

## ADECUACIÓN PARA FABRICACIÓN DE ESTRUCTURAS ÓPTIMAS BASADO EN ESQUELETONIZACIÓN

Mendoza-San-Agustín, Asahel<sup>1\*</sup>, Velázquez-Villegas, Fernando<sup>2</sup>

1: Laboratorio de Mecánica Computacional  
Posgrado de Ingeniería  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Ciudad Universitaria, México D.F. C.P. 04510  
e-mail: asahel\_m@comunidad.unam.mx

2: Centro de Alta Tecnología  
Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Ciudad Universitaria, México D.F. C.P. 04510  
e-mail: fernvel@unam.mx

**Palabras clave:** Esqueletonización, Optimización topológica, Adecuación topológica

**Resumen** *En este trabajo se propone un algoritmo de adecuación de una solución topológica óptima a partir del proceso de esqueletonización. El objetivo es obtener la representación de una estructura equivalente a la óptima topológica cuya fabricación sea sencilla al utilizar perfiles de sección transversal comercial que sustituyan la distribución del material de la solución. Con el proceso de esqueletonización es posible obtener la representación mínima de una imagen binaria sin perder la topología de la misma. Al aplicarlo a la imagen binaria de una solución estructural topológica se obtienen trayectorias que definen a la estructura como una conexión de líneas no rectas. El algoritmo de adecuación convierte a éstas en líneas rectas con el objetivo de transformar la geometría obtenida en un marco estructural construido con perfiles comerciales. El proceso de adecuación continúa con un subproceso de optimización de forma en el que las dimensiones óptimas de los perfiles son determinadas.*

### 1. INTRODUCCIÓN

La utilización de los métodos de optimización topológica para la solución de problemas estructurales se ha vuelto necesaria debido a la posibilidad de obtener diseños ligeros y de alta resistencia, es decir, el diseñador de ingeniería busca un ahorro de material sin sacrificar la seguridad de la estructura.

Sin embargo, las soluciones óptimas obtenidas a partir de los métodos de optimización estructural topológica generan geometrías complejas que dificultan su manufactura. Por tal motivo el diseñador de ingeniería necesita realizar una adecuación de los resultados óptimos

al trazar trayectorias sobre la distribución del material para llevar a cabo una sustitución con geometrías de fácil manufactura. No obstante, dicha adecuación depende fuertemente del criterio del diseñador ya que tentativamente se establecen las trayectorias que son sustituidas por un elemento estructural, perdiéndose varias de las características que hacen que la solución sea óptima; volviéndose un proceso intuitivo e iterativo.

La distribución de material de una solución topológica está relacionada con su funcionalidad estructural, lo cual significa que el material se orienta en las áreas donde el esfuerzo es mayor; por tal motivo es posible interpretar una solución topológica mediante trayectorias. A partir de la distribución, los diseñadores generan líneas sobre el dominio de diseño para hacer una interpretación que posteriormente se define en un modelo CAD (Computer Aided Design por sus siglas en inglés).

De esta manera el proceso de adecuación se vuelve subjetivo, variando de un diseñador a otro, imposibilitando obtener la misma solución de manufactura y perdiéndose la repetibilidad del proceso. Es por esta razón que se han desarrollado algunos métodos basados en algoritmos computacionales para definir geometrías regulares a partir de un resultado de optimización estructural topológica.

Chyi-Yeu y Shin-Hong [1], Ming-Hsiu y Yeh-Liang [2] y Yeh-Liang, Ming-Sho y Chuan-Tang [3] presentan procesos automáticos para interpretar resultados topológicos, con este tipo algoritmos, las irregulares geométricas son minimizadas. El objetivo de estos métodos es suavizar las irregularidades de la solución óptima tratando de interpretar la distribución del material con geometrías simples, sin embargo, esta geometría es aún difícil de manufacturar.

La motivación del presente trabajo surge al contribuir en la solución del problema de adecuación para la fabricación de estructuras óptimas presentando un método basado en un algoritmo computacional en el cual el proceso se realice de manera automática, obteniéndose una representación mediante trayectorias rectas que puedan ser sustituidas fácilmente con perfiles de geometría regular o incluso con perfiles comerciales.

El método de adecuación propuesto se basa en la aplicación del proceso de esqueletonización (skeletonization en inglés) el cual es una herramienta utilizada en el procesamiento de imágenes. Con esta herramienta es posible obtener una representación de la estructura como una imagen binaria (en blanco y negro o 1's y 0's) y transformarla en una representación mínima que preserva la topología de la imagen original. Una vez generado el esqueleto (skeleton en inglés) de la imagen corresponde identificar los vértices de cruce de las trayectorias e identificar las conectividades entre ellos. De esta manera es posible generar las líneas rectas que conectan a la estructura, las cuales finalmente son sustituidas con elementos estructurales de geometría regular. Al final del proceso se obtiene una adecuación de la solución óptima la cual es sometida a un subproceso de optimización de tamaño en la que las dimensiones óptimas de los elementos estructurales son determinadas.

A lo largo del trabajo se utilizará el problema de la viga en voladizo para ejemplificar el método de adecuación propuesto y únicamente se estudiarán las estructuras contenidas en el plano.

## 2. ESQUELETONIZACIÓN

El proceso de esqueletonización consiste en el adelgazamiento del objeto de una imagen binaria hasta que su ancho sea de un pixel. El conjunto de trayectorias obtenidas al final del proceso es conocido como esqueleto, el cual conserva las propiedades topológicas que caracterizan a la geometría del objeto inicial, es decir, conserva las líneas base y conexiones que caracterizan a la geometría.

El proceso consiste en transformar los pixeles de la frontera del objeto de la imagen en pixeles del fondo hasta obtener un subconjunto de arcos y curvas simétricamente ubicadas respecto a los bordes del objeto.

Para la aplicación del proceso de esqueletonización sobre un resultado topológico óptimo, es necesario transformar éste en una representación como imagen binaria, es decir, en un conjunto de ceros y unos, donde los ceros representan el fondo de la imagen y los unos el objeto de la imagen (ver Figura 1).

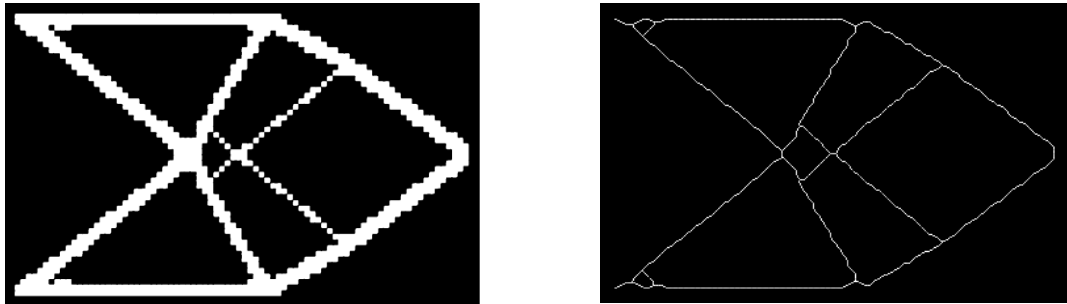


Figura 1. Optimización de la viga en voladizo. Imagen binaria (a la izquierda) y su esqueleto (a la derecha)

## 3. LOCALIZACIÓN DE VÉRTICES

Una vez obtenido el esqueleto de la solución topológica, es necesario identificar los vértices donde las trayectorias intersectan. Para esto es necesario interpretar a la imagen binaria del esqueleto como una matriz compuesta de unos y ceros.

Se considerará un vértice a aquel pixel donde tres o más trayectorias converjan. Para la identificación de los vértices se construye una matriz de 3x3 (Figura 2) centrada en cada pixel del esqueleto (pixel con valor igual a 1) y se suman los valores adyacentes a dicho pixel. Si la suma es igual o mayor a tres, el pixel se considera como vértice; esto quiere decir que tres o más trayectorias convergen en el mismo pixel. Este proceso se repite hasta encontrar todos los vértices del esqueleto.

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & \mathbf{P_{22}} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$$

Figura 2. Matriz de 3x3 centrada en un pixel  $\mathbf{P_{22}}$  de valor 1

Existen dos casos en donde un vértice necesita ser considerado: el inicio o el final de una trayectoria de esqueleto y cuando existen condiciones de frontera, es decir, cargas y restricciones. En el primero de ellos la suma de los pixeles adyacentes es igual a 1, mientras que el segundo, el vértice debe ser especificado por el usuario.

Al aplicar el algoritmo para identificar los vértices del esqueleto, se genera una vecindad de pixeles que cumplen con la condición de vértice. Tal vecindad no es deseable pues es necesario identificar vértices únicos para establecer las trayectorias rectas. Para corregir este resultado es necesario incluir otro proceso en el algoritmo el cual está basado en el cálculo del centroide de una geometría plana.

Se construye una matriz de 3x3 centrada en cada vértice  $V$  y se define un sistema coordenado local (Figura 3). Las coordenadas locales del nuevo vértice se calculan con las siguientes expresiones:

$$\bar{X} = \frac{\sum iV_x}{\sum V_i}; \quad \bar{Y} = \frac{\sum iV_y}{\sum V_i} \quad (1)$$

donde  $i = 1, 2, 3$ .  $V_x$  y  $V_y$  representa el número de vértices a una distancia  $i$  en la dirección  $x$  y  $y$  respectivamente .

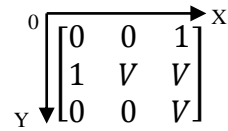


Figura 3. Sistema de coordenadas local

#### 4. CONECTIVIDAD DE VÉRTICES

Una vez identificados los vértices del esqueleto, corresponde encontrar la conectividad de cada uno de ellos para sustituir las trayectorias de esqueleto con líneas rectas. Para tal efecto es necesario definir una matriz de 3x3 centrada en un vértice (vértice inicial). Ésta identificará pixeles adyacentes con valor igual a 1, los cuales indican el inicio de las trayectorias que convergen en dicho vértice.

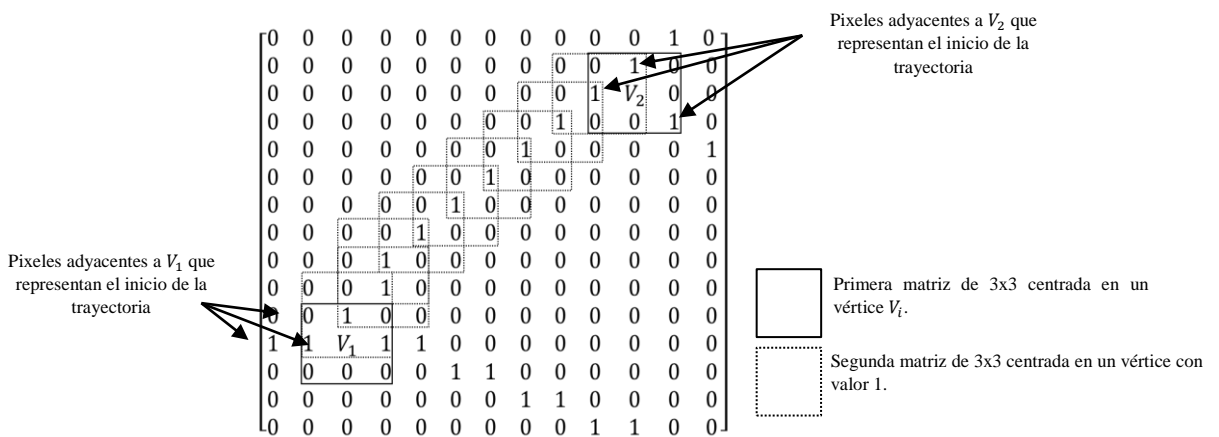


Figura 4. Ejemplificación de la conectividad entre los vértices  $V_1$  y  $V_2$

Se construye una segunda matriz de 3x3 centrada en uno de los píxeles de valor 1 encontrados con la matriz anterior. Si uno de sus elementos adyacentes de la matriz contiene un vértice, se establece la conectividad entre el vértice inicial y el vértice encontrado y la matriz es centrada en el siguiente píxel de valor 1 adyacente al vértice inicial (píxeles de valor 1 de la primera matriz); de otra manera la matriz evalúa los valores adyacentes del siguiente vértice de valor 1 hasta que otro vértice sea encontrado (ver ejemplificación en Figura 4).

Al tomar la posición de cada uno de los vértices como coordenadas cartesianas, es posible conectarlos mediante líneas rectas según su conectividad. De esta manera el resultado de la optimización estructural topológica quedará representado por un conjunto de líneas rectas denominado *skeleton-structure* que fácilmente pueden sustituirse con un perfil de geometría regular (Figura 5).

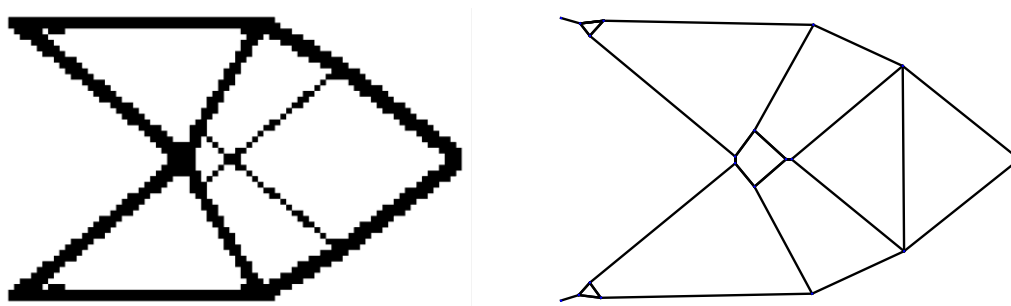


Figura 5. Viga en voladizo. Optimización estructural (a la izquierda) y su skeleton-structure (a la derecha)

## 5. ALGORITMO DE DISTANCIA MÍNIMA

Al obtenerse el skeleton-structure de una solución óptima, pueden generarse miembros de corta longitud que dificultan la manufactura de la estructura, por tal razón se introduce un algoritmo de distancia mínima para suprimir aquellos miembros no deseados en el skeleton-structure.

El algoritmo consiste en calcular la longitud de cada línea recta del skeleton-structure. Se construirá una matriz en los vértices de aquellas líneas cuya longitud sea menor al valor de distancia mínima especificado por el usuario, teniendo un tamaño del doble del valor de la distancia mínima (traducido a píxeles) para tomar en cuenta todos los vértices que se encuentren en la vecindad del vértice de la línea.

Se calcula un nuevo vértice dentro de la matriz a partir de la ecuación (1). Teniendo en cuenta que el tamaño de la matriz es del doble del valor de distancia mínima, se recalcula la distancia entre vértices para omitir aquellos que estén por arriba de dicho valor. El proceso se repite hasta que se encuentra un único vértice, al cual serán conectadas las líneas rectas que compartían alguna conectividad con los vértices suprimidos.

Al término del algoritmo todas las líneas del skeleton-structure que no cumplen con el valor de distancia mínima son suprimidas a un solo punto. En la Figura 6 se muestra el skeleton-structure de la viga en voladizo al aplicar el algoritmo de distancia mínima.

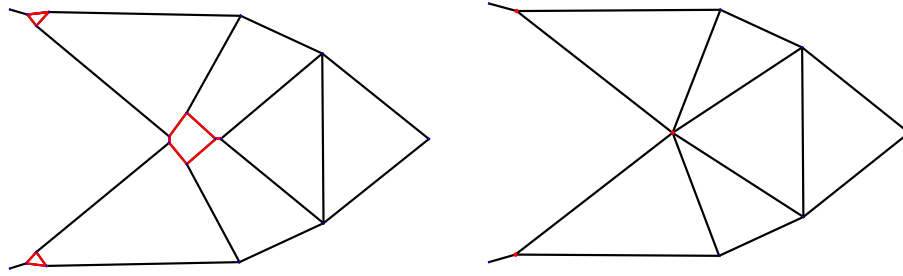


Figura 6. Viga corta en voladizo. (A la izquierda) Skeleton-structure antes de aplicar el algoritmo de distancia mínima. Los miembros en color rojo son aquellos cuya distancia es menor a la especificada por el usuario. (A la derecha) Skeleton-structure después de aplicar el algoritmo de distancia mínima

## 6. AJUSTE AL DOMINIO DE DISEÑO

Al definirse el skeleton-structure es necesario realizar algunas modificaciones para ajustarlo al dominio de diseño. Para realizarlo se identifica mediante líneas rectas la frontera del dominio y se especifica un valor  $\varepsilon$ , el cual se utiliza para comparar la distancia de cada uno de los puntos del skeleton-structure con cada línea de la frontera. Aquellos puntos que se encuentran a una distancia menor o igual a  $\varepsilon$  se trasladan a la frontera del dominio al modificar su coordenada  $x$  o  $y$  según corresponda (Figura 7).

Este algoritmo, aparte de ajustar el skeleton-structure al dominio de diseño, es útil para realizar una adecuación más cercana al resultado topológico óptimo, ya que se tiene libertad en modificar el valor de  $\varepsilon$  y trasladar a la frontera los puntos deseados.

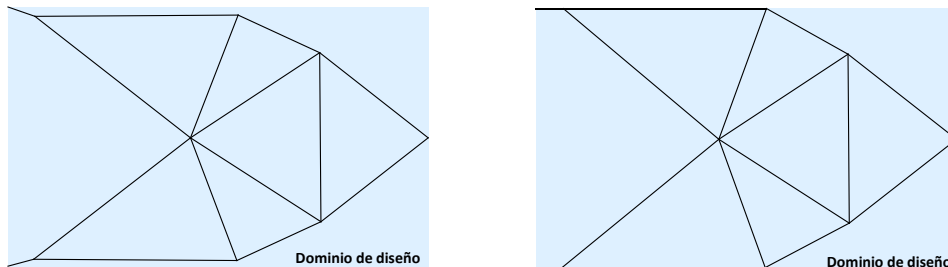


Figura 7. Skeleton-structure antes de ajustarlo al dominio de diseño (a la izquierda) y skeleton-structure después de ajustarlo al dominio de diseño al especificar un valor  $\varepsilon$  (a la derecha). Obsérvese la similitud con el resultado de la optimización estructural topológica de la Figura 5

## 8. CASOS DE ESTUDIO

En la Tabla 1 se resumen los pasos del proceso de adecuación propuesto de la viga en voladizo y se incluyen otros casos de estudio a manera de ejemplificación del método: la solución óptima de la del problema de la estructura de Michell y la solución óptima de la estructura de un puente.

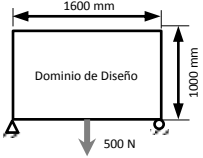

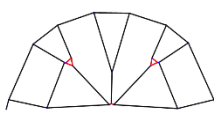
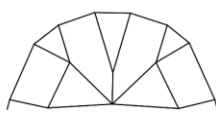
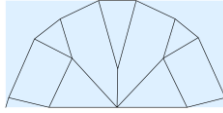
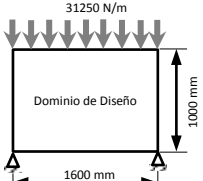

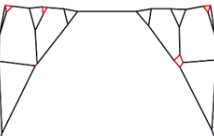
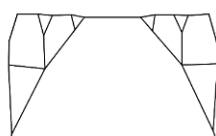

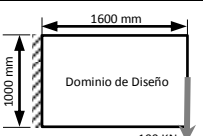

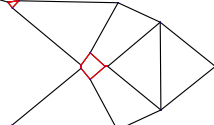
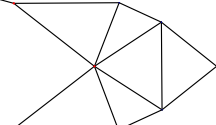

Casos de estudio	Estructura óptima	Skeleton-Structure (Antes de distancia mínima)	Skeleton-Structure (Después de distancia mínima)	Skeleton-Structure Ajustado al dominio de diseño
				
				
				

Tabla 1. Aplicación del método de adecuación a diferentes casos de estudio

### 8.1. Optimización de tamaño

El siguiente paso en el proceso de adecuación es la selección de un perfil de sección transversal de geometría regular (que puede ser una sección comercial) de dimensiones arbitrarias, el cual es propuesto por el usuario. El subproceso de optimización de tamaño dará como resultado las dimensiones de la sección transversal óptimas para las condiciones de carga de la estructura.

Una vez obtenido el skeleton-structure se realiza una transformación de sus líneas recatas a elementos finitos de una dimensión, a partir de sus puntos y la conectividad entre líneas. Para la optimización de forma se establecen como variables de diseño las dimensiones de la sección transversal con valores iniciales arbitrarios y se fija una función objetivo, por ejemplo maximizar la rigidez de la estructura. Al concluirse el proceso de optimización se obtienen las dimensiones óptimas de la sección transversal, y en el caso que se desee utilizar un perfil comercial, se selecciona aquel cuyas dimensiones sean más cercanas a los valores óptimos. De esta manera se termina el proceso de adecuación, lográndose obtener una geometría de fácil manufactura sin comprometer la seguridad de la estructura.

## 12. CONCLUSIONES

El algoritmo de adecuación presentado en este trabajo muestra la ventaja de ser un método automático, el cual no depende del criterio del diseñador y el proceso es repetible.

Cumple la principal función de transformar la solución topológica óptima, no manufacturable, en una representación geométrica simple totalmente manufacturable. Por tal razón se puede concluir que el proceso de esqueletonización es útil para adecuar estructuras topológicas óptimas.

Aun cuando la eskeletonización puede generar trayectorias no deseadas que complican la adecuación, es posible corregirlas con el algoritmo de distancia mínima y el algoritmo de ajuste al dominio de diseño. Procesos en los cuales es necesaria la interacción con el usuario. Al ser el skeleton-structure un conjunto de líneas es posible analizarlo directamente mediante el método de los elementos finitos para conocer su comportamiento estructural al fijar una sección transversal. Lo que representa una gran ventaja, ya que paralelamente se puede llevar a cabo la optimización de tamaño de los elementos estructurales.

Es importante mencionar que para las estructuras adecuadas, al modelarse en elementos finitos, se consideran uniones rígidas entre los miembros estructurales, por lo cual las estructuras adecuadas son tipo marco plano.

## AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la UNAM-DGAPA por los apoyos para realizar esta investigación a través de los proyectos PAPIIT-IN113315 “Mecánica computacional y optimización como línea de investigación en el diseño mecánico” y PAPIME-PE104315 “Fortalecimiento del proceso enseñanza-aprendizaje del comportamiento mecánico de los materiales por medio de TIC”

## REFERENCIAS

- [1] L. Chyi-Yeu y L. Shin-Hong, “Artificial neural network based hole image interpretation techniques for integrated topology and shape optimization”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n° 194, pp. 3817-3837, (2005).
- [2] . H. Ming-Hsiu y H. Yeh-Liang, “Interpreting three-dimensional structural topology optimization results”, *Computers & Structures*, n° 83, pp. 327-337, 2005.
- [3] H. Yeh-Liang, H. Ming-Sho y C. Chuan-Tang, “Interpreting results from topology optimization using density contours”, *Computers & Structures*, n° 79, pp. 1049-1058, 2001.
- [4] G. Sanniti di Baja, “Skeletonization of Digital Objects”, de 11th Iberoamerican Congress in Pattern Recognition, CIARP 2006, Cancún, pp. 1-13, (2006).