} = \int_S \frac{Et}{1-\nu^2} v_{i,s} v_{k,s} ds + \int_S \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} w_{i,ss} w_{k,ss} ds, \quad (A.2)$$

$$D_{ik} = \int_S Gt(u_{i,s} + v_i)(u_{k,s} + v_k) ds + \int_S \frac{Gt^3}{3} w_{i,s} w_{k,s} ds, \quad (A.3)$$

$$E_{ik} = \int_S \frac{\nu Et}{1-\nu^2} u_i v_{k,s} ds + \int_S \frac{\nu Et^3}{12(1-\nu^2)} w_i w_{k,ss} ds, \quad (A.4)$$

$$X_{jik}^{\sigma-x} = \int_S \frac{Et}{1-\nu^2} u_j (v_i v_k + w_i w_k) ds, \quad (A.5)$$

$$X_{jik}^{\sigma-xP} = \int_S \frac{\nu Et}{1-\nu^2} v_{j,s} (v_i v_k + w_i w_k) ds, \quad (A.6)$$

$$X_{jik}^{\sigma-SP} = \int_S \frac{\nu Et}{1-\nu^2} u_j w_{i,s} w_{k,s} ds \quad , \quad (\text{A.7})$$

$$X_{jik}^{\sigma-S} = \int_S \frac{Et}{1-\nu^2} v_{j,s} w_{i,s} w_{k,s} ds \quad , \quad (\text{A.8})$$

$$X_{jik}^{\tau} = \int_S Gt(u_{j,s} + v_j)(v_{i,s} v_k + w_{i,s} w_k) ds \quad , \quad (\text{A.9})$$

onde (i)  $E$ ,  $G$ ,  $\nu$  são os módulos de elasticidade e de distorção do material (isotrópico), e o respetivo coeficiente de Poisson, (ii) os índices  $i$ ,  $j$ ,  $k$  cobrem o conjunto dos modos de deformação  $(1, \dots, N_d)$  e (iii)  $S$  é o domínio da linha média da secção. O primeiro e segundo termos de (A.1)-(A.6) correspondem a propriedades de membrana e de flexão, respetivamente.