Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia 2015
Lisboa, 29 de Junho a 2 de Julho 2015

APLICAÇÃO DO MÉTODO DO ELEMENTOS FINITOS , ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA E MÉTODOS ENRIQUECIDOS A ANÁLISE DINÂMICA 1D

Paulo de O. Weinhardt[1*], Mateus Rauen[2], Marcos Arndt[2] e Roberto D. Machado[2]

1: Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia
Setor de Tecnologia
Universidade Federal do Paraná
C.P. 19011 81531-980
e-mail: paulo.weinhardt@gmail.com

2: Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia
Setor de Tecnologia
Universidade Federal do Paraná
C.P. 19011 81531-980
e-mail: rdm@ufpr.br

Palavras chave: Análise Isogeométrica, Métodos dos Elementos Finitos, GFEM, SG-FEM, Análise Dinâmica

Resumo. *Nos últimos 50 anos o Método dos Elementos Finitos (FEM) clássico tem sido amplamente utilizado para lidar com diversos problemas complexos. Naturalmente uma relevante aplicação desses métodos é no estudo do comportamento dinâmico de estruturas civis e mecânicas. O FEM apresenta bons resultados na obtenção das primeiras frequências, mas possui alto custo computacional para atingir melhor precisão em frequências mais altas. Assim, métodos alternativos são desenvolvidos para conciliar precisão, eficiência e eficácia. Tendo isto em vista, o presente trabalho visa comparar a performance em problemas dinâmicos em 1D dos métodos Isogeométrico (IGA), FEM e Elementos Finitos Generalizado (GFEM). São propostas técnicas de pré-condicionamento das funções de enriquecimento utilizadas no GFEM, de modo análogo ao proposto pelo Stable GFEM (SGFEM), para tentar melhorar a estabilidade numérica das matrizes de massa e de rigidez no problema de autovetores e autovalores generalizado. Os resultados obtidos numericamente para os espectros de frequência são comparados entre si e com a solução analítica, com o intuito de medir sua acurácia.*

1 INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico aproximado largamente utilizado na análise estrutural. O MEF apresenta bons resultados na obtenção das primeiras frequências, mas possui alto custo computacional para atingir melhor precisão em frequências mais elevadas. Neste contexto, visando as aplicações em engenharia, o Método dos Elementos Finitos Generalizado (MEFG) é uma ferramenta bastante robusta e versátil.

A aplicação do MEFG na análise modal de estruturas reticuladas foi estudada por [1], resultando em resultados com grande acurácia e com boa convergência. Foi dada continuidade aos estudos do MEFG em dinâmica, estendendo as aplicações a onda bidimensional e ao estado planos de tensões, bem como abrangendo a análise transiente além da modal por [2]. Seus trabalhos geram bases firmes para a consolidação do MEFG em análise dinâmica e abrem um campo fértil de aplicabilidade desta ferramenta.

O Método dos Elementos Finitos Generalizado Estabilizado (MEFGE) é proposto como uma alternativa para melhorar o condicionamento numérico do MEFG [3]. Este método consiste na aplicação de uma modificação simples nas funções de enriquecimento antes da sua inclusão no espaço de aproximação do MEFG [4, 5].

O condicionamento das matrizes geradas pelo MEFGE é da mesma ordem de grandeza das matrizes geradas pelo MEF, conforme mostrado matematicamente por [3] e testado numericamente por [4, 5].

Além da estabilidade semelhante ao MEF, o MEGFE preserva as propriedades de convergência do MEFG e acurácia maior que a do MEF [4, 5].

Outras técnicas de estabilização de métodos enriquecidos foram propostas recentemetente, como exposto por [6] e o MEFG-Ortonormalizado apresentado por [7]. É válido ressaltar que estas abordagens recentes visando resolver o problema de condicionamento do MEFG corroboram a relevância deste trabalho.

Alternativamente, é proposta por [8] a utilização de funções NURBS como funções de interpolação. Os resultados alcançados são relevantes, pricipalmente no contexto de análise dinâmica, como testado por [9]. A representação do espectro normalizado para problemas com solução analítica conhecida é adotada como ferramenta de comparação inter-métodos.

2 METODOLOGIA

2.1 Análise Dinâmica - Domínio da Frequência

Segundo [9], a análise modal recai no seguinte problema de autovetores e autovalores generalizado:

$$K\phi = \omega^2 M\phi \tag{1}$$

Onde,

- K: matriz de rigidez
- M: matriz de massa
- ω: frequência natural

- ϕ: vetor de modo de vibração natural

As matrizes K e M estão associadas a discretização e aproximação por Elementos Finitos do Problema Variacional de Valor de Contorno (PVVC) referente ao equilíbrio dinâmico do sistema. Ou seja, as matrizes K e M podem ser escritas como:

$$
\begin{aligned}
K = [k_{ij}] &= \int_{\Omega} \Phi_{i,x}\Phi_{j,x} d\Omega \\
M = [m_{ij}] &= \int_{\Omega} \Phi_{i}\Phi_{j} d\Omega
\end{aligned} \tag{2}
$$

Sendo Φ as funções de interpolação,$\Phi_{,x}$, em notação indicial, sua primeira derivada e Ω o domínio global do problema.

2.1.1 Solução Analítica - Barra bi-engastada

Visando a possibilidade de uma comparação eficaz dos métodos aproximados, o presente trabalho se restringiu a aplicação em um problema com solução analítica disponível. Para o caso unidimensional, o problema escolhido é exposto a seguir.
Consideremos uma barra engastada em ambas as extremidades, conforme ilustrado na Figura 1.

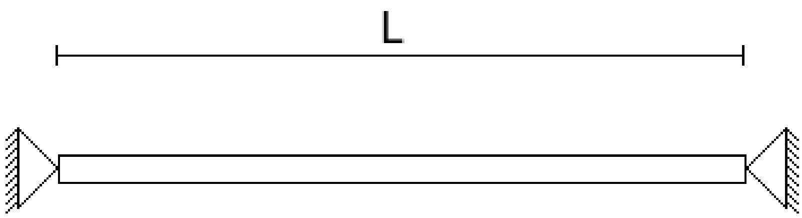

Figura 1: Barra bi-engastada.

O modelo resulta no seguinte problema elíptico de autovalores e autovetores, na forma forte:

$$
\frac{d^2u}{dx^2} = -\omega^2 \frac{\rho}{E} u(x) \tag{3}
$$

Sujeito às condições de contorno:

$$
\begin{aligned}
u(0) &= 0 \\
u(L) &= 0
\end{aligned} \tag{4}
$$

A solução analítica é dada por:

$$\omega = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{\rho}{E}} \tag{5}$$

Esta solução é utilizada para normalizar as soluções aproximadas como:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_h}{\omega} \tag{6}$$

Considerando que o espectro de frequência independe das constantes, foram considerados: seção constante unitária, parâmetros de material unitários e comprimento total unitário. Analogamente, os graus de liberdade (n) são normalizados em função do número total de graus de liberdade (N) como:

$$\bar{n} = \frac{n}{N} \tag{7}$$

Dessa forma, ao plotarmos $\bar{\omega} \times \bar{n}$ podemos comparar os diferentes métodos com distintos números de graus de liberdade.

2.2 Espaço de aproximação do MEFG

Conforme [10], o MEF pode ser visto como um caso particular do Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade (PUFEM). Assim, as propriedades do MEF, e consequentemente do MEFG, são herdadas do PUFEM. A seguir estabelecemos as condições às quais a aproximação deve estar submetida para que sejam válidas as propriedades do da Partição da Unidade.

Partição da Unidade é um espaço topológico de funções $\{\phi_i\}$ subordinadas a uma cobertura $\{\Omega_i\} \subset \mathbb{R}$ que possuem as seguintes propriedades:

- suporte$\{\phi_i\} \subset \{\bar{\Omega}_i\}$, ou seja $\{\phi_i\}$ tem suporte compacto em $\{\Omega_i\}$
- $\sum_i \{\phi_i\} = 1$ em Ω

Com a definição deste ente topológico podemos estabelecer o conceito do espaço de aproximação do PUFEM.

Seja $\{\Omega_i\}$ uma cobertura aberta de $\{\Omega_i\} \subset \mathbb{R}$ e seja uma Partição da Unidade $\{\phi_i\}$ correspondente. Seja, ainda, um espaço $V_i \subset H^1(\Omega_i \cap \Omega)$. Então o espaço

$$V_{PUFEM} = \sum_i \phi_i V_i \tag{8}$$

é definido como espaço de aproximação do PUFEM.

Segundo [11], os espaços de aproximação V_i apresentam as seguintes propriedades de aproximação:

Assumindo que os espaços de aproximação locais V_i satisfaçam

$$|u - v_i|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \epsilon_1(i) \tag{9}$$

e

$$|\nabla(u - v_i)|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \epsilon_2(i) \tag{10}$$

Então a função u_h satisfaz,

$$|u - u_h|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{M} C_\infty \left(\sum_i \epsilon_1^2(i) \right) \tag{11}$$

e

$$|\nabla \left(u - u_h\right)|_{L(\Omega)^2} \leq \sqrt{2M} \left(\sum_i \left(\frac{C_g}{diam\Omega_i} \right)^2 \epsilon_1^2(i) + C_\infty^2 \epsilon_2^2(i) \right) \tag{12}$$

Embasados os conceitos pertinentes do PUFEM, podemo escrever que a solução aproximada do MEFG é composta da soma de duas parcelas:

$$u_h^e = u_{MEF} + u_{ENR} \tag{13}$$

onde u_{MEF} corresponde a parcela descrita pelas funções de aproximação clássicas do MEF e u_{ENR} corresponde a aproximação feita pelas funções de enriquecimento que visam mimetizam aspectos particulares do problema estudado.

2.2.1 Enriquecimento Trigonométrico

Para o problema de vibração livre foi proposto por [1] um bloco de funções de enriquecimento para o problema de análise dinâmica com o MEFG. Esse grupo de funções consiste na construção de um par de nuvens, uma senoidal e uma cossenoidal, subordinadas a cobertura do nó enriquecido. Essas nuvens são escritas no domínio do elemento como dois pares de funções seno e cosseno. O domínio elementar é considerado para $\xi \in (0, +1)$.
Nuvem senoidal:

$$\gamma_{1j} = sen(\beta_j L_e \xi) \tag{14}$$

$$\gamma_{1j} = sen(\beta_j L_e (\xi - 1)) \tag{15}$$

Nuvem cossenoidal:

$$\varphi_{1j} = cos(\beta_j L_e \xi) - 1 \tag{16}$$

$$\varphi_{1j} = cos(\beta_j L_e (\xi - 1)) - 1 \tag{17}$$

Onde L_e é o comprimento do elemento e $\beta_j = j\pi$ é um parâmetro de enriquecimento hierárquico proposto por [1] para j níveis de de funções. O presente trabalho propõe uma alteração nesse grupo de funções de enriquecimento visando estabilizar sua aplicação sucessiva que visa evitar a construção de espaços de aproximação que tendem a dependência linear. Essa modificação consiste basicamente na eliminação do parâmetro L_e e um ajuste no parâmetro β_j a cada novo nível de enriquecimento de forma automática. Assim, as

funções utilizadas na aplicações foram escritas no domínio de $\xi \in (-1, +1)$ da seguinte forma:
Nuvem senoidal:

$$\gamma_{1j} = sen(\beta_j(\xi + 1)) \tag{18}$$

$$\gamma_{1j} = sen(\beta_j(\xi - 1)) \tag{19}$$

Nuvem cossenoidal:

$$\varphi_{1j} = cos(\beta_j(\xi + 1)) - 1 \tag{20}$$

$$\varphi_{1j} = cos(\beta_j(\xi - 1)) - 1 \tag{21}$$

Parâmetro β_j

$$\beta_j = (2j - \frac{5}{8})\pi \tag{22}$$

Testes feitos com até 60 níveis de enriquecimento não geraram dependência linear no campo de aproximações e ainda mantiverem ótimas condições de convergência do espectro, como mostrado mais adiante nos resultados. Deve ser notado que o primeiro nível deste enriquecimento coincide com o primeiro nível proposto por [1], cuja acurácia e taxa de convergência são muito boas.

2.2.2 Estabilização das funções de enriquecimento

O Método dos Elementos Finitos Generalizado Estabilizado (MEFGE) é proposto como uma alternativa para melhorar o condicionamento numérico do MEFG [3]. Este método consiste na aplicação de uma modificação simples nas funções de enriquecimento antes da sua inclusão no espaço de aproximação do MEFG [4, 5].
No MEFGE, modificamos localmente as funções de enriquecimento empregadas antes da sua multiplicação pela Partição da Unidade (PU). Essa modificação consiste em:

$$\widetilde{\varphi}_i(x) = \varphi_i(x) - I_\omega(\varphi_i(x)) \tag{23}$$

Onde,

- $\widetilde{\varphi}_i$: i-ésima função enriquecedora estabilizada
- φ_i: i-ésima função enriquecedora
- $I_\omega(\varphi_i(x))$: interpolante linear por parte da i-ésima função enriquecedora subordinada ao suporte ω

A estabilização do 1º nível de enriquecimento proposto é ilustrado a seguir:

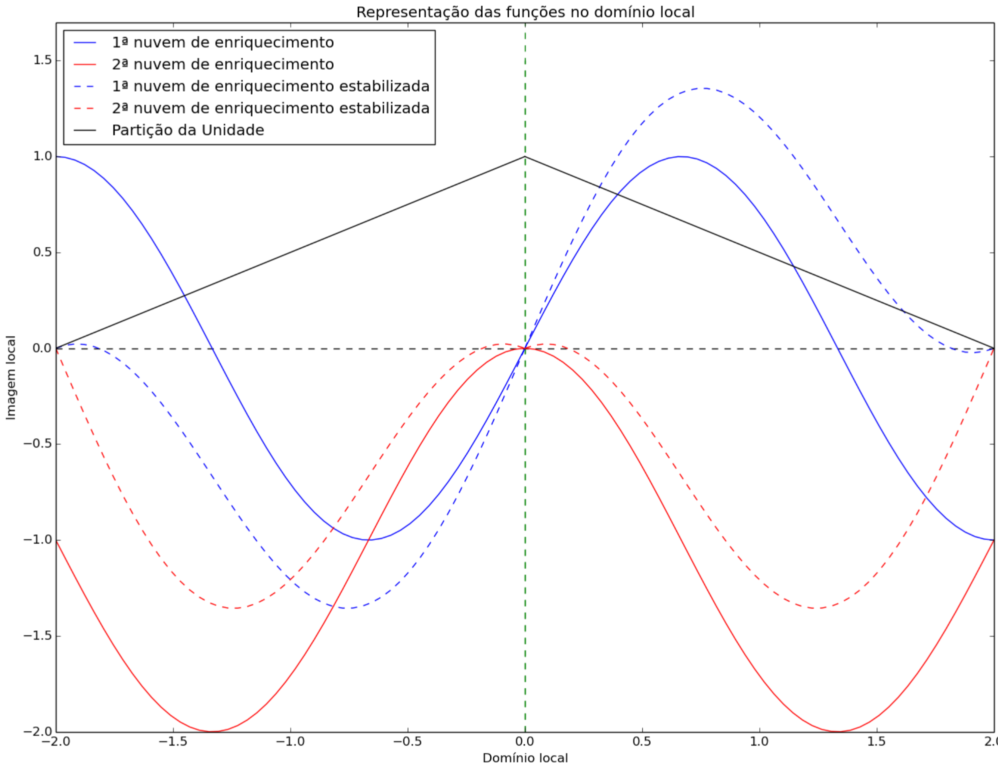

Figura 2: Processo de estabilização das funções do primeiro nível de enriquecimento.

2.3 Análise Isogeométrica

O campo de aproximação da Análise Isogeométrica é formado por funções do tipo NURBS (*Non Uniform Rational B-Splines*). Dado um vetor de nós de controle $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+p+1}\}$, as funções B-Splines são construídas de maneira recursiva, iniciando com um grau polinomial $p = 0$ até o grau polinomial p desejado. A interação inicial para o polinômio p=0 é dada por [8]:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & se\ \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}, \\ 0 & caso\ contr\acute{a}rio. \end{cases} \tag{24}$$

As próximas interações para $p = 1, 2, 3, \ldots$ são dadas por [8]:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi). \tag{25}$$

A notação $N_{i,p}$ indica a i-ésima função de ordem p. A figura 2.3 mostra um exemplo gráfico de construção das B-Splines para um vetor uniforme $\Xi = \{1, 2, 3, \ldots\}$ iniciando em $p = 0$

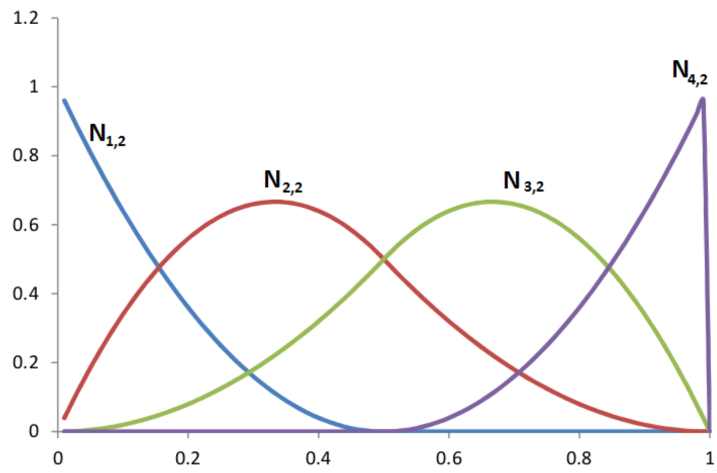

Figura 3: Valores normalizados de frequências naturais da barra.

até $p = 2$. Os polinômios de grau $p = 0$ e $p = 1$ das B-Splines são idênticos aos polinômios do MEF clássico. Os polinômios de ordem maior que dois mantém a homogeneidade das funções.
Decorrem das funções B-Splines importantes propriedades. Primeiramente, as funções B-Splines obdecem a partição da unidade, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi) = 1. \tag{26}$$

Ao contrário das funções polinomiais do MEF, as B-Splines são positivas em todo o domínio, fazendo com que todos os termos da matriz de massa sejam também positivos.
Outra propriedade notável no desenvolvimento das funções B-Splines é o número de derivadas contínuas para cada função. Dada a ordem polinomial p, uma função B-Spline possui $p - 1$ derivadas contínuas no domínio da função [8].
O suporte das funções B-Splines está relacionado também com a ordem polinomial p. Dada uma função de ordem p o tamanho do suporte será $p + 1$ elementos isogeométricos.
Através da figura 2.3 é possível notar as propriedades relacionadas com os valores positivos e a dimensão do suporte das funções B-Splines.
A figura abaixo mostra um exemplo de um conjunto de funções NURBS para grau polinomial $p = 2$ e vetor de nós de controle $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

A primeira análise corresponde aos valores relativos de frequências naturais utilizando as seguintes abordagens:

- MEF polinomial lagrangiano C^0

- MEF polinomial lagrangiano C^1
- MEFG com 1 nível de enriquecimento trigonométrico
- MEFGE com 1 nível de enriquecimento trigonométrico estabilizado
- AIG com grau polinomial 2
- AIG com grau polinomial 3
- AIG com grau polinomial 4

Nas análises do MEF, MEFG e MEFGE foram utilizados 25 elementos uniformes. A solução em frequências naturais foi normalizada pela resposta analítica, assim como os graus de liberdade foram normalizados pelo número total de graus de liberdade.

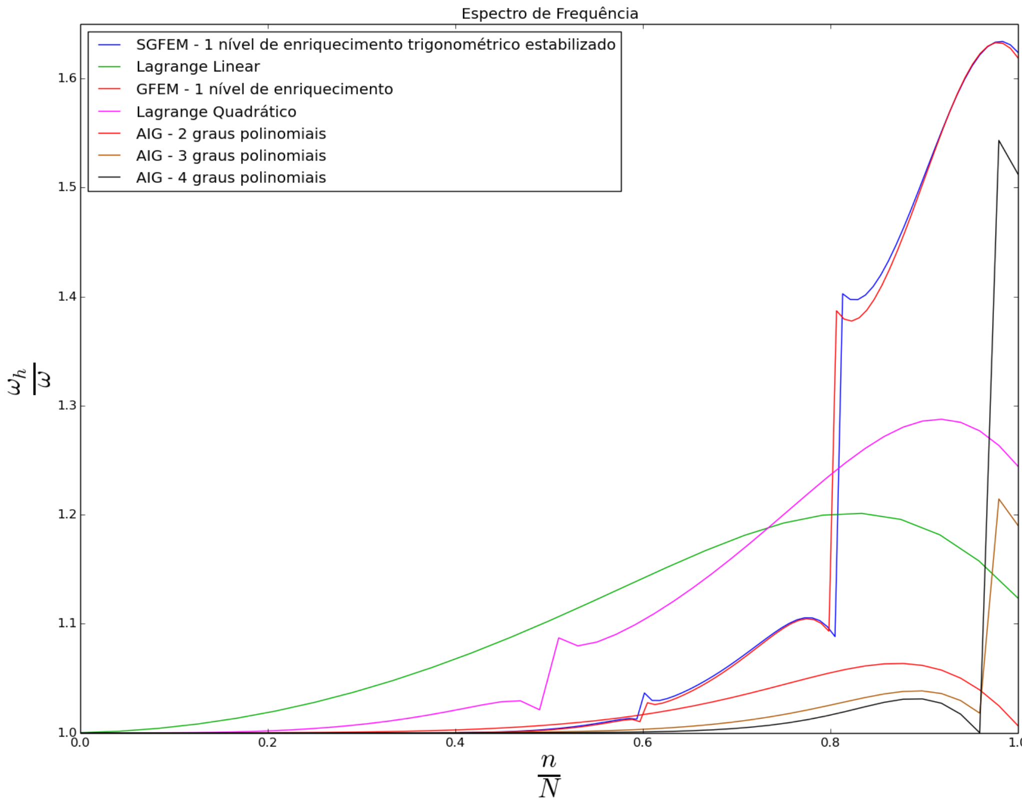

Figura 4: Valores normalizados de frequências naturais da barra.

Vemos que a resposta dos métodos enriquecidos é superior em termos do espectro de frequências, quando comparado com o MEF. No entanto, os resultados obtidos com a

Análise Isogeométrica supera os resultado com alguns níveis polinomiais. Podemos notar ainda que há um prolongamento do ramo acústico do espectro, resultando em uma faixa maior de frequências com bons resultados.
A aplicação do MEFGE resultou em um espectro bastante próximo do MEFG, significando uma variação sutil na acurácia. No entanto quando comparamos os números de condição das matrizes envolvidas, vemos que a matriz de rigidez se tornou melhor condicionada:

nº de condição	M	K
MEFG	$2,10 \times 10^4$	$2,03 \times 10^3$
MEFGE	$2,05 \times 10^4$	$4,2 \times 10^2$

Tabela 1: Números de condição das matrizes de massa e rigidez - MEFG e MEFGE

Essa melhora no condicionamento pode implicar em uma resposta numérica mais estável na análise transiente, onde o equilíbrio do sistema é calculado a cada passo de tempo. Assim, justificam-se estudos acerca de técnicas de condicionamento das funções enriquecimento do MEFGE no contexto da análise dinâmica.
Podemos aplicar os níveis de enriquecimento propostos de forma hierárquica em busca de uma melhora ainda mais significativa no espectro. Foram aplicados 6 níveis de enriquecimento de forma sucessiva e hierárquica no mesmo problema, considerando 25 elementos em malha uniforme, resultando em um refino analítico trigonométrico.

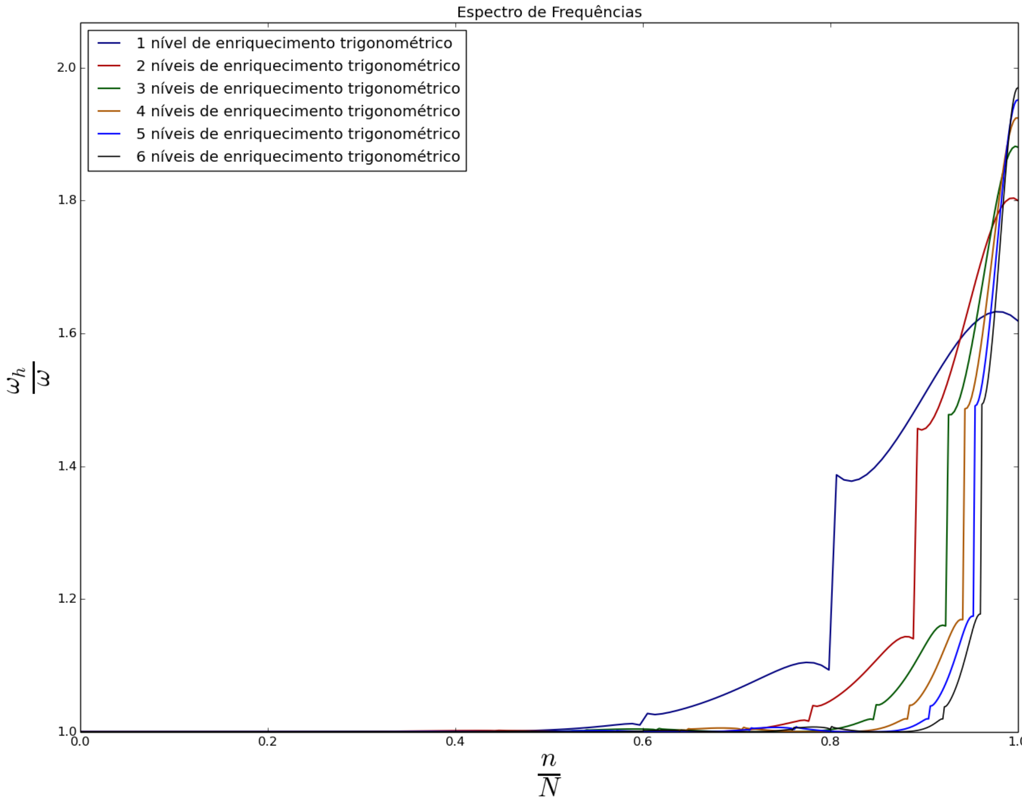

Figura 5: Valores normalizados de frequências naturais da barra.

A análise mostra a influência do número de níveis de enriquecimento na aproximação do espectro. Apesar da melhora da solução no ramo acústico e o encurtamento do ramo óptico, podemos notar que a solução dos últimos autovalores é deteriorada com este refino.

4 CONCLUSÕES

De forma geral é possível constatar que o uso do MEFG e do MEFGE apresentam bom desempenho na abordagem do problema de autovalores e autovetores. Esse é um ponto positivo, visto que o MEFG é facilmente implementado em programas clássicos de elementos finitos com algumas modificações.O enriquecimento dos campos de aproximação com blocos de funções trigonométricas mostram resultados satisfatórios e um comportamento hierárquico. Embora seja uma aplicação em um elemento estrutural simples, o estudo se mostra promissor para a análise dinâmica, transiente ou modal, para aplicações mais complexas.

REFERÊNCIAS

[1] M. Arndt, *O Método dos Elementos Finitos Generalizado aplicado à análise de vibrações livres de estruturas reticuladas*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná, (2009).

[2] A. Torii, *Análise Dinâmica de estruturas com o Método dos Elementos Finitos Generalizado*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná, (2012).

[3] I. Babuška and U. Banerjee, Stable generalized finite element method (SGFEM), *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **201**, pp. 91–111, (2012).

[4] V. Gupta *et al*, A stable and optimally convergent generalized FEM (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **266**, pp. 23–39, (2013).

[5] L. Haoyang, *Investigation of stability and accuracy of high order generalized finite element methods*, (2014).

[6] S. Ham and K.J. Bathe, A finite element method enriched for wave propagation problems, *Computers & Structures*, Vol. **94**, pp. 1–12, (2012).

[7] A. Sillem, A. Simone and LJ. Sluys, The Orthonormalized Generalized Finite Element Method–OGFEM: Efficient and stable reduction of approximation errors through multiple orthonormalized enriched basis functions, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (2014).

[8] J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, A. Reali, G. Sangalli, *Isogeometric discretizations in structural dynamics and wave propagation*, *ECOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthwuake Engineering, Crete, Greece*, pp. 13–16, (2007).

[9] K.J. Bathe, *Finite element procedures*, Prentice-Hall, (1996).

[10] J. M. Melenk and I. Babuška, The partition of unity finite element method: basic theory and applications, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. **139**, pp. 289–314, (1996).