

DISTORÇÃO EM SECÇÕES DE PAREDE FINA ABERTA SIMÉTRICAS E PERIÓDICAS

R. Gonçalves^{1*} e D. Camotim²

1: CERis, ICIST, Departamento de Engenharia Civil
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Nova de Lisboa
2829-516 Caparica, Portugal
e-mail: rodrigo.goncalves@fct.unl.pt

2: CERis, ICIST DECivil
Instituto Superior Técnico
Universidade de Lisboa
Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Portugal
e-mail: dcamotim@civil.ist.utl.pt

Palavras chave: Barras de parede fina, distorção, simetria de reflexão, simetria de rotação, periodicidade, Teoria Generalizada de Vigas (GBT)

Resumo. Neste artigo investiga-se a mecânica da distorção em barras de parede fina com secção transversal aberta exibindo simetria e/ou periodicidade. Recorre-se à Teoria Generalizada de Vigas (GBT, sigla da sua designação em língua inglesa) para determinar os modos de deformação distorcionais da secção e extrair conclusões relativamente ao problema em análise. Além de rever o caso bem conhecido da simetria de reflexão, abordam-se as implicações da simetria de rotação e da periodicidade por translação e reflexão deslizante ao longo de uma linha reta. Em cada caso, são fornecidos procedimentos computacionalmente eficientes para obter as configurações dos modos de deformação. Apresentam-se vários exemplos, com o intuito de permitir uma melhor compreensão dos conceitos e procedimentos abordados.

1 INTRODUÇÃO

É bem conhecido que a análise estrutural de um sistema simétrico pode ser baseada em subestruturas, mais simples, o que permite reduzir significativamente o número de graus de liberdade e, simultaneamente, compreender melhor o comportamento estrutural do sistema. Este último aspeto é particularmente importante no caso de barras de parede fina, dado que as simplificações podem ajudar a compreender os complexos fenómenos de deformação da secção. De facto, as secções de parede fina exibem frequentemente simetria, o que as torna candidatas ideais para este tipo de abordagem.

É também bem conhecido que a distorção da secção transversal — um modo de deformação que envolve o empenamento e a deformação da secção no seu plano — desempenha um papel importante no comportamento estrutural de barras de parede fina. Este tipo de modo de deformação tem sido objeto de intensa investigação no domínio da estabilidade de perfis de aço enformados a frio, nomeadamente com secção em C e Z com reforços, em “hat” e “rack” (ver, por exemplo [1], Capítulo 13). Neste contexto, a Teoria Generalizada de Vigas (GBT [2, 3]) tem vindo a afirmar-se como uma ferramenta de análise estrutural extremamente eficiente e clarificadora, devido à sua capacidade de permitir incluir/excluir efeitos específicos de uma forma fácil e simples. Em particular, a GBT conduz muitas vezes a soluções analíticas ou semi-analíticas, as quais permitem extrair conclusões únicas e detalhadas acerca do comportamento estrutural de barras de parede fina.

O procedimento de simplificação de simetria de reflexão para a GBT é descrito em [2] e tem sido utilizado em aplicações numéricas (e.g., [4, 5]) e na derivação de fórmulas analíticas para a distorção de secções em C e Z [2, 3, 6]. Recentemente, a simetria de rotação de tubos poligonais regulares foi investigada em [7, 8, 9, 10]. Este artigo explora as implicações da simetria e periodicidade da secção transversal nas características dos modos de deformação distorcionais de secções de parede fina aberta, utilizando a GBT. Para além de rever o caso bem conhecido da simetria de reflexão, abordam-se as implicações da simetria de rotação e da periodicidade por translação e reflexão deslizante. Em cada caso, são fornecidos procedimentos computacionalmente eficientes para obter as configurações dos modos distorcionais.

2 MODOS DISTORCIONAIS PARA SECÇÕES ABERTAS

Utiliza-se uma notação semelhante à definida em trabalhos anteriores [4, 11], com matrizes representadas com letras maiúsculas em negrito e vetores com letras minúsculas a negrito. Para além disso, (x, y, z) designam os eixos locais de cada parede, tal como mostra a Fig. 1(a), a vírgula indica uma derivada ($f_{,x} = df/dx$) e os índices superiores M e F distinguem termos de membrana e flexão, respetivamente. As componentes do deslocamento do plano médio de cada parede ($z = 0$), no referencial local, são dadas por

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^D \bar{u}_k(y) \phi_{k,x}(x), \quad (1)$$

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^D \bar{v}_k(y) \phi_k(x), \quad (2)$$

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^D \bar{w}_k(y) \phi_k(x), \quad (3)$$

onde D representa o número de modos de deformação, $\bar{u}_k(y)$, $\bar{v}_k(y)$, $\bar{w}_k(y)$ são as componentes dos modos de deformação segundo x , y , z , respetivamente, e $\phi_k(x)$ são as respetivas

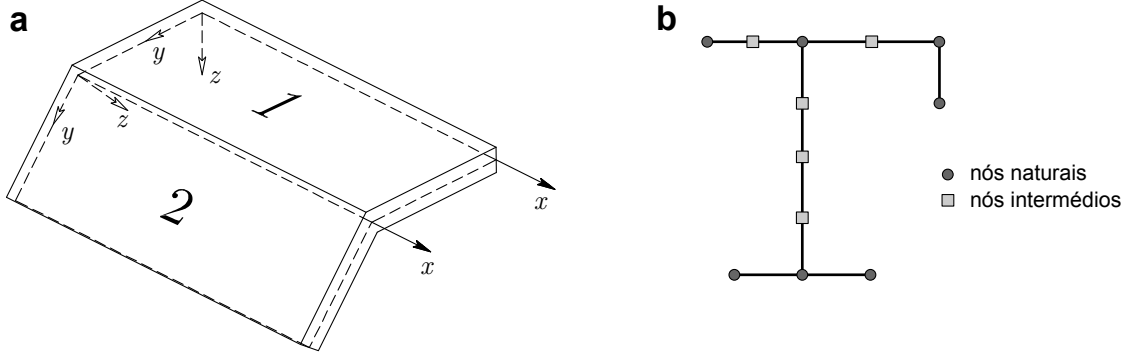


Figura 1: (a) Eixos locais de cada parede numa barra de parede fina. (b) Discretização da secção da GBT.

funções de amplitude ao longo do eixo da barra (x), as quais constituem as incógnitas do problema. As componentes de deslocamento para $z \neq 0$ são obtidas admitindo válida a hipótese de Kirchhoff. Os modos de deformação são determinados através de um procedimento que envolve analisar a secção como um pórtico plano, cujos graus de liberdade correspondem aos deslocamentos dos nós (ver Fig. 1(b)): (i) “naturais”, localizados nas intersecções de paredes e extremidades livres, e (ii) “intermédios”, definidos pelo utilizador e posicionados entre nós naturais, com o objetivo de atingir um determinado nível de discretização. Como os modos distorcionais são obtidos apenas a partir dos nós naturais, os nós intermédios não são abordados neste trabalho.

Para secções de parede fina aberta, de acordo com a abordagem clássica da GBT [2], é normalmente aceitável desprezar as distorções de membrana e as extensões transversais de membrana, o que conduz a

$$\gamma_{xy}^M = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_{k,y} = -\bar{v}_k, \quad (4)$$

$$\varepsilon_{yy}^M = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_k = \text{constante em cada parede}, \quad (5)$$

para cada modo $k = 1, \dots, D$, e portanto \bar{u}_k tem de ser uma função linear em y , em cada parede. As funções \bar{w}_k são obtidas analisando a secção transversal como um pórtico plano, sob a ação de deslocamentos impostos \bar{v}_k , e a Eq. (4) mostra que os modos de deformação associados aos deslocamentos dos nós naturais são univocamente definidos pelas funções de empenamento \bar{u}_k . Estes modos são designados de “modos naturais de Vlasov” e incluem os modos clássicos de “corpo rígido” (extensão axial, flexão em torno dos eixos centrais principais e torção em torno do centro de corte) e os modos distorcionais. Para secções abertas não-ramificadas, o número de funções de empenamento é igual ao número de nós naturais, enquanto que com ramificações nem todos os deslocamentos de empenamento nos nós naturais são independentes e, portanto, o número de funções é menor (ver, por exemplo, [12]). É assim necessário identificar os nós independentes (em [4] é fornecido um procedimento geral) e, depois, gerar uma base inicial para os modos

de Vlasov impondo empenamentos unitários em cada um, separadamente, calculando as funções \bar{v}_k e \bar{w}_k associadas.

A forma homogénea da equação de equilíbrio da GBT é dada por

$$\mathbf{C}\phi_{,xxxx} - \mathbf{D}\phi_{,xx} + \mathbf{B}\phi = \mathbf{0}, \quad (6)$$

onde o vetor ϕ agrupa as funções de amplitude. Para os modos naturais de Vlasov, as matrizes da GBT são simétricas e dadas por

$$\mathbf{B}_{ik} = \int_S D_f \bar{w}_{i,yy} \bar{w}_{k,yy} dy, \quad (7)$$

$$\mathbf{C}_{ik} = \int_S (Et \bar{u}_i \bar{u}_k + D_f \bar{w}_i \bar{w}_k) dy, \quad (8)$$

$$\mathbf{D}_{ik} = \int_S \left(\frac{Gt^3}{3} \bar{w}_{i,y} \bar{w}_{k,y} - \nu D_f (\bar{w}_{i,yy} \bar{w}_k + \bar{w}_{k,yy} \bar{w}_i) \right) dy, \quad (9)$$

onde $D_f = Et^3/(12(1 - \nu^2))$, S designa a linha média da secção, t é a espessura das paredes e E , G , ν são o módulo de elasticidade, o módulo de distorção e o coeficiente de Poisson, respetivamente. De acordo com o procedimento estabelecido por Schardt, os modos distorcionais são os vetores próprios associados aos valores próprios não-nulos de

$$(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{C})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (10)$$

onde \mathbf{C} é definida positiva e \mathbf{B} é semi-definida positiva com um espaço nulo associado aos modos de corpo rígido.

O problema de valores e vetores próprios (10) constitui o problema fundamental da determinação dos modos distorcionais e é expectável que algumas características dos modos possam ser obtidas com base no tipo de matrizes envolvidas. Em particular, podem ser extraídas propriedades resultantes da simetria e periodicidade da secção transversal. Para isso, é no entanto essencial utilizar uma numeração de nós que reflita as características geométricas relevantes, conforme será discutido. Por fim, recorda-se que, para os modos naturais de Vlasov para secções abertas com n nós naturais independentes, o número de modos distorcionais é igual a $n - 4$. Para secções abertas com ramos, o número de nós independentes é igual a $n_{\text{nós}} - N_w + 2$, onde $n_{\text{nós}}$ é o número de nós naturais e N_w é o número de nós de extremidade [11].

3 SIMETRIA DE REFLEXÃO

Secções abertas exibindo simetria de reflexão são bastante comuns (e.g., secções em I, em C). Para este caso bem conhecido de simetria, os modos de deformação podem ser separados em grupos simétricos e anti-simétricos utilizando subestruturas [2], tal como exemplificado na parte de baixo da Fig. 2(a) para o caso de um C com reforços. Estas subestruturas permitem reduzir o número de graus de liberdade da secção e também de

certa forma antever as formas dos modos, nomeadamente dos modos distorcionais. A figura mostra (i) os modos de deformação iniciais, sendo possível constatar que os modos 1 a 3 constituem reflexões dos modos 1' a 3', e (ii) as subestruturas de simetria/anti-simetria e os modos distorcionais associados (os vetores próprios para $\lambda \neq 0$ na Eq. (10)). Note-se que esta secção é não-ramificada com $n = 6$, o que resulta em $n - 4 = 2$ modos distorcionais. A simplificação de simetria possui três nós ($n = 3$) e portanto gera três modos de Vlasov: extensão axial, flexão em torno do eixo de menor inércia e distorção simétrica (representada na figura). A simplificação de anti-simetria também possui 3 nós e gera flexão em torno do eixo de maior inércia, torção e distorção anti-simétrica (também representada na figura).

Em vez de recorrer às subestruturas, é possível utilizar a secção transversal completa, desde que a sequência de modos (nós) inicial gere matrizes modais centro-simétricas (simétricas em torno do seu centro). Uma vez que as matrizes são simétricas, centro-simetria implica bi-simetria. Conforme discutido em [13], matrizes $n \times n$ simétricas centro-simétricas possuem $\lceil n/2 \rceil$ vetores próprios simétricos e $\lfloor n/2 \rfloor$ vetores próprios anti-simétricos¹, o que está, obviamente, de acordo com o procedimento clássico das subestruturas de simetria e anti-simetria. Para obter matrizes centro-simétricas, basta que a sequência de nós de um lado do eixo de simetria seja a reflexão da sequência do outro lado — por exemplo, 1-2-3-3'-2'-1' na Fig. 2 (a). Para secções ramificadas, podem existir diversas opções para os nós independentes (ver [4]) e, portanto, deve primeiro ser escolhido um padrão que preserva a simetria de secção. Os vetores próprios simétricos (modos) incluem necessariamente a extensão axial e um modo de flexão, para além de $\lceil n/2 \rceil - 2$ modos distorcionais simétricos. Por outro lado, os modos anti-simétricos incluem a flexão ortogonal e a torção, para além de $\lfloor n/2 \rfloor - 2$ modos distorcionais anti-simétricos. Note-se que, se n é ímpar, o número de modos simétricos excederá em 1 o número de modos anti-simétricos.

Para exemplificar, considere-se a secção em I reforçada representada na Fig. 2(b). Esta secção é ramificada com $n = 8$ (dois nós dependentes) e, para preservar a simetria, é escolhido o padrão de nós indicado na figura. Os dois eixos de simetria tornam possível utilizar duas simplificações consecutivas, o que decompõe o problema em quatro problemas de 2 graus de liberdade, ou seja, obtêm-se 2 modos para cada par de simplificações. Os modos de distorção são representados na figura, com as simplificações associadas indicadas por baixo de cada um deles (simplificações horizontal-vertical, com S para simetria e A para anti-simetria): (SA) flexão em torno do eixo vertical e uma distorção, (AA) torção e uma distorção, (SS) extensão axial e uma distorção e (AS) flexão em torno do eixo horizontal e uma distorção. Note-se que esta separação de graus de liberdade torna possível obter expressões analíticas para cada modo com grande facilidade, uma vez que são obtidos sub-espacos de dimensão 2 — um procedimento deste tipo foi utilizado em [2, 3, 6] para obter as propriedades dos modos distorcionais de secções em C e Z com

¹ $\lceil k \rceil$ denota o menor inteiro $\geq k$ e $\lfloor k \rfloor$ é o maior inteiro $\leq k$.

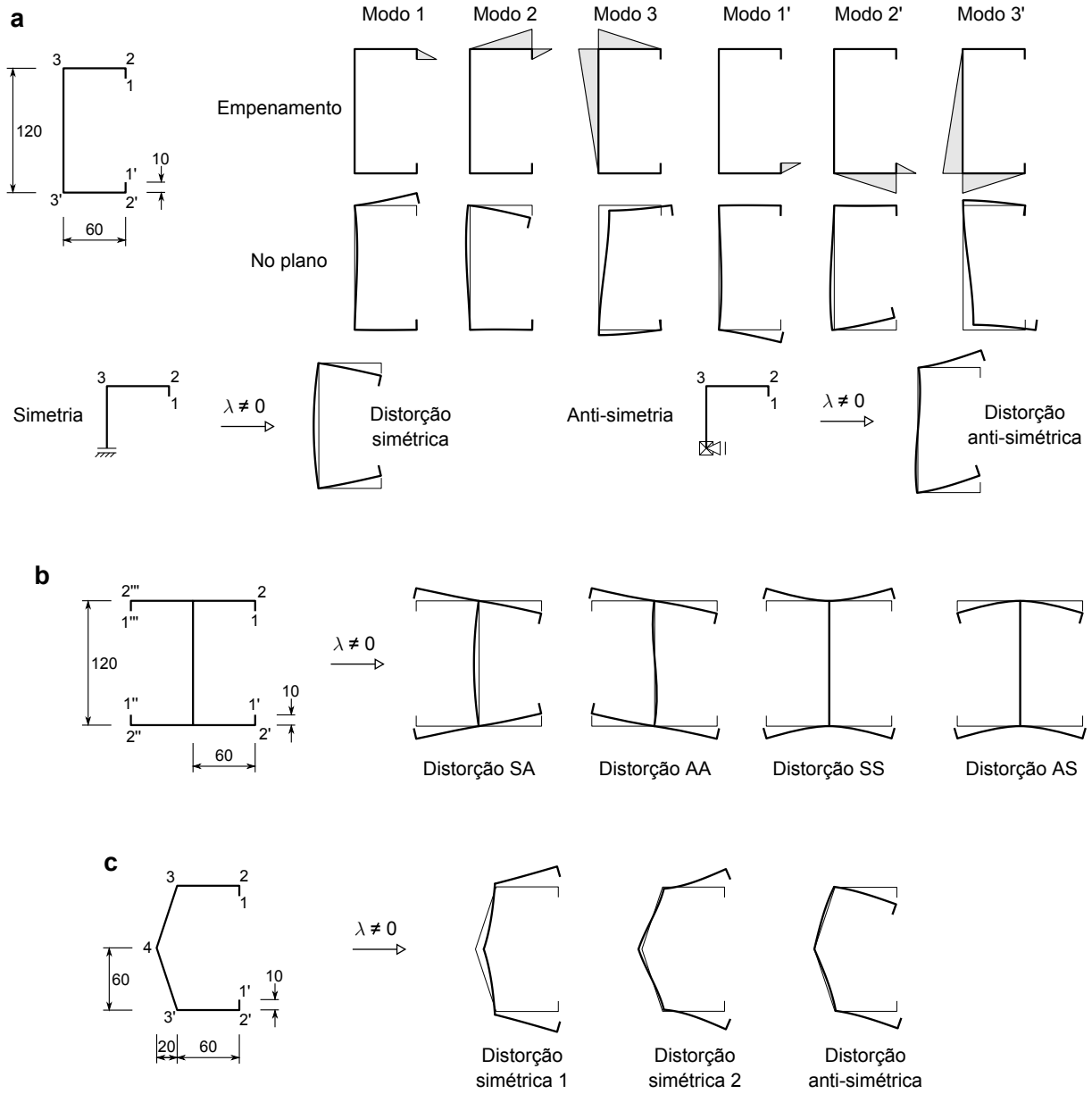


Figura 2: Modos distorcionais para secções com simetria de reflexão: (a) C com reforços, (b) I com reforços e (c) C com reforços e 6 paredes.

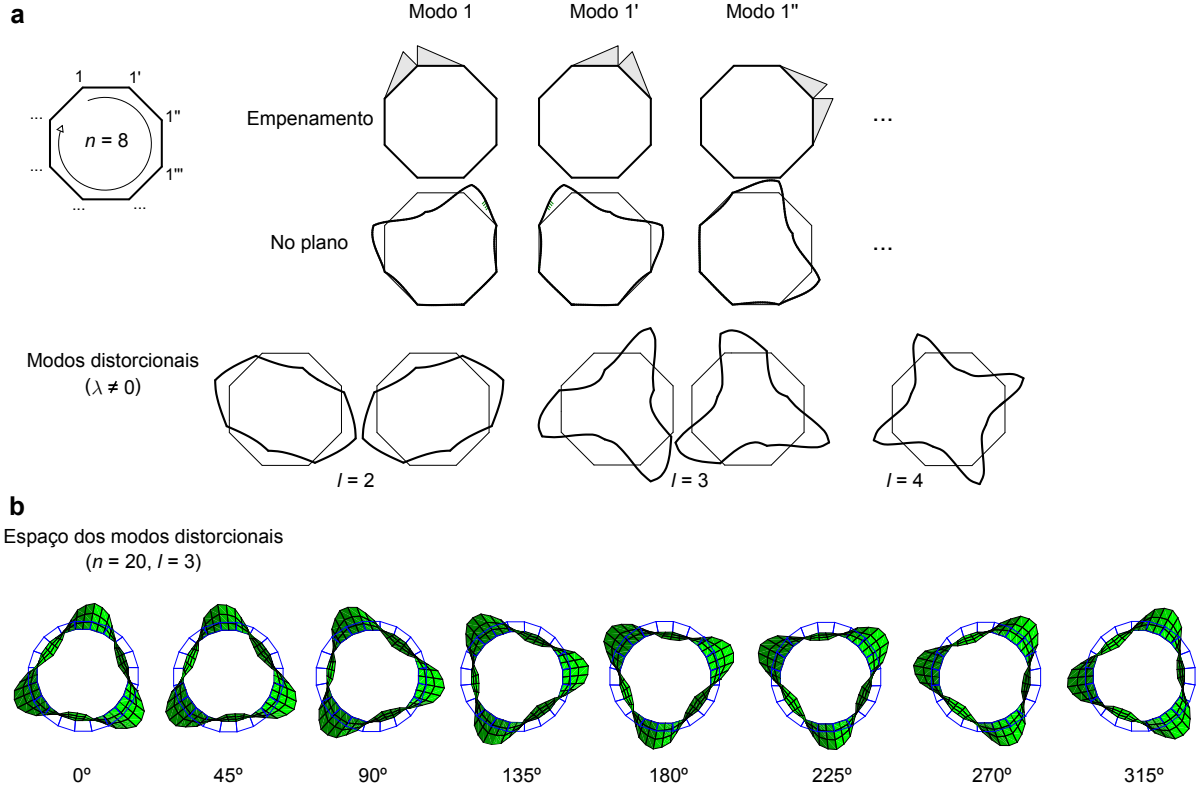


Figura 3: Modos de deformação para tubos com secção poligonal regular convexa: (a) numeração dos nós para $n = 8$, primeiros 3 (de 8) modos de deformação iniciais e modos distorcionais ($l = 2, 3, 4$); (b) configuração do modo distorcional em função da rotação no espaço $l = 3$, para $n = 20$.

reforços e “hat”.

Finalmente, considere-se a secção da Fig. 2(c), com 6 paredes ($n = 7$). Trata-se de um caso particular em que n é ímpar (um dos nós está localizado no eixo de simetria) e portanto o número de modos simétricos excede o de modos anti-simétricos. Existem $\lceil n/2 \rceil = 4$ modos simétricos, nomeadamente extensão axial, flexão em torno do eixo vertical e dois modos distorcionais. Os $\lfloor n/2 \rfloor = 3$ modos anti-simétricos correspondem à flexão em torno do eixo horizontal, torção e um modo distorcional. As formas dos modos distorcionais são representados na figura.

4 SIMETRIA DE ROTAÇÃO

Embora este artigo não aborde o caso de secções fechadas, as implicações da simetria de rotação são mais convenientemente ilustradas através de uma secção poligonal regular convexa de n lados (SPRC), que exhibe simetria de rotação de grau n . Os comportamentos linear, de encurvadura e de vibração de com SPRC foram recentemente investigados em [7, 8, 9, 10], tirando partido desta simetria.

A Fig. 3(a) refere-se ao caso particular de $n = 8$. A numeração dos nós (à esquerda) preserva a simetria de rotação e os modos naturais iniciais de Vlasov constituem rotações uns dos outros — a figura mostra os três primeiros modos iniciais do conjunto completo de 8 modos. Esta característica torna as matrizes da GBT simétricas e circulantes (as linhas correspondem a permutações cíclicas de um vetor de dimensão n , com permutação igual ao índice da linha), e portanto partilham os mesmos vetores próprios $\mathbf{a}^{(l)}$ e $\mathbf{b}^{(l)}$, com componentes $j = 1, \dots, n$

$$a_j^{(l)} = \cos\left(\frac{2\pi jl}{n}\right), \quad l = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor, \quad (11)$$

$$b_j^{(l)} = \sin\left(\frac{2\pi jl}{n}\right), \quad l = 1, \dots, \lfloor (n-1)/2 \rfloor. \quad (12)$$

Os empenamentos nodais dos modos finais são assim dados pelos vetores $\mathbf{a}^{(l)}$ e $\mathbf{b}^{(l)}$ e, a partir de (11)-(12), é possível concluir o seguinte:

- (i) Para $l = 0$, existe um único modo com $a_j^{(0)} = 1$, o que corresponde a empenamento constante, ou seja, corresponde ao modo de extensão axial.
- (ii) Cada $l = 1, \dots, \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ está associado a um par de modos $(\mathbf{a}^{(l)}, \mathbf{b}^{(l)})$ partilhando a mesma frequência l/n e valor próprio. Para $l = 1$ obtêm-se os modos de flexão em torno de eixos centrais ortogonais e para $l \geq 2$ é-se conduzido a pares de modos distorcionais (o modo de torção não é obtido porque não pertence ao conjunto dos modos de Vlasov [7]). Pode mostrar-se que qualquer rotação no espaço bidimensional definido por cada par não altera a entrada diagonal correspondente das matrizes da GBT.
- (iii) Se n é par, obtém-se ainda um modo distorcional para $l = n/2$, exibindo empenamento positivo/negativo em nós consecutivos.

Para efeitos ilustrativos, a Fig. 3(a) mostra os modos distorcionais finais ($l = 2, 3, 4$) para $n = 8$ e a Fig. 3(b) mostra a configuração do modo $l = 3$ em função da rotação no seu espaço, para $n = 20$.

Para secções abertas, a simetria de rotação implica que a secção é constituída por ramos partindo do centro de rotação. Como apenas três dos nós das paredes numa ramificação podem ser independentes [4], o padrão de nós só preserva a simetria se a secção possuir apenas 2 ou 3 ramos. Com 2 ramos a simetria é por vezes designada de axial ou central. Utilizando uma numeração de nós em cada ramo que preserve a simetria de rotação, (ver Fig. 4), as matrizes da GBT tornam-se simétricas e circulantes por blocos com n (número de ramos) blocos de dimensão igual ao número de nós em cada ramo m ². As matrizes

²Os blocos não-diagonais não são necessariamente simétricos para $n = 3$. Para $n = 2$, o único bloco não-diagonal é simétrico. Por exemplo, para a secção em Z da Fig. 4(a), note-se que os modos 1-1', 2-2',

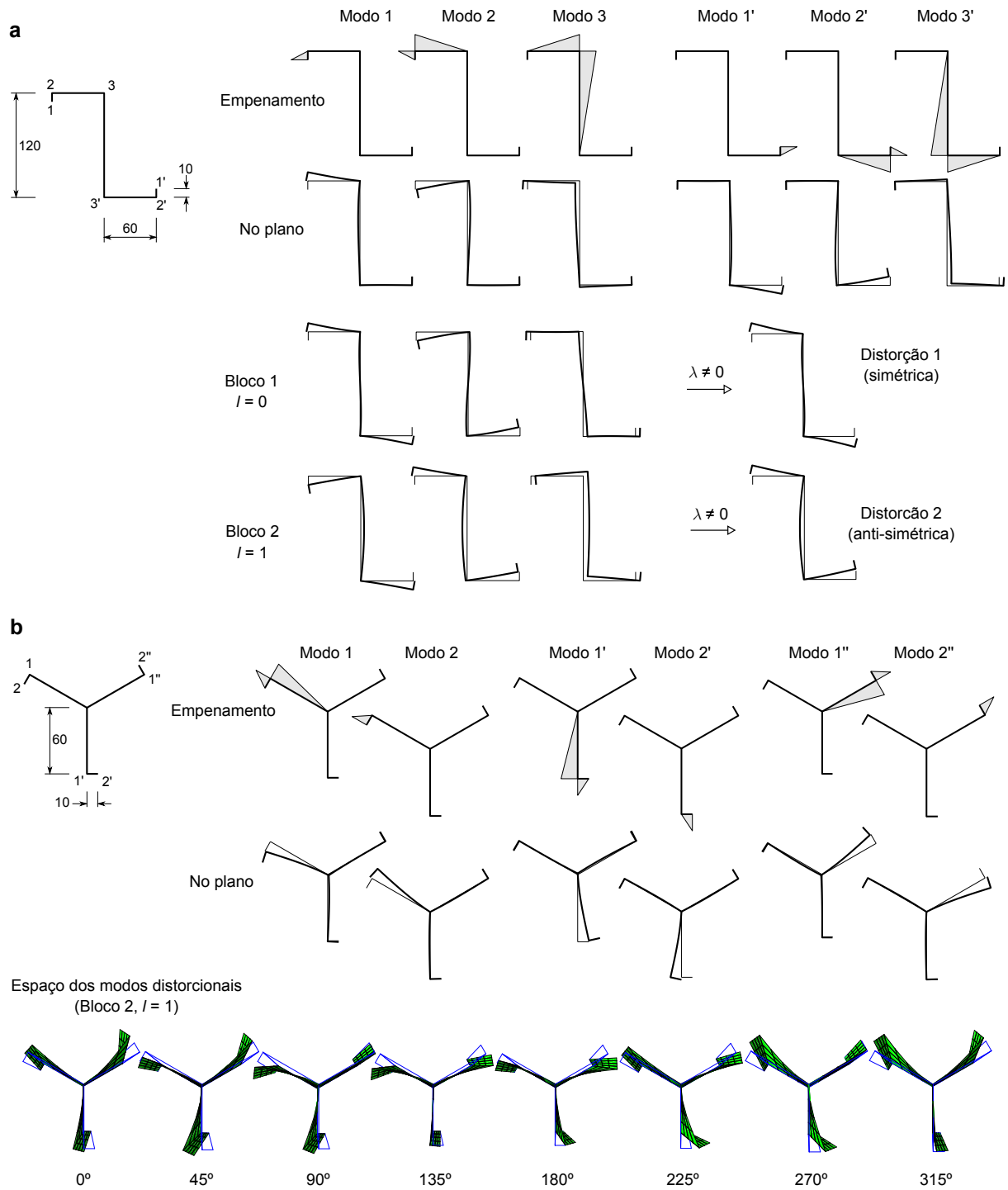


Figura 4: Modos distorcionais para secções abertas com simetria de rotação: (a) secção em Z com reforços e (b) secção com três ramos.

podem ser diagonalizadas por blocos com os vetores obtidos por multiplicação de cada componente (11)-(12) por uma matriz identidade de dimensão $m \times m$, \mathbf{I}_m , resultando em (i) blocos $m \times m$ para $l = 0, n/2$ e (ii) blocos $2m \times 2m$ para $l = 1, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ com m valores próprios duplos. Os modos distorcionais são obtidos diagonalizando cada bloco diagonal, individualmente, com a Eq. (10).

Uma vez que $n = 2, 3$ ($l = 0, 1$), apenas se obtêm dois blocos e é possível concluir o seguinte:

- (i) O primeiro bloco ($l = 0$) é gerado por $a_j^{(0)} = 1$ e corresponde a modos com simetria de rotação, o que inclui a extensão axial, a torção e $m - 2$ modos distorcionais (os valores próprios não-nulos de (10)).
- (ii) Para $n = 2$, o segundo bloco ($l = 1$) tem dimensão $m \times m$ e é gerado por $a_j^{(n/2)}$, com empenamento unitário positivo/negativo em ramos consecutivos. Como $n = 2$, tal implica que os modos resultantes possuem anti-simetria de rotação. Este bloco gera os dois modos de flexão e $m - 2$ modos distorcionais (os valores próprios não-nulos de (10)).
- (iii) Para $n = 3$, o segundo bloco ($l = 1$) tem dimensão $2m \times 2m$ e gera m pares de modos partilhando o valor próprio e frequência ($l/n = 1/3$). Um par corresponde às duas flexões e os restantes $m - 1$ pares são distorcionais.

A Fig. 4 mostra dois exemplos: (a) a secção em Z com reforços ($n = 2, m = 3$) e (b) uma secção com três ramos ($n = 3, m = 2$):

- (i) Relativamente à secção em Z, a figura mostra os deslocamentos no plano e de empenamento associados a cada modo inicial, o que permite visualizar que cada modo possui um modo equivalente, mas rodado de 180° . Em acréscimo, as configurações de cada modo distorcional (final) no plano são também representadas na figura. Neste caso particular ($m = 3$), obtém-se um único modo distorcional a partir de cada bloco, o que facilita a obtenção de fórmulas analíticas, como as apresentadas em [2, 6].
- (ii) Para a secção com três ramos, a figura mostra os deslocamentos associados a cada modo inicial. Neste caso cada modo tem dois equivalentes rodados de 120° e 240° . Como $m = 2$, não existem modos distorcionais com simetria de rotação e apenas um par distorcional é obtido ($l = 1$). A parte de baixo da figura mostra a configuração do modo distorcional em função da rotação no seu espaço.

3-3' constituem rotações de 180° . Isto implica que o bloco não-diagonal é simétrico, dado que as entradas de cada matriz associadas aos modos 1-2' e 2-1' são idênticas. Isto também se verifica para os modos 1-3' / 3-1' e 2-3' / 3-2'.

5 PERIODICIDADE

Secções periódicas finitas são caracterizadas por uma subestrutura ou “célula” que se repete. Secções abertas deste tipo são encontradas em chapas trapezoidais de aço e em coberturas de betão armado do tipo “folded plate”. Algumas secções deste tipo exibem simetria de rotação ou reflexão, pelo que podem ser utilizados os procedimentos explicados nas secções anteriores. Contudo, à medida que o número de células aumenta, torna-se mais eficiente tirar partido das particularidades da periodicidade. A secção 5.1 discute o caso geral de secções abertas geradas por translação de uma célula ao longo de uma linha reta. A secção 5.2 aborda o caso particular de geração através de reflexão deslizante.

5.1 Translação

Seja n o número de células e, para efeitos ilustrativos, considere-se a secção finita periódica da Fig. 5(a), a qual é gerada por translação de uma célula (as primeiras três paredes) três vezes ($n = 4$). A numeração dos nós é indicada na figura e preserva a periodicidade, com os nós de extremidade de cada célula coincidindo com os das células adjacentes.

Com o procedimento usual da GBT para obter os modos iniciais naturais de Vlasov, é necessário analisar a secção total, o que conduz a matrizes modais pouco esparsas. Torna-se mais eficiente tirar partido da periodicidade, analisando apenas uma célula intermédia, como mostra a Fig. 5(b) (célula 1'-2'-3'-4'), onde os deslocamentos no plano independentes são indicados pelos apoios e correspondem aos deslocamentos laterais das paredes (incluindo os das células adjacentes), bem como as rotações dos nós de extremidade. Os modos iniciais resultantes são representados na Fig. 5(c), onde os modos θ_i correspondem às rotações dos nós de extremidade e os restantes modos são gerados pelas funções de empenamento habitais da GBT — note-se que alguns dos modos envolvem empenamento em células adjacentes. Tal como no procedimento do método dos elementos finitos, as matrizes da GBT relativas à célula são utilizadas para montar as matrizes da secção completa, as quais são agora mais esparsas. Mais precisamente, as matrizes são tridiagonais por blocos e, com a exceção da primeira e última linha de blocos, as matrizes são circulares devido à periodicidade da secção, com uma dimensão de bloco m igual ao número de modos da célula menos 4 (os modos partilhados com as células adjacentes), pelo que se tem $m = 8 - 4 = 4$ neste caso.

Obtêm-se 20 modos, com $3n + 1 = 13$ modos de empenamento (um por nó), $n + 1 = 5$ rotações independentes e 2 translações dos nós de extremidade (resultantes da aplicação dos modos 3 e 2'' a estes nós e que não envolvem empenamento). Se os valores próprios da Eq. (10) são ordenados de acordo com o seu valor (crescente), (i) os primeiros quatro são nulos e correspondem aos modos de corpo rígido, (ii) os 9 modos seguintes são distorcionais (o que completa a dimensão do espaço das funções de empenamento) e (iii) os 7 modos finais são locais (sem deslocamentos das arestas no plano da secção) e correspondem às rotações independentes e translações das extremidades. Na Fig. 5(d) representam-se as configurações dos modos distorcionais no plano da secção.

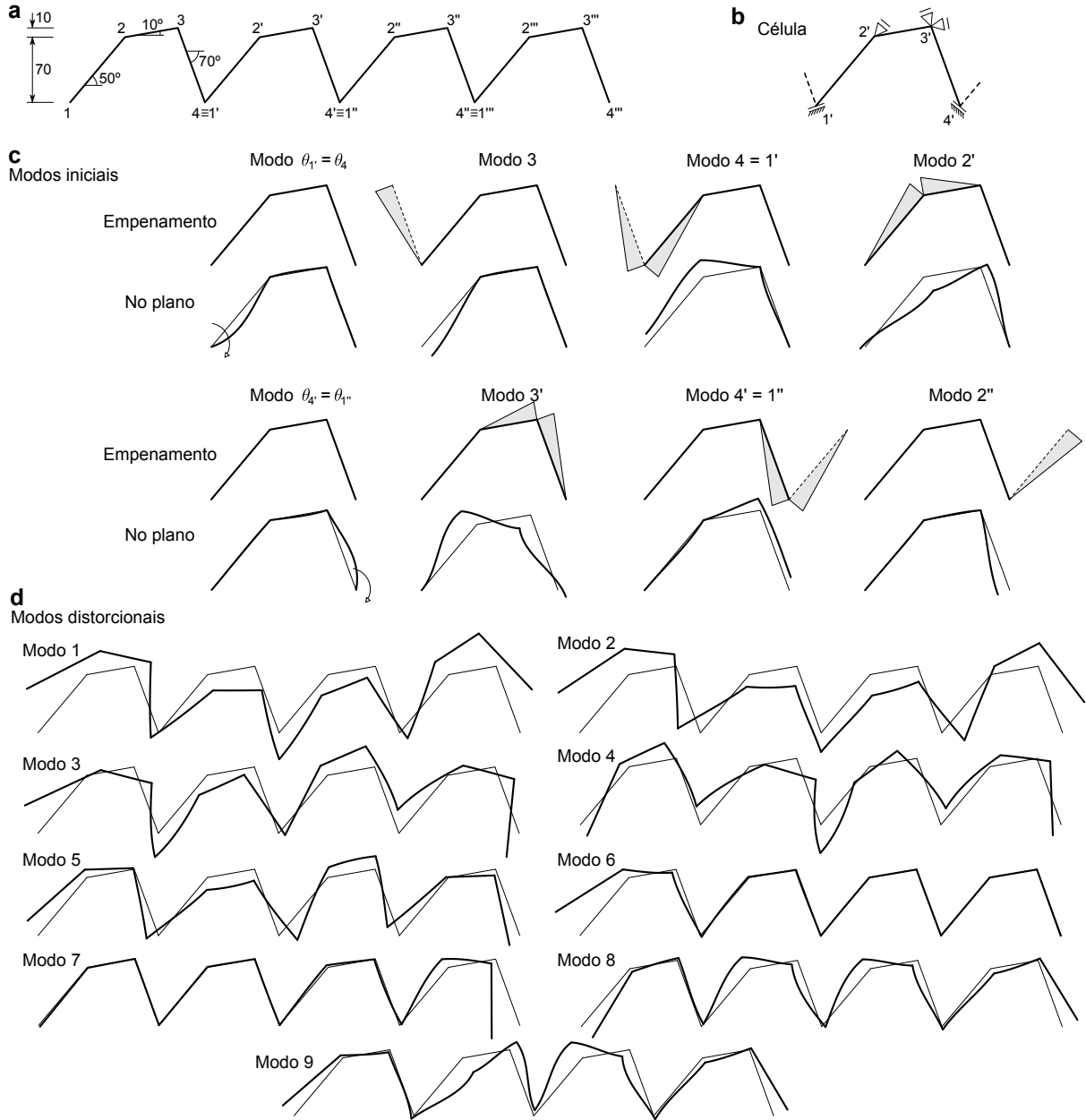


Figura 5: Secção periódica gerada por translação: (a) geometria, (b) célula e graus de liberdade no seu plano, (c) modos de deformação iniciais e (d) modos distorcionais.

O procedimento descrito anteriormente perde eficiência para valores elevados de n , dado que requer a montagem das matrizes completas. Em alternativa, pode admitir-se que $n = \infty$, um caso que corresponde à simetria de translação. A abordagem com a célula conduz a matrizes infinitas, simétricas e tridiagonais por blocos, as quais podem ser simplificadas utilizando condições de fronteira periódicas, o que leva a matrizes simétricas circulantes (por blocos) e finitas. Tal como no caso da simetria de rotação, as matrizes podem ser diagonalizadas por blocos multiplicando (11)-(12) por \mathbf{I}_m . Como $n = \infty$, a frequência $f = l/n$ deve ser usada diretamente em (11)-(12), o que resulta em

$$a_j^{(f)} = \mathbf{I}_m \cos(2\pi f j), \quad f \in [0, 0.5], \quad (13)$$

$$b_j^{(f)} = \mathbf{I}_m \sin(2\pi f j), \quad f \in]0, 0.5[. \quad (14)$$

O comprimento de onda é $1/f$ e é medido em “células”. O modo de extensão axial e flexão em torno do eixo fraco são obtidos para $f = 0$ (comprimento de onda infinito), o que leva a $a_j^{(0)} = 1$. Os modos de torção e flexão em torno do eixo forte estão associados ao par de vetores para $f \rightarrow 0$, mas não são relevantes, dado que $n = \infty$. À medida que a frequência aumenta, o comprimento de onda diminui e, para $f = 0.5$, o vetor é $\mathbf{a}^{(0.5)}$, com inversão de deslocamentos em células adjacentes (o comprimento de onda é igual a 2 células).

Para calcular os modos associados a uma determinada frequência, propõe-se o seguinte procedimento:

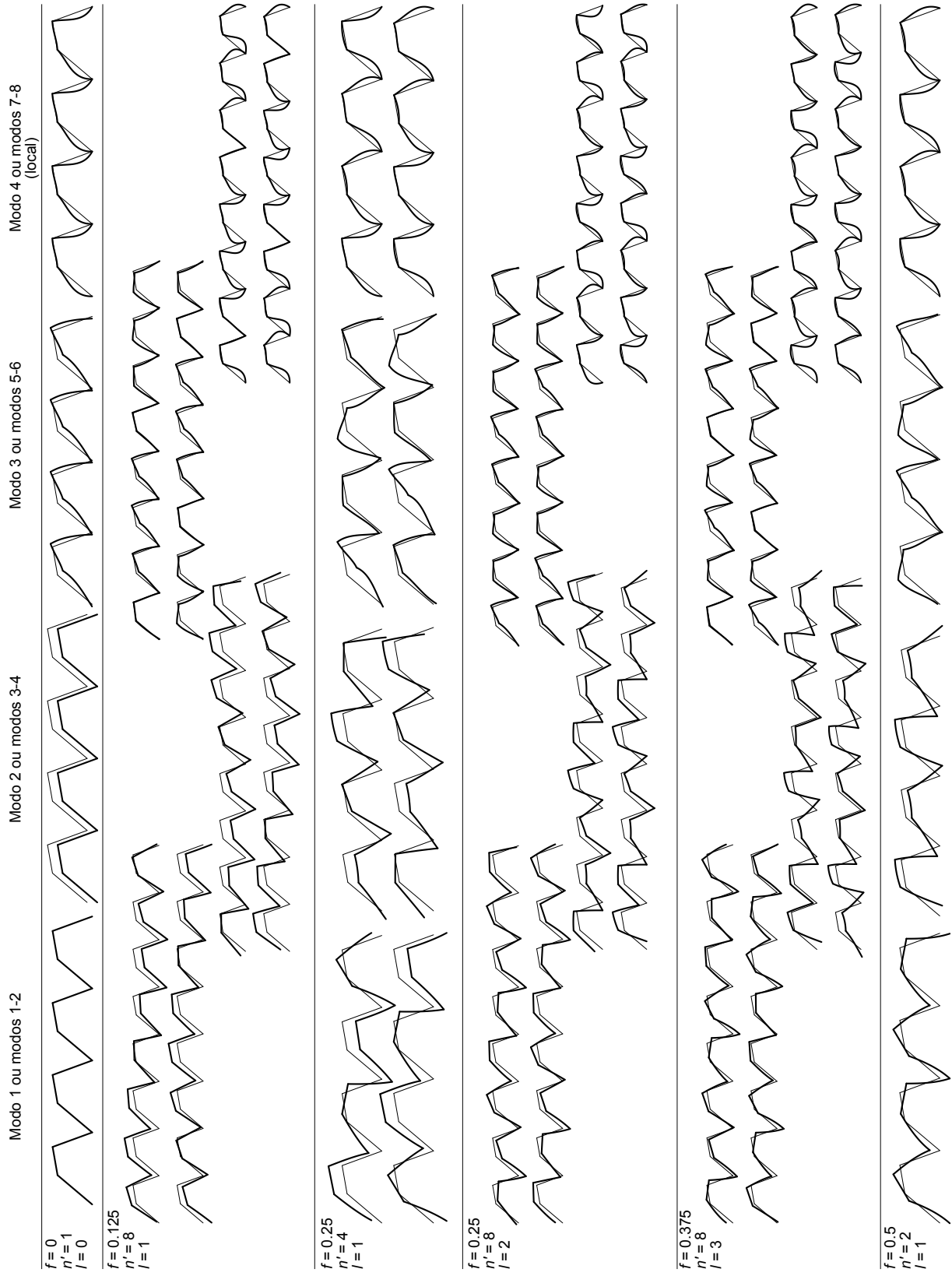
1. Expressar f através de um quociente de dois inteiros l/n' (logo f é um racional), onde l é o número do bloco e n' é o número de células da subestrutura com condições de fronteira periódicas³.
2. Com as matrizes da GBT da célula, montar as matrizes (simétricas e circulantes) da subestrutura de n' células. Recorde-se que, tal como no caso anterior, estas matrizes são esparsas.
3. Com as componentes dos vetores próprios (13)-(14) associadas ao valor de f selecionado, obter os correspondentes blocos $2m \times 2m$ (ou $m \times m$ se $f = 0, 0.5$) das matrizes \mathbf{B} e \mathbf{C} .
4. Os modos finais são obtidos resolvendo a Eq. (10) com estes blocos apenas e são sempre obtidos modos duplos para $0 < f < 0.5$, i.e. para os blocos de dimensão $2m \times 2m$.

³Por exemplo, para $f = 0.4$ pode usar-se $l = 4, n' = 10$ ou $l = 2, n' = 5$. No segundo caso é necessário montar matrizes mais reduzidas, o que é mais eficiente. Para os casos extremos, (i) $f = 0$ é obtido com $l = 0$ e qualquer n' (uma única célula é a solução mais eficiente, i.e., $n' = 1$) e (ii) $f = 0.5$ requer n' par (e $l = n'/2$), com $n' = 2$ constituindo a melhor escolha. De qualquer forma, um valor muito pequeno de f implica trabalhar com matrizes de grandes dimensões.

Tal como no caso de n finito, é necessário considerar como independentes algumas das rotações nodais e portanto alguns dos modos finais são locais e não distorcionais. Em particular, para uma subestrutura com n' células, existem exatamente n' graus de liberdade de rotação, distribuídos da seguinte forma: (i) 1 modo para $l = 0$, (ii) 2 modos para $l = 1, \dots, \lfloor (n' - 1)/2 \rfloor$ e (iii) 1 modo para $l = n'/2$ se n' é par. Assim, para um determinado valor de l , depois de resolver a Eq. (10) e hierarquizar os modos com base nos seus valores próprios, os modos locais são (i) o último par de modos se $l = 1, \dots, \lfloor (n' - 1)/2 \rfloor$ ou (ii) o último modo se $l = 0$ ou $l = n'/2$.

Para exemplificar, considere-se a secção com $n = \infty$ da Fig. 6(b), a qual é gerada pela célula já analisada na Fig. 5. A figura mostra os modos de deformação obtidos com o procedimento proposto, para $n' = 1, 2, 4, 8$. Para esta célula, $m = 4$ conforme já discutido, e portanto (i) obtêm-se 4 modos para $f = 0, 0.5$ (modos 1, 2, 3, 4 na figura) e (ii) 4 pares de modos nos restantes casos (os pares 1-2, 3-4, 5-6 e 7-8 na figura). Cada “linha” mostra os modos para um determinado f , sendo que em cada caso os valores de l e n' adotados são indicados — note-se que, para $f = 0, 0.5$, os modos são representados com $n' = 4$ para efeitos de visualização apenas, dado que foi utilizado um valor menor nos cálculos, tal como indicado na figura. Estes resultados estão em acordo com as conclusões já apresentadas e chama-se a atenção para os seguintes aspetos:

- (i) Obtêm-se modos individuais para $f = 0, 0.5$. Para os valores intermédios, obtêm-se sempre pares de modos.
- (ii) O último modo/par para cada f é local.
- (iii) Os modos exibem padrões periódicos com período igual a $1/f = n'/l$ células. Por exemplo, para $l = 1$, o período é igual ao comprimento da subestrutura e é apenas metade para $l = 2$. Nos casos extremos, $f = 0$ e $f = 0.5$, células consecutivas exibem formas idênticas ou inversas, respetivamente. No primeiro caso, os primeiros modos correspondem a extensão axial e flexão em torno do eixo fraco.
- (iv) Foi anteriormente concluído que os modos para um dado f são independentes dos valores de n' e l . Na figura, esta afirmação parece ser contrariada pelo facto de as formas dos modos para $f = 0.25$ e $n' = 4$ ou $n' = 8$ não coincidirem. Contudo, cada par constitui uma base do *mesmo* espaço, muito embora os “vetores de base” (os modos) não coincidam necessariamente, já que resultam da solução numérica da Eq. (10)).
- (v) Para todos os pares representados na figura, os modos estão desfasados para a direita um número finito de células j : $j = 1$ se $n'/l = 4$, $j = 2$ se $n'/l = 8$ e $j = 6$ se $n'/l = 8/3$. Este desfasamento constitui um caso particular que foi identificado em [7], para SPRC, e ocorre porque n' é um múltiplo de 4. A Fig. 7 mostra um contra-exemplo, que corresponde ao primeiro par para $n' = 5$, $f = 0.2$, $l = 1$ — neste caso



15
 Figura 6: Modos de deformação para uma secção periódica com $n = \infty$.

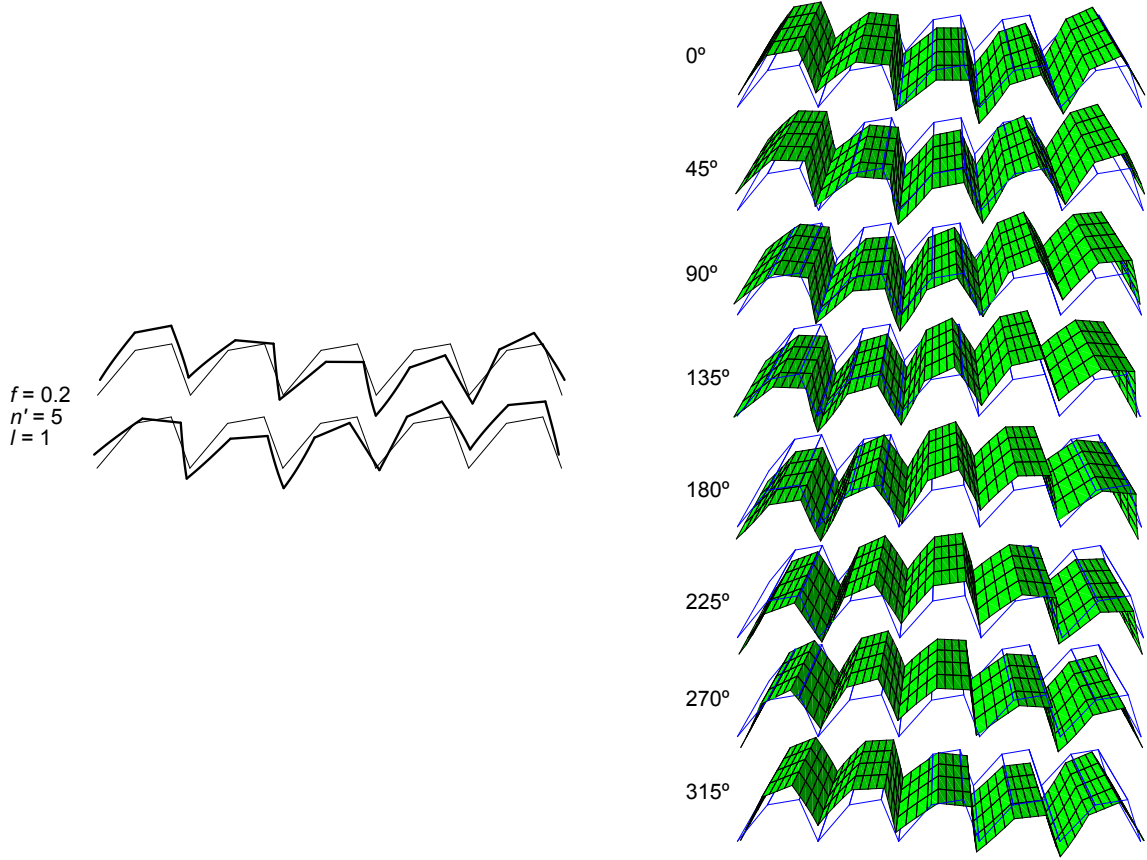


Figura 7: Espaço do par distorcional $n' = 5$, $f = 0.2$ e $l = 1$.

os dois modos não estão desfasados um número finito de células. A figura mostra ainda a configuração dos modos em função da rotação no seu espaço.

5.2 Reflexão deslizante

Considere-se a secção periódica da Fig. 8(a), a qual é gerada por reflexão deslizante da célula da Fig. 5 três vezes ($n = 4$). Note-se que esta secção não exhibe simetria de rotação em torno do nó 4'.

O procedimento neste caso é semelhante ao definido para a translação, muito embora a subestrutura da célula ter agora de contemplar apoios rodados nos nós 1' e 4', para ter em conta a reflexão das células adjacentes, tal como mostra a Fig. 8(b). Os modos iniciais são representados na Fig. 8(c) e note-se que, com a exceção dos modos θ_i , são diferentes dos da Fig. 5(c).

As matrizes completas da GBT podem ser facilmente montadas a partir das relativas à célula, notando que para as células refletidas os deslocamentos no plano de todos os

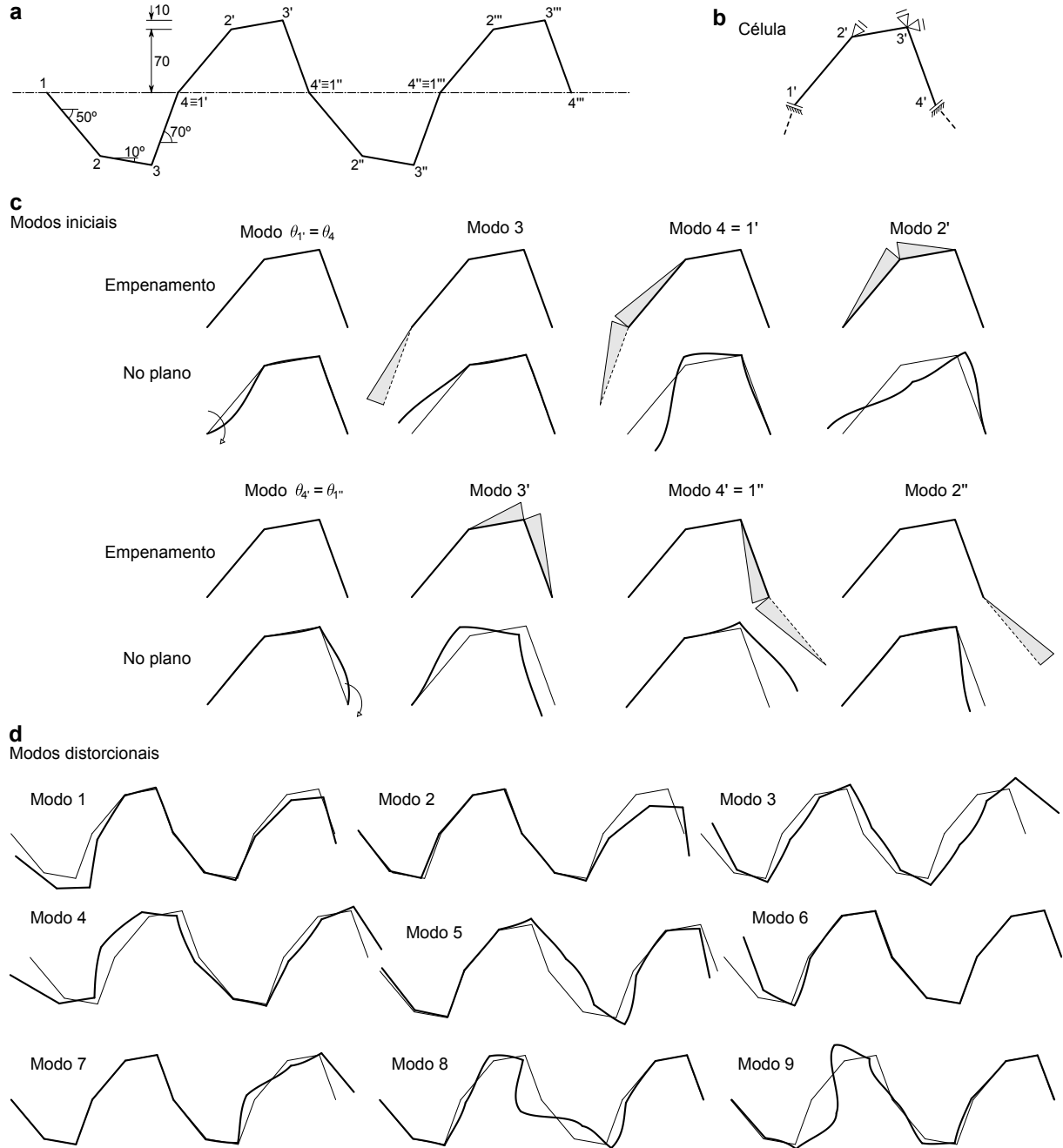


Figura 8: Secção periódica gerada por reflexão deslizante: (a) geometria, (b) célula e graus de liberdade no seu plano, (c) modos de deformação iniciais e (d) modos distorcionais.

modos constituem reflexões com a exceção dos modos θ_i . As matrizes globais são assim circulantes por blocos para uma dimensão de blocos correspondente a uma “célula dupla” (uma célula e a sua reflexão deslizante), o que não é mais do que uma consequência do facto de uma secção periódica gerada por reflexão deslizante poder também ser gerada por uma translação da “célula dupla”. Assim, para condições de fronteira periódicas, pode recorrer-se ao procedimento da secção anterior.

No caso em consideração, obtêm-se 20 modos, compreendendo $3n + 1 = 13$ modos de empenamento (um por nó), $n + 1 = 5$ rotações independentes e 2 translações dos nós de extremidade (da aplicação dos modos 3 e 2'' a estes nós). A resolução da Eq. (10) conduz a (i) 4 modos de corpo rígido, (ii) 9 modos distorcionais e (iii) 7 modos locais (rotações nodais e deslocamentos das extremidades). A Fig. 8(d) mostra as configurações dos modos distorcionais no plano da secção.

6 Conclusão

Este artigo abordou as implicações da simetria e periodicidade da secção transversal nas características dos modos de deformação distorcionais de secções de parede fina aberta. As principais conclusões retiradas do estudo efetuado são as seguintes:

- (i) Para secções com simetria de reflexão, as matrizes da GBT são simétricas centro-simétricas, com $\lceil n/2 \rceil$ vetores próprios simétricos e $\lfloor n/2 \rfloor$ vetores próprios anti-simétricos, que podem ser utilizados para reduzir o número de graus de liberdade do problema.
- (ii) No caso da simetria de rotação, as matrizes são simétricas e circulantes por blocos e podem ser diagonalizadas por blocos. Os modos distorcionais podem ser obtidos para cada bloco diagonal, individualmente, e os blocos de dimensão dupla conduzem, para cada valor próprio, a um par de modos de deformação.
- (iii) Para secções periódicas geradas por translação ou reflexão deslizante de uma célula ao longo de uma linha reta, as matrizes da GBT podem ser montadas usando unicamente as matrizes da célula repetida.
- (iv) Para secções periódicas infinitas, a utilização de condições de fronteira periódicas conduz a matrizes simétricas circulantes por blocos, de dimensão finita. Para um determinado comprimento de onda, as matrizes da GBT podem ser montadas a partir das da célula e, subsequentemente, diagonalizadas por blocos. Tal como no caso da simetria de rotação, os modos distorcionais podem ser obtidos para cada bloco diagonal, individualmente, e são obtidos pares de modos no caso dos blocos de dupla dimensão.

REFERÊNCIAS

- [1] R.D. Ziemian, *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, John Wiley & Sons, (2010).
- [2] R. Schardt, *Verallgemeinerte Technische Biegetheorie*, Springer Verlag, (1989).
- [3] R. Schardt. Lateral torsional and distortional buckling of channel- and hat-sections, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. **31**, pp. 243–265, (1994).
- [4] R. Gonçalves, M. Ritto-Corrêa and D. Camotim. A new approach to the calculation of cross-section deformation modes in the framework of Generalized Beam Theory, *Comput. Mech.*, Vol. **46**, pp. 759–781, (2010).
- [5] R. Gonçalves and D. Camotim. Steel-concrete composite bridge analysis using Generalised Beam Theory, *Steel and Composite Structures*, Vol. **10**, pp. 223–243, (2010).
- [6] N. Silvestre and D. Camotim. Distortional buckling formulae for cold-formed steel C and Z-section members: Part I-derivation, *Thin-Walled Structures*, Vol. **42**, pp. 1567–1597, (2004).
- [7] R. Gonçalves and D. Camotim. On the behaviour of thin-walled steel regular polygonal tubular members, *Thin-Walled Structures*, Vol. **62**, pp. 191–205, (2013).
- [8] R. Gonçalves and D. Camotim. Elastic buckling of uniformly compressed thin-walled regular polygonal tubes, *Thin-Walled Structures*, Vol. **71**, pp. 35–45, (2013).
- [9] R. Gonçalves and D. Camotim. Buckling behaviour of thin-walled regular polygonal tubes subjected to bending or torsion, *Thin-Walled Structures*, Vol. **73**, pp. 185–197, (2013).
- [10] R. Gonçalves and D. Camotim. The vibration behaviour of thin-walled regular polygonal tubes, *Thin-Walled Structures*, Vol. **84**, pp. 177–188, (2014).
- [11] R. Gonçalves, R. Bebianio and D. Camotim. On the shear deformation modes in the framework of Generalized Beam Theory, *Thin-Walled Structures*, Vol. **84**, pp. 325–334, (2014).
- [12] P.B. Dinis, D. Camotim and N. Silvestre. GBT formulation to analyse the buckling behaviour of thin-walled members with arbitrarily “branched” open cross-sections, *Thin-Walled Structures*, Vol. **44**, pp. 20–38, (2006).
- [13] A. Cantoni and P. Butler. Eigenvalues and eigenvectors of symmetric centrosymmetric matrices, *Linear Algebra and its Applications*, Vol. **13**, pp. 275–288, (1976).