

ELEMENTO FINITO PARA MODELAR A RELAÇÃO ADERÊNCIA-ESCORREGAMENTO INCLUINDO O EFEITO DA EXTENSÃO DO AÇO NA ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE BETÃO ARMADO

José Santos^{1*}, António Abel Henriques²

1: Centro de Competência de Ciências Exatas e da Engenharia
Universidade da Madeira
9020-105 Funchal
e-mail: jmmns@fe.up.pt, web: www.fe.up.pt/labest

2: Departamento de Engenharia Civil
Faculdade de Engenharia
Universidade do Porto
4200-465 Porto
e-mail: aarh@fe.up.pt, web: www.fe.up.pt/labest

Palavras-chave: Elemento finito, fendilhação, betão armado, aderência, escorregamento, extensão no aço

Resumo. *A influência da extensão do aço na relação tensão de aderência-escorregamento tem vindo a ser reconhecida na literatura recente, especialmente para extensões no aço superiores à extensão de cedência. Neste artigo apresenta-se a formulação para um novo elemento finito de interface entre o betão e o aço que tem em conta a extensão deste último. A interface desenvolvida consiste num elemento ortotrópico de estado plano de tensão com quatro nós, cujas leis constitutivas são modificadas. O elemento foi aplicado em diversos modelos numéricos de elementos finitos para comparação com resultados experimentais. Os resultados obtidos mostram a relevância da extensão do aço na relação tensão de aderência-escorregamento, especialmente nos elementos tracionados.*

1. INTRODUÇÃO

O comportamento das estruturas de betão armado é bastante influenciado pela relação aderência-escorregamento. Por um lado a aderência deve ser o mais elevada possível para minimizar a abertura de fendas e a flecha em serviço, mas, por outro lado, após a cedência das armaduras deve ser suficientemente baixa de modo a permitir a formação de rótulas plásticas com elevada capacidade de rotação na rotura.

Durante muitos anos a tensão de aderência foi calculada apenas como uma função do escorregamento relativo entre o aço e o betão. A influência de outros parâmetros foi descurada não só devido à preponderância do escorregamento, mas também porque a maioria

dos estudos numéricos e experimentais foram desenvolvidos para condições de serviço, ou seja, antes do aço atingir a cedência. Na publicação da fib [1] é feita uma vasta revisão dos principais estudos numéricos e experimentais existentes na literatura relativos ao tema da aderência aço-betão. Na Equação (22) apresenta-se a fórmula mais utilizada para a curva aderência-escorregamento e que consta no MC2010 [2].

Mais recentemente, devido à necessidade de garantir um comportamento dúctil nas estruturas de betão armado no momento da rotura, diversos autores apresentaram propostas de modificação da relação aderência-escorregamento, de modo a ter em conta outros efeitos preponderantes após a cedência das armaduras. Parâmetros como a extensão do aço, a extensão do betão, o dano ou o confinamento têm sido associados à relação aderência-escorregamento, normalmente sob a forma de coeficientes.

Shima et al. [3] formularam pela primeira vez um modelo constitutivo para aderência que incluía uma relação entre a tensão de aderência, o escorregamento e a extensão do aço. Este modelo inclui os efeitos do diâmetro dos varões e da resistência à compressão do betão. O modelo foi devidamente calibrado com dados experimentais relativos ao comportamento após a cedência das armaduras. As Equações (1) a (3) resumem a proposta destes autores.

$$\tau(f_c, s, \varepsilon_s, \varnothing) = \tau_0(f_c, s, \varnothing) \cdot g(\varepsilon_s) \quad (1)$$

$$\tau_0(f_c, s, \varnothing) = 0.73 \cdot f_c \cdot \left[\ln \left(1 + 5000 \cdot \frac{s}{\varnothing} \right) \right]^3 \quad (2)$$

$$g(\varepsilon_s) = \frac{1}{1 + \varepsilon_s \cdot 10^5} \quad (3)$$

em que: τ é a tensão de aderência, f_c é a resistência do betão à compressão, s é o escorregamento relativo entre o aço e o betão, ε_s é a extensão do aço, $\varnothing$ é o diâmetro dos varões de aço, τ_0 é o valor base da tensão de aderência e $g(\varepsilon_s)$ é a função redutora da tensão de aderência.

Marti et al. [4] desenvolveram o *Tension Chord Model*, um modelo de tirante que pode ser aplicado a problemas de fendilhação, armadura mínima, efeito *Tension-Stiffening* e capacidade de rotação. Este modelo assume um comportamento rígido perfeitamente plástico para a relação aderência-escorregamento, mas quando a extensão nos varões atinge a extensão de cedência, o valor da tensão de aderência cai para metade (Equação (4)).

$$\tau(f_c, \varepsilon_s) = \begin{cases} 0.6 \cdot f_c^{2/3} & ; \varepsilon_s \leq \varepsilon_y \\ 0.3 \cdot f_c^{2/3} & ; \varepsilon_s > \varepsilon_y \end{cases} \quad (4)$$

em que ε_y é a extensão de cedência do aço.

A partir de resultados experimentais em tirantes Mayer e Eligehausen [5] reconheceram a necessidade dos modelos de aderência terem em conta o efeito da cedência e a geometria da superfície dos varões. Estes resultados serão utilizados na Secção 3.1 para a calibração da função $f(\varepsilon_s)$.

Lundgren and Gylltoft [6] desenvolveram um elemento de interface tridimensional para ligar o betão ao varão de aço. Neste elemento de interface a tensão de aderência depende não só do

escorregamento, mas também da deformação radial entre o varão e o betão. Usando este elemento numa análise de elementos finitos é possível prever com sucesso a rotura estrutural por rompimento do aço e por perda de aderência dos varões após a cedência.

Ožbolt et al. [7] apresentaram um elemento de aderência de dois nós que pode ser usado em análises tridimensionais de estruturas de betão. O modelo de resposta é controlado por uma lei de aderência-escorregamento modificada para incluir o carregamento-descarregamento-recarregamento, a geometria do betão e as extensões últimas do betão e do aço (Equação (5)). Este modelo recorre a análises não locais na zona dos varões.

$$\Omega_s(\varepsilon_s) = \begin{cases} 1.0 & ; \quad \varepsilon_s < \varepsilon_y \\ 1.0 - \alpha \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_y}{\varepsilon_u - \varepsilon_y} & ; \quad \varepsilon_y < \varepsilon_s < \varepsilon_u \\ 1.0 - \alpha & ; \quad \varepsilon_u < \varepsilon_s \end{cases} \quad (5)$$

em que: $\Omega_s(\varepsilon_s)$ é a função de redução da tensão de aderência e α é o parâmetro que controla as tensões residuais.

Lowes et al. [8] propuseram um elemento de aderência cujo modelo constitutivo inclui a uma relação aderência-escorregamento típica, assim como os efeitos da pressão de confinamento no betão, o dano no betão, a extensão no aço (Equação (6)) e outros parâmetros específicos para carregamentos cíclicos. Contudo, esta formulação calcula alguns parâmetros essenciais através de análises não locais.

$$\Gamma_2(\varepsilon_s) = \begin{cases} 1.0 & ; \quad \varepsilon_s < \varepsilon_y \\ 0.1 + 0.9 e^{0.4 \left(1 - \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_y}\right)} & ; \quad \varepsilon_s > \varepsilon_y \end{cases} \quad (6)$$

em que: $\Gamma_2(\varepsilon_s)$ é a função de redução da tensão de aderência.

Ruiz et al. [9] apresentaram dois modelos analíticos que simulam o comportamento da aderência dos varões no betão armado, tanto na pré-cedência como na pós-cedência. Para além do escorregamento, também a extensão e a tensão do aço são utilizadas no cálculo da tensão de aderência. A cedência das armaduras é um aspeto importante nestes modelos conforme ilustram os dois parâmetros das Equações (7) e (8).

$$\text{Square-Root Model:} \quad k_b(\varepsilon_s) = \frac{\varepsilon_{bu} - \varepsilon_s}{\varepsilon_{bu} - \varepsilon_y} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_s}} \quad 0 \leq k_b(\varepsilon_s) \leq 1 \quad (7)$$

$$\text{Rigid-Plastic Model:} \quad k_b(\varepsilon_s) = e^{10 \cdot (\varepsilon_y - \varepsilon_s)} \quad 0 \leq k_b(\varepsilon_s) \leq 1 \quad (8)$$

em que: $k_b(\varepsilon_s)$ é a função redutora da tensão de aderência, $\varepsilon_{bu} = 4 \cdot a/\phi [\approx 0.07 \text{ a } 0.12]$ e a é a altura das nervuras dos varões.

Wu e Gilbert [10] propuseram uma relação aderência-escorregamento baseada no modelo do MC90 [11], mas adequadamente modificada de modo a incluir os efeitos do dano no betão, da tensão no aço (Equação (9)) e do confinamento. Estes autores implementaram a sua formulação num programa de elementos finitos existente, para análise não linear material de estruturas.

$$\lambda_2(\sigma_s) = \begin{cases} 1.0 & ; & \sigma_s < 250 \text{ MPa} \\ 2.0 - 0.004 \cdot \sigma_s & ; & 250 \text{ MPa} \leq \sigma_s \leq 500 \text{ MPa} \\ 0.0 & ; & \sigma_s > 500 \text{ MPa} \end{cases} \quad (9)$$

em que: $\lambda_2(\sigma_s)$ é a função redutora da tensão de aderência e σ_s é a tensão nos varões de aço. De acordo com o MC2010 [2], a relação aderência-eskorregamento é consideravelmente influenciada pela cedência das armaduras e pela pressão transversal. Deste modo, o MC2010 define dois fatores para a redução do valor da tensão de aderência: o primeiro depende da extensão do aço (Equação (10)) enquanto o segundo depende da tensão de compressão (perpendicular ao eixo dos varões).

$$\Omega_y(\varepsilon_s) = \begin{cases} 1.0 & ; & \varepsilon_s \leq \varepsilon_y \\ 1.0 - \left[0.85 \cdot \left(1.0 - e^{-5 \cdot a \cdot b} \right) \right] & ; & \varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_u \end{cases} \quad (10)$$

$$a = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_y}{\varepsilon_u - \varepsilon_y} ; \quad b = \left[2.0 - \frac{f_t}{f_y} \right]^2 \quad (11)$$

em que: $\Omega_y(\varepsilon_s)$ é a função redutora da tensão de aderência e os parâmetros a e b podem ser calculados a partir das Equações (11).

Lee et al. [12] apresentaram um modelo de *Tension-Stiffening* que permite o cálculo das tensões médias de tração no betão após a cedência das armaduras. Este modelo usa um dos fatores propostos por Ruiz et al. [9] para a influência da extensão do aço na tensão de aderência. Este modelo simples mostrou boa concordância com os resultados experimentais incluindo a fase de pós-cedência das armaduras.

Os estudos acima referidos reconhecem a influência da extensão do aço na relação aderência-eskorregamento após a cedência das armaduras. Por este motivo, a sua implementação nos modelos de elementos finitos assume uma relevância elevada. Os modelos clássicos que usam elementos de mola cujo comportamento material é não linear não podem ser aplicados porque apenas o eskorregamento é utilizado no cálculo da aderência. Wu e Gilbert [10] desenvolveram e implementaram com sucesso um elemento de aderência (incluindo o eskorregamento e a extensão do aço), mas utilizando análises não locais, isto é, em que as tensões de determinado elemento finito dependem também das extensões registadas nos elementos vizinhos. Nos estudos até agora publicados não foram desenvolvidos elementos de aderência que incluam o eskorregamento e a extensão do aço na sua formulação, sem utilizar análises não locais.

Assim, o objetivo deste artigo consiste no desenvolvimento de um elemento finito de aderência para ligar o betão ao aço que tenha em conta a extensão do aço na relação aderência-eskorregamento, sem modificar a estrutura corrente dos programas de elementos finitos. Para esse fim: i) um novo elemento de aderência é formulado, ii) diversos modelos numéricos são aplicados, e iii) os resultados numéricos são comparados com os resultados experimentais.

Os resultados obtidos nas simulações numéricas que usam o elemento de aderência desenvolvido podem ser usados no estudo de alguns problemas notáveis das estruturas de betão armado, como: abertura e espaçamento entre fendas, armadura mínima, rigidez

fendilhada devido ao efeito de *tension stiffening*, rotação plástica, ductilidade e deformação. Com a constante evolução do poder de processamento computacional é expectável que a modelação das estruturas de betão armado tenda para a utilização de malhas de elementos finitos cada vez mais refinadas, em que este novo elemento de aderência pode ser utilizado.

2. FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE ADERÊNCIA

O elemento de aderência foi implementado no programa de cálculo automático *Diana 9.4.2* [13], que possibilita aos utilizadores definirem e implementarem novas formulações para os materiais. Através do módulo *General User-Supplied Material Model* apenas a sub-rotina USRMAT que calcula as tensões totais (σ) e a rigidez (D) necessita de ser definida, em linguagem de programação *Fortran*. O resto do código computacional assim como a sua estrutura mantém-se inalterado. Para além dos dados (materiais e geométricos) definidos inicialmente pelo utilizador, as variáveis de entrada da sub-rotina são as extensões totais (ϵ), as tensões totais (σ) e a rigidez (D) no início de cada incremento, assim como as extensões incrementais ($\Delta\epsilon$), enquanto as variáveis de saída são as tensões totais (σ) e a rigidez (D).

O elemento de aderência desenvolvido neste artigo consiste num elemento ortotrópico de estado plano de tensão com quatro nós, cujas leis constitutivas foram modificadas de modo a satisfazer a relação aderência-eskorregamento. A influência da extensão do aço na aderência pode ser incluída tomando em consideração alguns pressupostos. Embora este elemento tenha sido aplicado com outros elementos de estado plano de tensão (2D), ele pode ser aplicado com elementos volumétricos (3D). Os varões são simulados como elementos de treliça e o betão através de elementos de estado plano de tensão.

Na Figura 1 é mostrada a ligação entre o betão e o varão de aço utilizando o elemento de aderência desenvolvido. O elemento de aderência liga ao betão nos nós 1 e 2, e ao varão de aço nos nós 3 e 4. De um modo simples, a tensão de corte (τ_{xy}) será relacionada com a tensão de aderência (τ_θ), enquanto a distorção (γ_{xy}) será relacionada com o eskorregamento (s). Para evitar distorções adicionais não motivadas pelo eskorregamento relativo aço-betão são ainda adicionadas molas auxiliares com rigidez (teoricamente) infinita a ligar os nós 1 e 4, e 2 e 3. De modo a simplificar o problema e a descrever mais facilmente a formulação apenas um ponto de integração será utilizado no elemento de aderência.

Na sub-rotina USRMAT as tensões totais (σ) e a rigidez tangente (D) são calculadas de acordo com as Equações (12) e (13). Nas tensões totais, a primeira componente (σ_{xx}) é nula para não introduzir rigidez adicional na estrutura, a segunda componente (σ_{yy}) permanece elástica por razões numéricas, enquanto a terceira componente (τ_{xy}) transmite a aderência. Na rigidez, todas as direções são independentes (coeficiente de Poisson nulo) e os seus valores derivam das tensões totais, exceto o primeiro valor por razões numéricas.

Dentro da sub-rotina USRMAT apenas as deformações do elemento (ϵ) estão disponíveis, pelo que os valores do eskorregamento (s) e da extensão do aço (ϵ_s) serão obtidos a partir das extensões do elemento ϵ_{xx} e γ_{xy} respetivamente, conforme se verá mais à frente. Assim, as Equações (12) e (13) dão origem às Equações (14) e (15), totalmente formuladas com variáveis intrínsecas ao elemento.

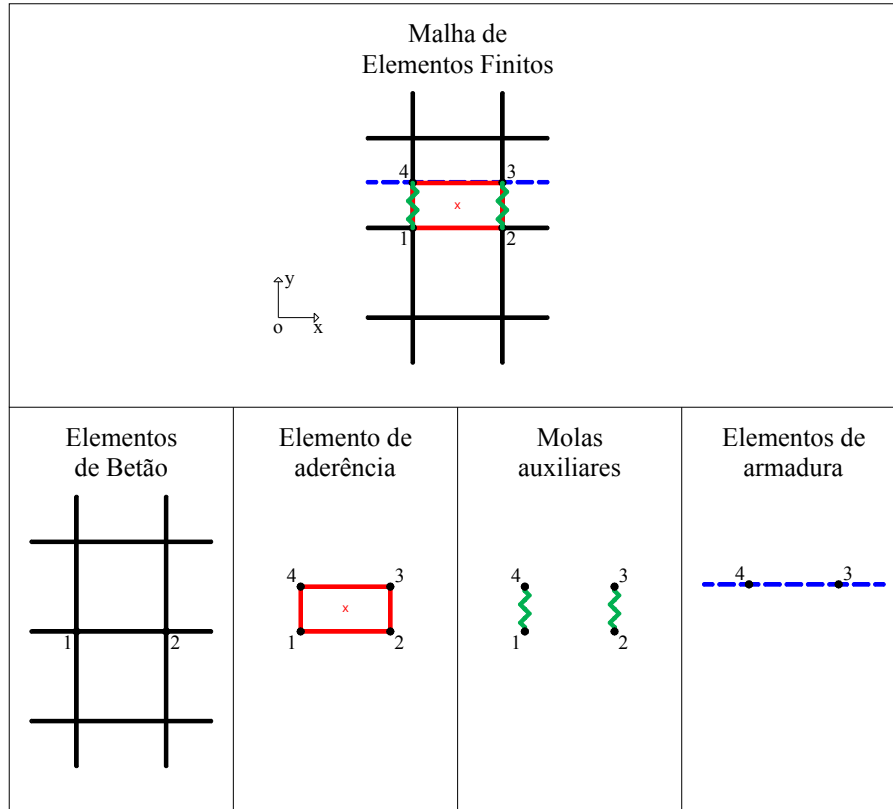


Figura 1 – Malha de elementos finitos junto aos varões.

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ E_c \cdot \varepsilon_{yy} \\ \tau_{xy}(s, \varepsilon_s) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E_c & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d\tau_{xy}(s, \varepsilon_s)}{d\gamma_{xy}} \end{bmatrix} \quad (13)$$

em que: E_c é o módulo de elasticidade do betão, ε_{yy} é a extensão segundo o eixo dos yy, τ_{xy} é a tensão de corte, s é o escorregamento, ε_s é a extensão no varão de aço e γ_{xy} é a distorção.

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ E_c \cdot \varepsilon_{yy} \\ \tau_{xy}(\varepsilon_{xx}, \gamma_{xy}) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E_c & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d\tau_{xy}(\varepsilon_{xx}, \gamma_{xy})}{d\gamma_{xy}} \end{bmatrix} \quad (15)$$

em que: ε_{xx} é a extensão segundo o eixo OX e γ_{xy} é a distorção devida ao corte.

Na Figura 2 é aplicada uma força no varão de aço. Note-se que, tal como na Figura 5, a configuração deformada do elemento só é válida se se considerarem as molas auxiliares anteriormente referidas. Deste modo a tensão de corte (τ_{xy}) no elemento pode ser calculada a partir da força aplicada (F) e do comprimento do elemento (L), conforme indicado na Equação (16), considerando uma largura unitária.

Na Figura 3 é mostrada a configuração simplificada de um ensaio de arrancamento (*Pull-Out*), de onde habitualmente a curva aderência-escorregamento é obtida. Se o elemento for suficientemente pequeno, a tensão de aderência média (τ_0) pode ser calculada a partir da força aplicada (F), do comprimento do elemento (L) e da área lateral do varão (A_l) por unidade de comprimento, de acordo com a Equação (17). Por sua vez, a área lateral (A_l) pode ser calculada a partir da Equação (18) válida para vários varões.

A partir das Equações (16) e (17) a tensão de corte (τ_{xy}) pode ser obtida como função da tensão de aderência (τ_0) e da área lateral (A_l), conforme mostra a Equação (19). Esta é a principal equação do problema uma vez que relaciona a tensão de corte (τ_{xy}) no elemento de aderência desenvolvido com a tensão de aderência (τ_0) no contacto aço-betão.

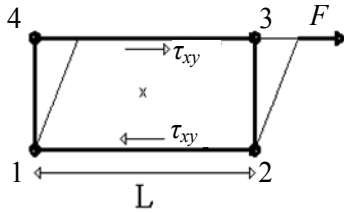


Figura 2 – Tensão de corte (τ_{xy}) no elemento.

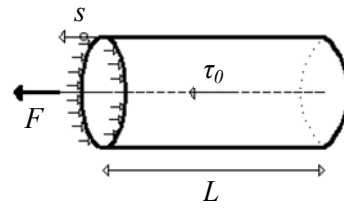


Figura 3 – Ensaio *Pull-Out*.

$$\tau_{xy} = \frac{F}{L} \quad (16)$$

$$\tau_0 = \frac{F}{L \cdot A_l} \quad (17)$$

$$A_l = \pi \cdot n \cdot \varnothing \quad (18)$$

$$\tau_{xy} = \tau_0 \cdot A_l \quad (19)$$

em que: n é o número de varões e $\varnothing$ é o diâmetro dos varões.

Até aqui foram apresentadas as expressões básicas das tensões totais (σ) e da rigidez (D). Nestas expressões apenas a tensão de aderência (τ_0) é função do escorregamento (s) e da extensão do aço (ε_s), sendo os outros parâmetros constantes em cada incremento. Nos próximos parágrafos estes três parâmetros (τ_0 , s e ε_s) serão introduzidos com maior detalhe.

A Equação (19) assume a forma de função uma vez que a tensão de corte (τ_{xy}) depende do escorregamento (s) e da extensão do aço (ε_s). De modo a ter em conta a influência da extensão do aço na aderência esta função é dividida em duas partes, tornando-se numa função definida por partes. Dependendo da extensão no varão de aço (ε_s), inferior ou superior à extensão de cedência (ε_y), é escolhida uma opção diferente. Quando $\varepsilon_s \leq \varepsilon_y$ a relação clássica aderência-escorregamento é aplicada (primeira parte da Equação (20)), no entanto quando $\varepsilon_s > \varepsilon_y$ o valor de τ_0 é fixado e um novo fator $f(\varepsilon_s)$ dependente apenas da extensão do aço passa a controlar a aderência (segunda parte da Equação (20)).

$$\tau_{xy}(s, \varepsilon_s) = \begin{cases} \tau_0(s) \cdot A_l & ; \quad 0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_y \\ \tau_0(s_{\varepsilon_y}) \cdot A_l \cdot f(\varepsilon_s) & ; \quad \varepsilon_s > \varepsilon_y \end{cases} \quad (20)$$

em que: s_{ε_y} é o escorregamento correspondente ao instante em que ocorre a cedência e $f(\varepsilon_s)$ é a função redutora da tensão de aderência.

O segundo termo é diferente da expressão do MC2010 [2] exibida na Equação (21). Note-se que embora $f(\varepsilon_s)$ e $\Omega_y(\varepsilon_s)$ sejam funções semelhantes (Figura 4), o segundo termo da Equação (20) fixa o valor de τ_0 , o que não acontece na expressão do MC2010. Na Secção 3 os resultados das duas equações serão comparados.

A relação de aderência-escorregamento $\tau_0(s)$ escolhida para a formulação apresentada foi a expressão proposta no MC2010, idêntica à existente no MC90, na medida em que reproduz bastante bem os resultados experimentais dos ensaios *Pull-Out*. Esta expressão é apresentada na Equação (22).

$$\tau_{xy}(s, \varepsilon_s) = \tau_0(s) \cdot A_l \cdot \Omega_y(\varepsilon_s) \quad (21)$$

$$\tau_0(s) = \begin{cases} 2.5 \cdot \sqrt{f_c} \cdot s^{0.4} & ; \quad 0 \leq s \leq 1.0 \\ 2.5 \cdot \sqrt{f_c} & ; \quad 1.0 < s \leq 2.0 \\ \sqrt{f_c} \cdot \left(2.5 - 1.5 \cdot \frac{s - 2.0}{c_{clear} - 2.0} \right) & ; \quad 2.0 < s \leq c_{clear} \\ \sqrt{f_c} & ; \quad s > c_{clear} \end{cases} \quad (22)$$

em que: f_c é a resistência à compressão do betão e c_{clear} é a distância entre as nervuras do varão.

A função $f(\varepsilon_s)$ foi obtida por calibração com resultados experimentais existentes na bibliografia, nomeadamente os tirantes de Mayer e Eligehausen [5]. Esta função, também definida por partes, é apresentada na Equação (23).

$$f(\varepsilon_s) = \begin{cases} 1.0 & ; \quad 0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_y \\ e^{-50 \cdot \varepsilon_s} \geq 0.25 & ; \quad \varepsilon_s \geq \varepsilon_y \end{cases} \quad (23)$$

Na Figura 4 compara-se a função $f(\varepsilon_s)$ acima apresentada com as diversas propostas existentes na literatura para a função de redução de $\tau_0(s)$. Nesta simulação foram utilizados os seguintes

dados habituais nos varões de aço: $\varepsilon_y = 2.5 \%$, $\varepsilon_u = 100 \%$, $f_y = 550 \text{ MPa}$ e $f_t = 650 \text{ MPa}$. Embora nem todas as curvas sejam diretamente comparáveis pois estão associadas a expressões $\tau_0(s)$ diferentes é possível constatar alguma semelhança na forma global das curvas.

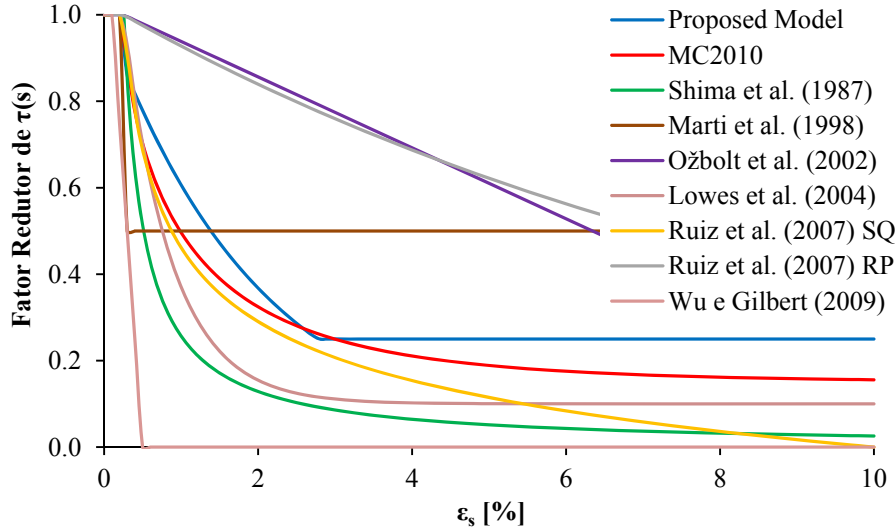


Figura 4 – Comparação dos fatores de redução.

Finalmente, deduzem-se os valores do escorregamento (s) e da extensão do aço (ε_s) a partir das extensões do elemento de aderência. Na Figura 5 é introduzido um escorregamento uniforme no varão de aço. Constata-se que o escorregamento (s) pode ser calculado a partir da extensão de corte (γ_{xy}) e da altura do elemento (H), de acordo a Equação (24). Na Figura 6 aplica-se uma extensão no varão de aço. Verifica-se que a extensão do aço (ε_s) pode ser estimada a partir da extensão segundo o eixo OX do elemento (ε_{xx}), como mostrado na Equação (25). Para a dedução destas duas últimas equações pressupõe-se que a extensão no betão era nula, o que em rigor não é verdade. No entanto, no betão armado fendilhado a extensão nos varões de aço é bastante superior à extensão do betão, principalmente junto às fendas, podendo portanto desprezar-se a extensão do betão. Por este motivo, estas duas equações são escritas com o sinal de aproximação.

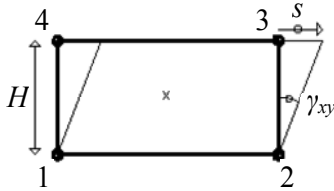


Figura 5 – Estimativa do escorregamento (s).

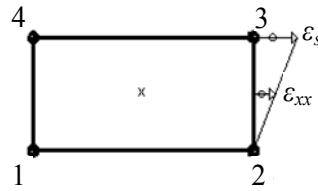


Figura 6 – Estimativa da extensão do aço (ε_s).

$$s \approx \gamma_{xy} \cdot H \quad (24)$$

$$\varepsilon_s \approx 2 \cdot \varepsilon_{xx} \quad (25)$$

Na Figura 7 mostra-se o fluxograma de cálculo da sub-rotina USRMAT desenvolvida com as diversas etapas necessárias para a obtenção das matrizes das tensões totais (σ) e da rigidez tangente (D). Em todos os modelos numéricos desenvolvidos na Secção 3 foi utilizada uma relação $H/L = 0.10$, assim como uma rigidez axial para as molas auxiliares de 10^{15} N/m.

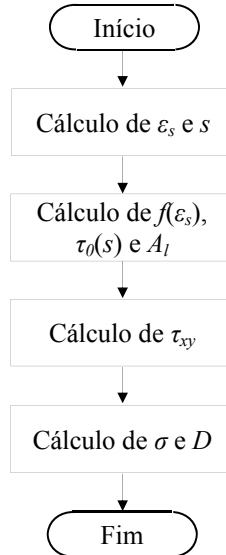


Figura 7 – Fluxograma de cálculo da sub-rotina USRMAT.

3. COMPARAÇÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS

De modo a aferir a aplicabilidade do elemento de aderência desenvolvido são realizadas nesta secção diversas comparações de resultados numéricos com resultados experimentais. Para esse fim foram seleccionadas três situações distintas para o betão: i) tração, ii) compressão e iii) flexão, tendo o aço ultrapassado claramente a extensão de cedência em todos os casos.

3.1. Ensaio à Tração em Tirantes

Mayer e Eligehausen [5] ensaiaram até à rotura diversos tirantes de betão armado. A função $f(\varepsilon_s)$ foi calibrada de modo a tentar simular adequadamente quatro destes ensaios. A opção por estes ensaios para a calibração deveu-se: i) ao facto se entender que estes são suficientemente representativos do estado da arte atual, ii) por serem ensaios à tração pura e, iii) por os seus resultados serem globais.

3.1.1. Configuração dos Ensaio

Na Figura 8 apresenta-se a configuração dos ensaios em tirantes, enquanto na Tabela 1 se detalham as dimensões dos provetes seleccionados para esta comparação e a quantidade de armadura utilizada. De acordo com os autores o campo de medida foi inferior ao comprimento

total uma vez que nos extremos a quantidade de armadura era superior para evitar roturas na ligação ao pórtico externo. Foram escolhidos dois diâmetros representativos de vigas correntes (12 e 16 mm) e duas percentagens geométricas de armadura (0.5 e 1.0 %).

Tabela 1 – Tirantes de Mayer e Eligehausen [5] seleccionados.

Designação	ρ [%]	Dimensões [m]
4Ø12	0.50	0.30 x 0.30 x 2.50
4Ø16	0.50	0.40 x 0.40 x 2.70
8Ø12	1.00	0.30 x 0.30 x 2.50
8Ø16	1.00	0.40 x 0.40 x 2.70

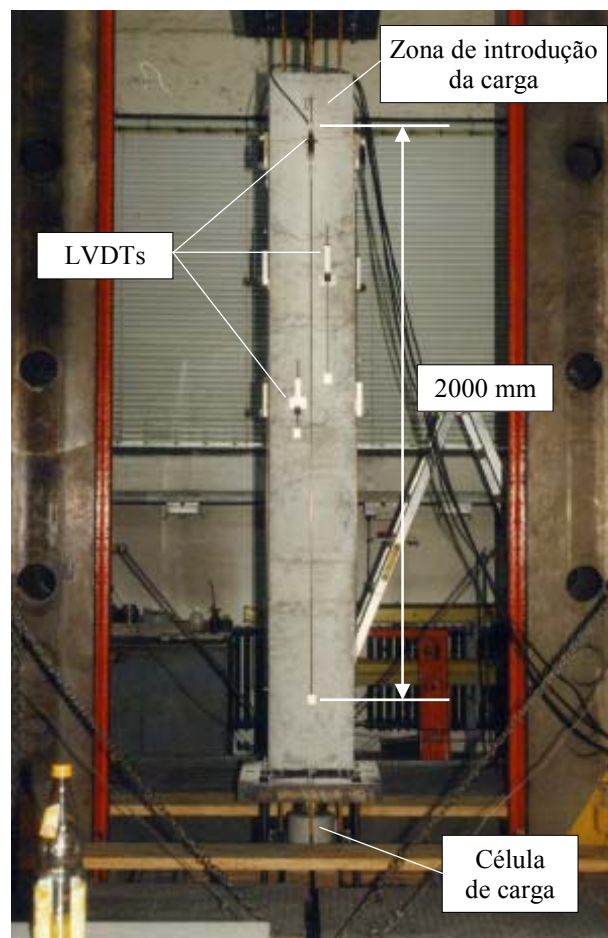


Figura 8 – Configuração dos ensaios (adaptado de Mayer e Eligehausen [5]).

3.1.2. Modelo Numérico

Para simular estes tirantes foram realizados modelos numéricos de elementos finitos em

estado plano de tensão. Na Figura 9 apresentam-se os elementos principais da malha de elementos finitos para um dos tirantes com $\rho = 0.50\%$, os apoios e o carregamento. Designam-se por elementos principais os elementos iniciais de cada material que posteriormente são subdivididos em elementos de dimensão mais reduzida. Na Figura 9 representa-se: i) a preto o betão, ii) a azul os varões de aço e os elementos de aderência e, iii) a vermelho os estribos. A ligação entre o betão, os elementos de aderência e os varões de aço foi idêntica à da Figura 1.

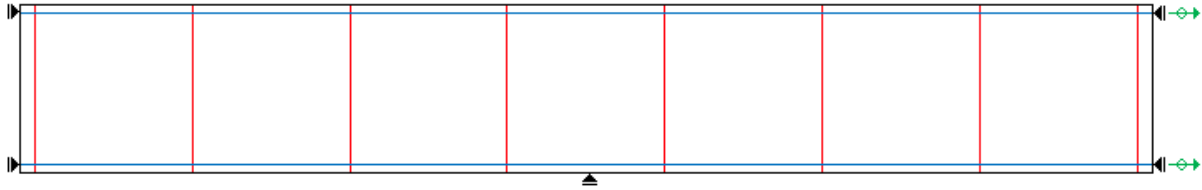


Figura 9 – Elementos principais da malha de elementos finitos de um tirante.

O betão foi simulado com elementos de quatro nós em estado plano de tensão, com dimensões $0.01 \times 0.01 \text{ m}^2$ e esquema de integração 2×2 pontos de Gauss. Os estribos foram simulados através de elementos de armadura embebidos do tipo barra. Os varões longitudinais e os elementos de aderência foram simulados de acordo com o apresentado na Secção 2, com dimensões de 0.01 m (varões) e $0.01 \times 0.001 \text{ m}^2$ (aderência), e com um esquema de integração de 1×1 ponto de Gauss.

O carregamento foi implementado através de incrementos de deslocamento conforme indicado na Figura 9. O método de resolução do sistema de equações utilizado foi o método secante designado por BFGS [13]. Para os critérios de convergência foram escolhidas as normas de força, energia e deslocamento. De modo a atingir a convergência mais rapidamente foi ainda selecionado o algoritmo designado por *Line Search*.

Para os varões de aço e os estribos foi escolhido o modelo de plasticidade isotrópica de Von Mises, enquanto para o betão foi utilizado um modelo elasto-plástico baseado na combinação de dois critérios de cedência: i) o critério de Rankine para a tração, e ii) o critério de Drucker-Prager para a compressão. Os valores das propriedades mecânicas de resistência e deformabilidade dos materiais corresponderam exatamente ao reportado pelos autores.

3.1.3. Resultados

Nas Figuras 10 a 13 mostram-se para cada tirante as curvas com o rácio entre a extensão média do aço (ε_{sm}) e a extensão do aço na fenda (ε_{sr}) como função da extensão do aço na fenda (ε_{sr}). Relembre-se que o elemento de aderência proposto tanto pode ser utilizado quando se considera o efeito da extensão do aço na aderência (curvas ‘Modelo Proposto’ e ‘MC2010’), como quando este efeito não é considerado (curva ‘MC90’), bastando para tal desativar o fator redutor da aderência. Deste modo, os resultados base são representados pela curva ‘MC90’ que engloba apenas a função $\tau_0(s)$ (Equação (22)), enquanto o efeito da extensão do aço na aderência é conseguido juntando a função $f(\varepsilon_s)$ (Equação (23)) no caso da curva ‘Modelo Proposto’, ou a função $\mathcal{Q}_y(\varepsilon_s)$ (Equação (10)) no caso da curva ‘MC2010’.

Constatou-se que o efeito da extensão do aço na aderência desempenha um papel importante no comportamento médio dos elementos estruturais, principalmente após a extensão permanente no patamar de cedência ser atingida. De uma forma geral verificou-se também que o modelo proposto obteve melhor concordância com os resultados experimentais do que o MC2010.

Do ponto de vista da ductilidade estrutural notou-se uma tendência para o aumento da extensão média do aço (ε_{sm}) à medida que o diâmetro dos varões e/ou a quantidade de armadura aumentam. Este aspeto foi adequadamente simulado pelo modelo proposto, o que é importante para o atingir dos objetivos deste artigo.

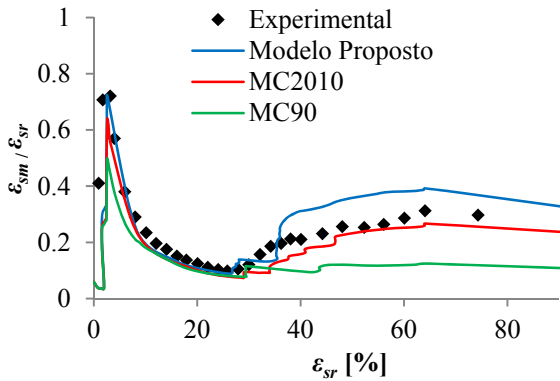


Figura 10 – Tirante 4Ø12: comparação com ensaio experimental.

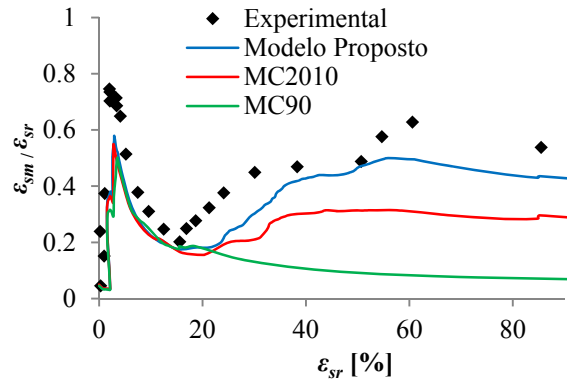


Figura 11 – Tirante 4Ø16: comparação com ensaio experimental.

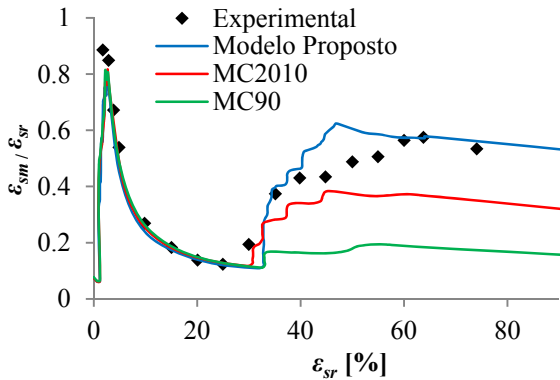


Figura 12 – Tirante 8Ø12: comparação com ensaio experimental.

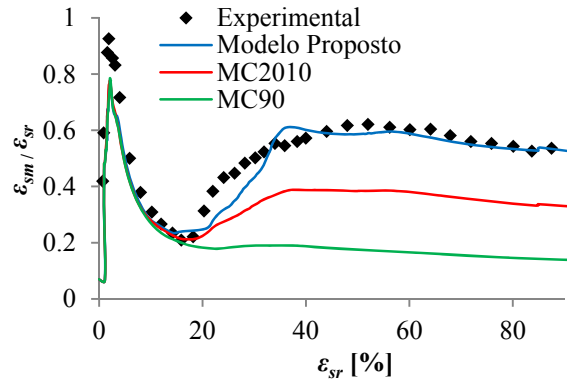


Figura 13 – Tirante 8Ø16: comparação com ensaio experimental.

3.2. Ensaios Pull-Out

Os ensaios *Pull-Out* são habitualmente utilizados para a obtenção da curva $\tau_0(s)$, pelo há alguma informação conjunta disponível na literatura relativamente a tensões de aderência, extensões no aço e escorregamento. Importa lembrar que nos ensaios *Pull-Out* o betão está comprimido e portanto não apresenta fendilhação à escala global. Apesar da extensão do aço ultrapassar claramente a extensão de cedência, a função $f(\varepsilon_s)$ foi calibrada para uma situação

de betão fendilhado, pelo que importa avaliar da aplicabilidade do modelo proposto à situação de betão não fendilhado.

3.2.1. Configuração dos Ensaios

Para esse fim foram seleccionados dois ensaios *Pull-Out* existentes na literatura: i) o primeiro da autoria de Shima et al. [3], e ii) o segundo da autoria de Bigaj [14]. A configuração dos dois ensaios (Figuras 14 e 15) não é muito distinta, diferindo ligeiramente na dimensão do diâmetro dos varões e consequentemente no comprimento de amarração. Já os varões de aço de Shima et al. [3] tinham uma tensão de cedência superior a 820 MPa e uma extensão na força máxima de apenas 4.5 %, enquanto os varões de Bigaj [14] apresentavam propriedades mecânicas correntes de um aço B500C.

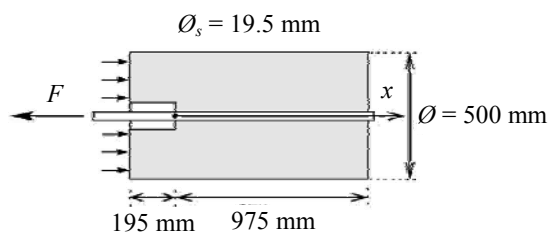


Figura 14 – Configuração do ensaio *Pull-Out* de Shima et al. [3] (adaptado de Ruiz et al. [9]).

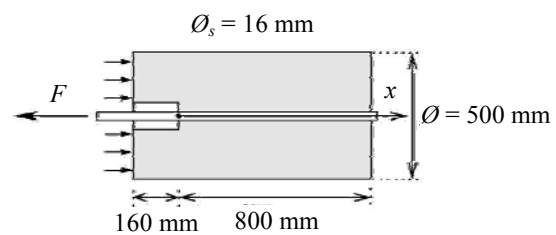


Figura 15 – Configuração do ensaio *Pull-Out* de Bigaj [14] (adaptado de Ruiz et al. [9]).

3.2.2. Modelo Numérico

Na Figura 16 apresentam-se os elementos principais da malha de elementos finitos para um dos ensaios, os apoios e o carregamento. Dada a simetria horizontal do ensaio apenas metade dos elementos foram simulados colocando-se os devidos apoios verticais e reduzindo-se a área do varão e de aderência a metade. Como o provete ensaiado é cilíndrico e os elementos do modelo numérico são de estado plano dividiu-se ainda a malha de betão em quatro zonas, para cada uma ficar com uma espessura diferente. Com exceção dos valores das propriedades mecânicas dos materiais, definidas de acordo com o reportado pelos respetivos autores, todos os outros parâmetros relativos ao modelo numérico são idênticos ao descrito na Secção 3.1.2.

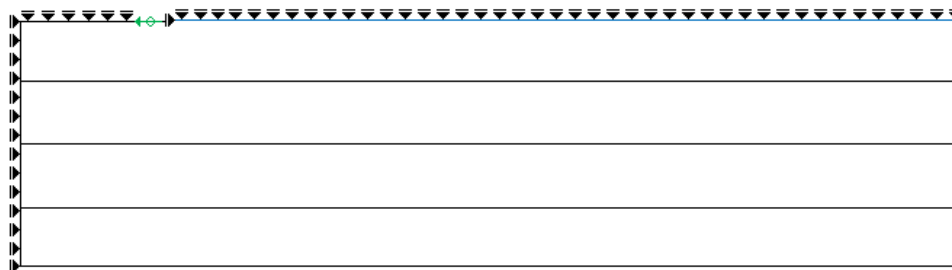


Figura 16 – Elementos principais da malha de elementos finitos para os ensaios *Pull-Out*.

3.2.3. Resultados

Nas Figuras 17 a 22 comparam-se as tensões de aderência, as extensões no aço e o escorregamento ao longo da profundidade do elemento. De uma forma geral, os modelos que englobam o efeito da extensão do aço na aderência apresentaram resultados muito mais próximos dos resultados experimentais do que o modelo base (MC90). A curva da tensão de aderência do modelo proposto na zona inicial, quando a extensão do aço é elevada, afastou-se da curva experimental no caso do ensaio de Bigaj. No entanto, nem com o modelo base (MC90) foi possível obter uma curva realista. Já no ensaio de Shima et al. o modelo proposto apresentou resultados interessantes.

Relativamente à extensão do aço, o modelo proposto apresentou resultados próximos dos obtidos nos ensaios experimentais com exceção da zona de transição (patamar de cedência). Nesta zona as extensões no aço foram inferiores às registadas no ensaio de Shima et al., mas superiores às registadas no ensaio de Bigaj. Por sua vez, em ambos os ensaios o modelo do MC2010 apresentou extensões no aço inferiores ao modelo proposto. Já o modelo do MC90 originou um comprimento de plastificação do aço muito curto.

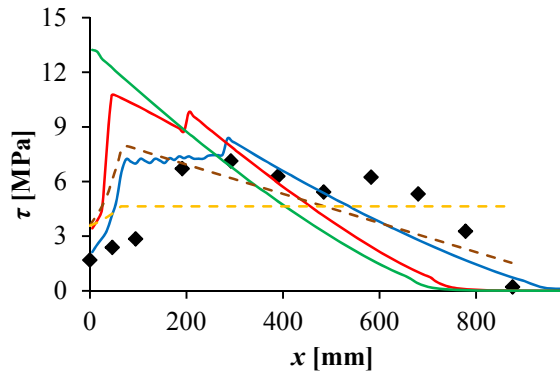


Figura 17 – Ensaio SD70 [3]: tensão de aderência.

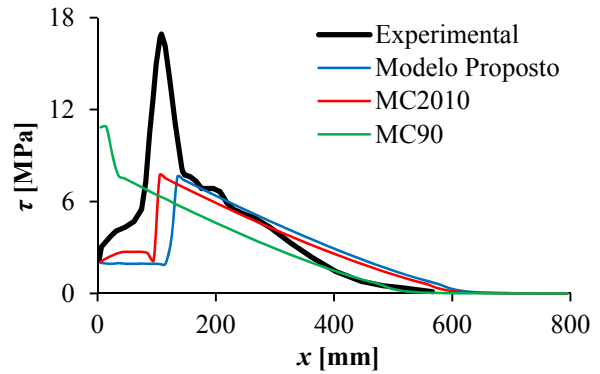


Figura 18 – Ensaio P.16.16.1 [14]: tensão de aderência.

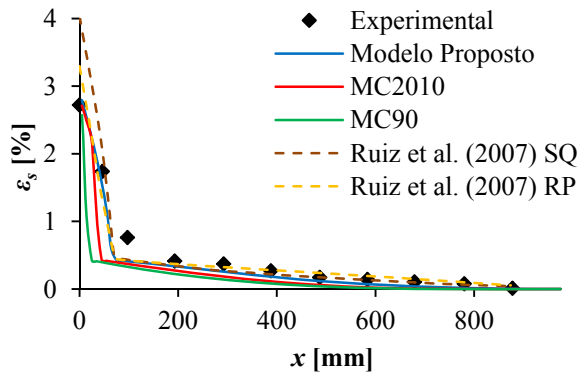


Figura 19 – Ensaio SD70 [3]: extensão do aço.

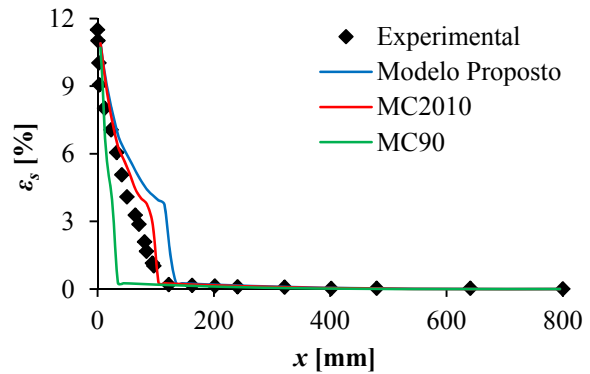


Figura 20 – Ensaio P.16.16.1 [14]: extensão do aço.

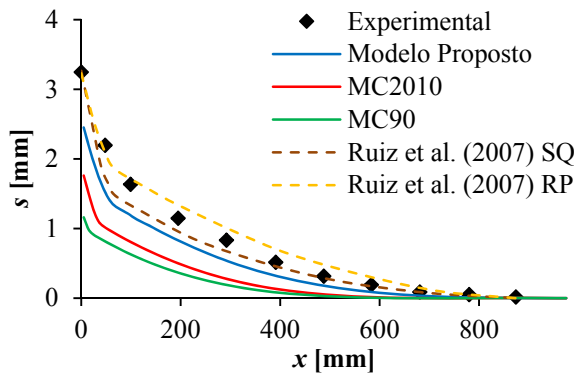


Figura 21 – Ensaio SD70 [3]: escorregamento.

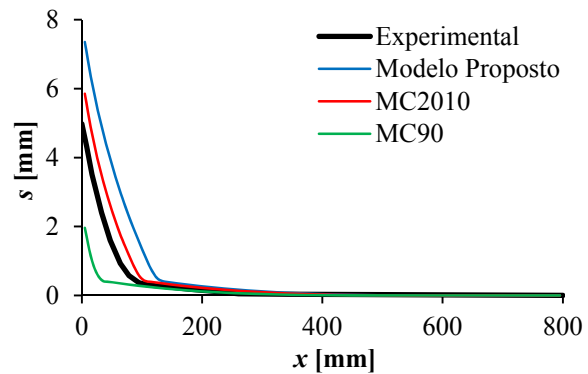


Figura 22 – Ensaio P.16.16.1 [14]: escorregamento.

De uma forma simplificada a curva do escorregamento representa o integral da curva da extensão do aço, pelo que as conclusões relativamente ao desempenho dos modelos são idênticas às referidas para a extensão do aço. Assim, o escorregamento do modelo proposto foi inferior ao registado por Shima et al., mas superior ao registado por Bigaj e, em ambos casos, superior ao modelo do MC2010. Verificou-se ainda que pequenas diferenças na curva da extensão podem refletir-se em grandes diferenças na curva do escorregamento e, portanto a uma dada extensão do aço numa fenda podem corresponder escorregamentos muito distintos.

3.3. Ensaaios à Flexão em Vigas

A terceira situação selecionada para comparação foi o ensaio à flexão pura de uma viga testada por Kenel et al. [15]. Nos elementos submetidos à flexão, o betão junto à armadura encontra-se tracionado, pelo que será de esperar um comportamento mais próximo do obtido nos tirantes do que nos ensaios *Pull-Out*.

3.3.1. Configuração dos Ensaios

Na Figura 23 ilustra-se a configuração do ensaio e as dimensões da viga ensaiada. A viga tinha uma quantidade de armadura de 0.16 %, o que significa que a aderência junto às fendas é um aspeto fundamental na quantificação da ductilidade destas vigas.

3.3.2. Modelo Numérico

Na Figura 24 apresentam-se os elementos principais da malha de elementos finitos do modelo numérico desenvolvido, assim como os apoios e o carregamento. Mais uma vez, com exceção dos valores das propriedades mecânicas dos materiais, definidas de acordo com o reportado pelos respetivos autores, todos os outros parâmetros relativos ao modelo numérico são idênticos ao descrito na Secção 3.1.2.

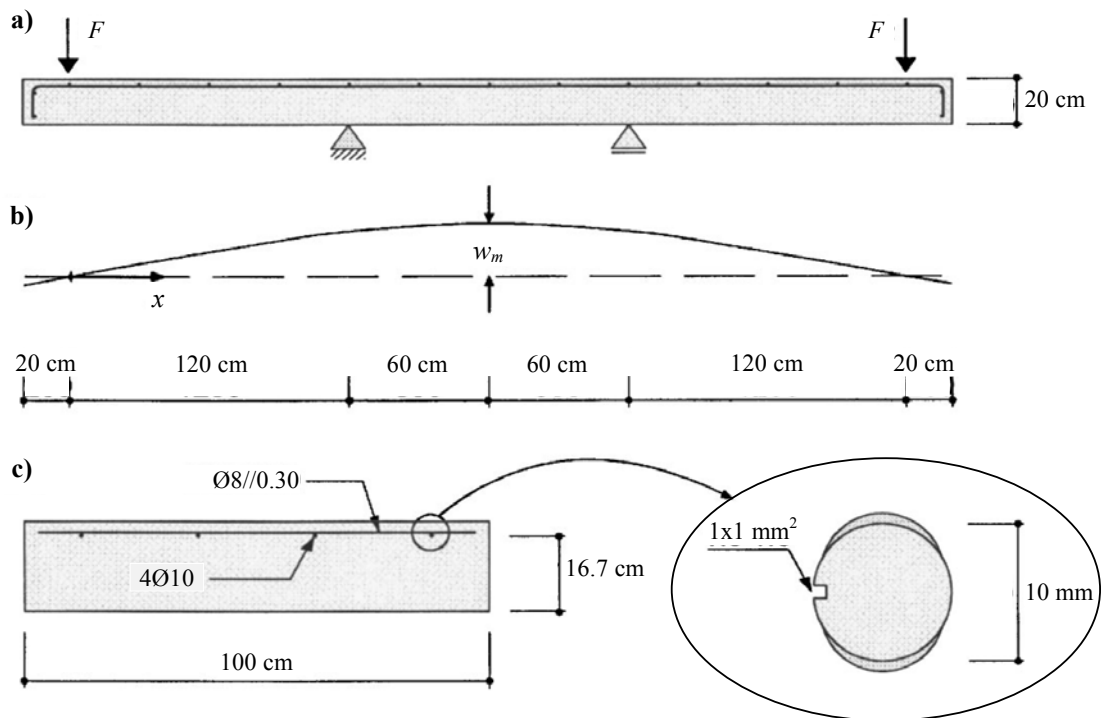


Figura 23 – Configuração do ensaio: a) Alçado, b) Deformada, c) Secção transversal (adaptado de Kenel et al. [15]).

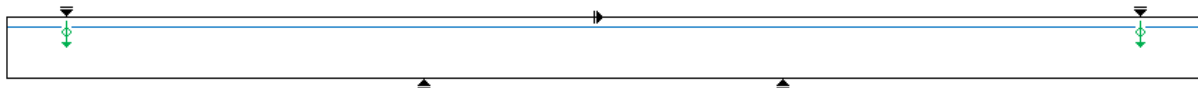


Figura 24 – Elementos principais da malha de elementos finitos para a viga.

3.3.3. Resultados

Na Figura 25 comparam-se os padrões de fendilhação experimental e numérico. O espaçamento entre fendas foi adequadamente simulado. Na Figura 26 comparam-se as extensões no aço junto a uma fenda na zona do meio vão. Tal como nos exemplos anteriores verificou-se que a consideração do efeito da extensão do aço na aderência é fundamental para a obtenção de resultados realistas. Assim, o modelo base (MC90) apresentou uma zona plastificada com um comprimento cerca de 45% inferior ao do ensaio experimental. Relativamente aos outros dois modelos, constatou-se que o modelo proposto foi o que apresentou resultados mais próximos dos registados no ensaio experimental.

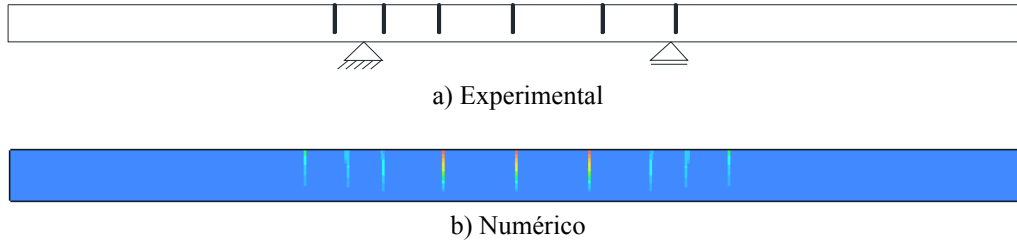


Figura 25 – Padrão de fendilhação: Experimental vs Numérico.

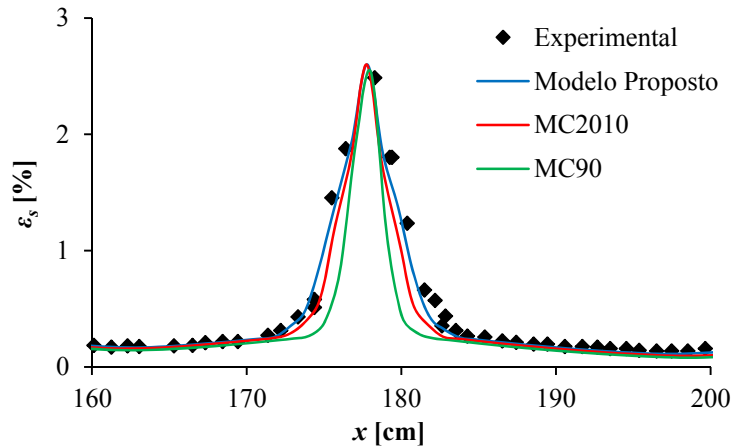


Figura 26 – Ensaio B4 [15]: extensão do aço.

4. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O elemento de aderência proposto permitiu simular a relação aderência-escorregamento incluindo (ou não) o efeito da extensão do aço. Comparando com outras formulações existentes na literatura, referidas na Secção 1, o elemento desenvolvido tem a vantagem de estimar valores realistas para o escorregamento e a extensão do aço a partir das extensões do próprio elemento, portanto sem recorrer a análises não locais ou recolher informação de outros elementos.

Este elemento foi incorporado com sucesso em diversos modelos numéricos para simular ensaios reais em diversas situações do estado de tensão do betão. Em todos os modelos desenvolvidos este elemento funcionou corretamente e proporcionou resultados mais realistas do que os elementos que não consideram o efeito da extensão do aço na aderência. Este facto sugere que o elemento desenvolvido pode ser útil na análise mais complexa de estruturas de betão armado.

Os resultados dos diversos modelos numéricos desenvolvidos indicaram que a função $f(\varepsilon_s)$ (ou outra semelhante) é essencial para se atingirem valores realistas nas extensões do aço e do betão, após a cedência das armaduras. Este facto é consistente com a literatura referida na Secção 1, em que se refere a importância da extensão do aço na relação aderência-

escorregamento. Questiona-se ainda se nos elementos totalmente tracionados não será a extensão do aço a controlar a aderência em vez do escorregamento.

A função proposta para $f(\varepsilon_s)$ proporcionou resultados numéricos bastante concordantes com os resultados experimentais. Para os aços correntes de ductilidade especial a função proposta é semelhante à função mais complexa $\Omega_y(\varepsilon_s)$ do MC2010 [2], contudo a função $f(\varepsilon_s)$ apresenta valores mínimos superiores aos da função $\Omega_y(\varepsilon_s)$. Embora a função RP de Ruiz et al. [9] tenha um decaimento mais rápido aparenta ser também, a par das duas anteriores, uma função apta para a redução da aderência. Já a função proposta por Wu e Gilbert [10], embora não tenha sido demonstrado neste artigo, não parece ser uma função adequada para este fim.

A função $f(\varepsilon_s)$ foi calibrada para os ensaios à tração em tirantes, ou seja, para uma situação em que o betão está tracionado e portanto apresenta alguma degradação. Deste modo, era expectável que os resultados numéricos obtidos nas situações de tração e flexão se aproximassem mais dos resultados experimentais do que nas situações em que o betão se encontra comprimido, conforme veio a verificar-se. Note-se que numa situação de betão comprimido, para além do betão permanecer intacto, ainda existe alguma compressão diametral que aumenta a tensão de aderência. A função $\Omega_y(\varepsilon_s)$ parece ser mais adequada à situação em que o betão está comprimido.

O elemento de aderência e a função $f(\varepsilon_s)$ apresentados permitiram o cálculo rigoroso da extensão do aço na zona das fendas o que é essencial na quantificação da ductilidade estrutural.

5. CONCLUSÕES

Neste artigo foi apresentada a formulação de um novo elemento finito de interface entre o betão e os varões de aço. Inicialmente fez-se uma breve revisão bibliográfica sobre a influência de vários parâmetros, em especial da extensão do aço, na relação aderência-escorregamento em elementos tracionados, principalmente após a cedência dos varões de aço. Posteriormente procedeu-se então à apresentação da formulação do elemento finito. Esta formulação apresenta a vantagem de internamente conseguir estimar não só o escorregamento, mas também a extensão do varão de aço, o que é fundamental para uma correta quantificação da tensão de aderência, conforme referido acima. Foi ainda proposta uma nova função para a redução da aderência à medida que a extensão nos varões de aço aumenta.

A comparação entre os resultados numéricos e experimentais para diversos tipos de esforços dominantes mostrou a conveniência da utilização deste elemento finito para a obtenção de bons resultados e a relevância da influência da extensão do aço na resposta aderência-escorregamento, especialmente em elementos tracionados.

6. REFERÊNCIAS

- [1] fib - Bulletin 10 - Bond of Reinforcement in concrete. 2000, International Federation for Structural Concrete (fib): Lausanne, Switzerland.
- [2] fib - Bulletin 55 - Model Code 2010 - First complete draft, Volume 1. 2010, International Federation for Structural Concrete (fib): Lausanne, Switzerland.

- [3] Shima, H.; Chou, L.-L.; Okamura, H. – Micro and Macro Models for Bond in Reinforced Concrete. *Journal of the Faculty of Engineering, University of Tokyo, Series B*, 1987. 39(2): p. 133-194.
- [4] Marti, P., et al. – Tension Chord Model for Structural Concrete. *Structural Engineering International: Journal of the International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE)*, 1998. 8(4): p. 287-298.
- [5] Mayer, U.; Eligehausen, R. - Bond Behaviour of Ribbed Bars at Inelastic Steel Strains. *Proceedings of: 2nd International Ph.D. Symposium in Civil Engineering*. 1998, Budapest.
- [6] Lundgren, K.; Gylltoft, K. – A model for the bond between concrete and reinforcement. *Magazine of Concrete Research*, 2000. 52(1): p. 53-63.
- [7] Ožbolt, J.; Lettow, S.; Kožar, I. - Discrete bond element for 3D finite element analysis of reinforced concrete structures. *Proceedings of: Bond in Concrete 2002: from research to standards (3rd International Symposium)*. 2002, Budapest, Hungary.
- [8] Lowes, L. N.; Moehle, J. P.; Govindjee, S. – Concrete-steel bond model for use in finite element modeling of reinforced concrete structures. *ACI Structural Journal*, 2004. 101(4): p. 501-511.
- [9] Ruiz, M. F.; Muttoni, A.; Gambarova, P. G. – Analytical modeling of the pre- and postyield behavior of bond in reinforced concrete. *Journal of Structural Engineering-Asce*, 2007. 133(10): p. 1364-1372.
- [10] Wu, H. Q.; Gilbert, R. I. – Modeling short-term tension stiffening in reinforced concrete prisms using a continuum-based finite element model. *Engineering Structures*, 2009. 31(10): p. 2380-2391.
- [11] CEB - CEB-FIP Model Code 1990: Design code. 1993, Thomas Telford Ltd: London.
- [12] Lee, S. C.; Cho, J. Y.; Vecchio, F. J. – Model for post-yield tension stiffening and rebar rupture in concrete members. *Engineering Structures*, 2011. 33(5): p. 1723-1733.
- [13] Manie, J.; Kikstra, W. P. - DIANA-9.42 User's Manual - Material Library. 2010, TNO DIANA BV, Delft.
- [14] Bigaj, A. J. - Structural dependence of rotation capacity of plastic hinges in RC beams and slabs. 1999, Poland: PhD Thesis, Warsaw University of Technology.
- [15] Kenel, A., et al. – Reinforcing steel strains measured by Bragg grating sensors. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 2005. 17(4): p. 423-431.