Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia 2015
Lisboa, 29 de Junho a 2 de Julho, 2015
© APMTAC, Portugal, 2015

NUEVAS ESTRATEGIAS DE CÁLCULO NUMÉRICO DE TIRANTES NORMALES EN CANALES RECTANGULARES

Myriam Rocío Pallares Muñoz [1]*, Wilson Rodríguez Calderón [2]

1: Programa de Ingeniería Civil
Facultad de Ingeniería
Universidad Surcolombiana
Dirección postal: Avenida Pastrana Borrero Carrera 1, Neiva, Colombia
e-mail: myriam.pallares@usco.edu.co, web: http://www.usco.edu.co

2: Programa de Ingeniería Civil
Facultad de Ingeniería
Universidad Cooperativa de Colombia
Dirección postal: Calle 11 No. 1G-31B Neiva, Colombia
e-mail: wilson.rodriguezca@campusucc.edu.co, web: http://www.ucc.edu.co

Palabras clave: tirante normal, método de iteración de punto fijo–IPF, método de Newton Raphson–NR, método iterativo de direcciones no ortogonales–DNO.

Resumen: *se realiza la revisión, análisis y comparación de métodos explícitos e implícitos de desarrollo reciente (2009-2015) para el cálculo de tirantes normales en canales rectangulares; se desarrolla una adaptación del método Newton Raphson (NR) como alternativa de cálculo del problema y se presenta la formulación de un nuevo método (llamado de direcciones no ortogonales–DNO) basado en la modificación del método de iteración de punto fijo–IPF reconocido por ser simple pero divergente, con limitaciones de aplicación y restricciones de uso. El método DNO propuesto determina de manera inteligente el valor de arranque para el tirante normal, su formulación es sencilla, tiene convergencia rápida y bajo costo computacional que lo hacen competitivo frente a métodos reconocidos y de amplío uso como el de Newton Raphson como lo demuestran los resultados.*

Keywords: *normal depth, fixed-point iteration method, Newton Raphson method, non-orthogonal directions method.*

Abstract: *review, analysis and comparison of explicit and implicit methods of recent development (2009-2015) for the calculation of normal depth in rectangular channels are performed; an adaptation of Newton Raphson method is developed as an alternative calculation of the problem and formulate a new method (called non-orthogonal directions NOD) is presented, this method is based on the modification of the fixed-point iteration method which is recognized for being simple but divergent with application limitations and restrictions. The proposed method determines the start value for the normal depth wisely, its formulation is simple, it has fast convergence and low computational cost that*

make it competitive with recognized and widely used methods(for example, Newton Raphson) as evidenced by the findings.

1. INTRODUCCIÓN

En el diseño hidráulico de canales rectangulares y en el cálculo de perfiles hidráulicos es indispensable la determinación del "tirante normal" para lo cual se dispone de tablas y/o gráficos que tienen problemas de error asociados a, la interpolación, la precisión de la escala o la lectura. También es posible tratar el problema por medio de métodos numéricos para la solución de ecuaciones no lineales, estos son, métodos cerrados (bisección y regla falsa) y métodos abiertos (Newton-Raphson, secante e iteración de punto fijo); se sabe que estos métodos heredan al problema las ventajas y desventajas propias de su formulación. Recientemente en la literatura especializada de hidráulica de canales –*representada en textos de alto nivel, artículos y memorias de eventos*– han surgido nuevos métodos de cálculo explícito basados en una serie de pasos bien definidos que implementados correctamente conducen a resultados satisfactorios en relación al orden de precisión requerido en la mayoría de estudios de ingeniería. También han incursionado propuestas de fórmulas iterativas para la determinación del tirante normal en canales rectangulares; como es propio de este tipo de fórmulas cabe la posibilidad de manipularlas y reformularlas para crear nuevas que superen las deficiencias y aceleren la convergencia. Esta alternativa se convierte en un campo de investigación en donde los métodos numéricos toman un papel importante para el avance hacia nuevas propuestas.

2. MARCO TEÓRICO DEL CÁLCULO DEL TIRANTE NORMAL

La ecuación (1) denominada de Manning es de amplia aceptación en el cálculo del caudal en un canal bajo régimen de flujo uniforme. Esta ecuación establece bajo unidades del sistema internacional que,

$$Q = \frac{A_h}{n} R_h^{2/3} S_o^{1/2} \tag{1}$$

donde, Q es el caudal en m^3/s, A_h es el área hidráulica en m^2, R_h es el radio hidráulico en *m* definido como $R_h = A_h/P_m$ (P_m es el perímetro mojado del canal en *m*), S_o es la pendiente de fondo del canal –*convenientemente empleada bajo la condición de flujo uniforme*– y *n* es el coeficiente adimensional de rugosidad de Manning. La ecuación (1) puede ordenarse para encontrar una de fácil adaptación y operación con métodos numéricos, tal como,

$$M_s = \frac{Qn}{S_o^{1/2}} = A_h R_h^{2/3} \tag{2}$$

En la ecuación (2) el término de la derecha es no lineal y se denomina Módulo de sección

(M_s); es creciente con el incremento del tirante normal, esto produce que la ecuación solo presente una solución [4, 7].

3. MÉTODOS EXPLICITOS E ITERATIVOS PARA EL CÁLCULO DEL TIRANTE NORMAL EN CANALES RECTANGULARES DE APARICIÓN RECIENTE EN LA LITERATURA ESPECIALIZADA

3.1. Método tipo explícito de Vatankhah y Easa

Este método propuesto en 2011 calcula dos parámetros y mediante una ecuación muy simple determina el tirante normal. Su planteamiento está resumido en el diagrama de flujo que se ilustra en la Figura 1 (b es el ancho del canal rectangular en *m* y y_n el tirante normal en *m*) [7].

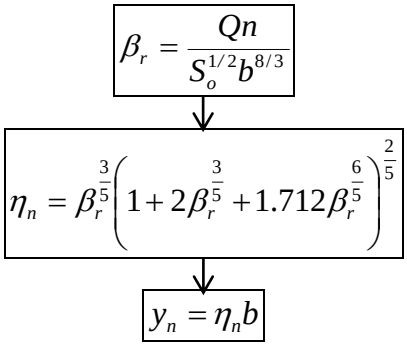

Figura 1. Método tipo explícito de Vatankhah y Easa. Fuente: Esquema de autores

3.2. Método tipo iterativo de Knigh et al.

Este método fue propuesto en 2009 y emplea una ecuación iterativa para canales trapezoidales. Cuando se simplifica para el caso de un canal rectangular da origen a la ecuación (3). En esta ecuación b es el ancho del canal rectangular en *m* y y_n el tirante normal en *m* [4].

$$y_n^{i+1} = \left(\frac{Qn}{S_o^{1/2}} \right)^{\frac{3}{5}} \frac{\left(b + 2y_n^i \right)^{\frac{2}{5}}}{b} \tag{3}$$

El método requiere un valor arbitrario de partida, que puede ser incluso cero y el criterio de parada empleado puede plantearse de manera general en términos relativos o absolutos; es frecuente adoptar un criterio de parada en términos absolutos,

$$\left| y_n^{i+1} - y_n^i \right| \leq 0.001 \tag{4}$$

En este caso la tolerancia especificada de 1 *mm* es suficiente para el orden de magnitud típico de un tirante normal en canales reales.

4. ADAPTACIÓN DEL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON PARA EL CÁLCULO DEL TIRANTE NORMAL EN UN CANAL RECTANGULAR

Se genera una nueva fórmula de iteración basada en el método de Newton-Raphson (NR) que recibe todas las ventajas de su precursor, principalmente la velocidad de convergencia cuadrática. Remplazando la ecuación (5) de área hidráulica y (6) de radio hidráulico para una sección rectangular en la ecuación (2),

$$A_h = (b * y) \tag{5}$$

$$R_h = \frac{b * y}{(b + 2y)} \tag{6}$$

y reorganizando se obtiene la ecuación (7) definida como un problema de raíces de una ecuación no lineal,

$$f(y) = y\left(\frac{b * y}{b + 2 * y}\right)^{2/3} - \frac{M_s}{b} = 0 \tag{7}$$

donde, *y* es el tirante en *m* (para las condiciones de flujo uniforme $y = y_n$) y b es el ancho del canal rectangular en *m*. El método Newton-Raphson requiere encontrar la derivada de la función *f(y)* para lo cual se emplea el sistema de álgebra computacional libre Máxima para determinar la expresión (8) factorizada,

$$f'(y) = \frac{(by)^{2/3}(6y + 5b)}{3(b + 2 * y)^{5/3}} \tag{8}$$

Retomando la ecuación general del método de Newton y simplificando adecuadamente, se obtiene la ecuación (9) que es la fórmula de iteración especialmente adaptada para la determinación de tirantes normales en canales rectangulares,

$$y_n^{i+1} = y_n^i + \frac{3\left(b + 2 * y_n^i\right)\left(M_s\left(b + 2 * y_n^i\right)^{2/3} - \left(b * y_n^i\right)^{5/3}\right)}{b\left(6y_n^i + 5b\right)\left(b * y_n^i\right)^{2/3}} \tag{9}$$

En esta ecuación el valor de partida es arbitrario y diferente de cero, dado que se indetermina cuando se toma un valor nulo de *y* [1, 2, 3, 5, 6]

5. PROPUESTA DE UN NUEVO MÉTODO PARA EL CÁLCULO DEL TIRANTE NORMAL EN UN CANAL RECTANGULAR

Se propone una nueva formulación llamada método iterativo de direcciones no ortogonales – DNO basado en una modificación de su precursor, el método de iteración de punto fijo. Como características distintivas del nuevo método se destacan, la determinación inteligente del valor inicial de arranque, la alta velocidad de convergencia que le permite competir con métodos reconocidos como el de Newton Raphson, el bajo costo computacional y la sencillez de la formulación. Este nuevo método es una propuesta original que modifica el método de iteración de punto fijo para superar los problemas de divergencia típicos que en la práctica impiden su uso; la restricción que imprime la divergencia opaca sus bondades de facilidad y simplicidad de cálculo y programación.

Sumando la variable *y* en ambos lados de la ecuación (7) se obtiene la expresión (10) típica del método de iteración de punto fijo,

$$g(y_n^i) = y_n^i\left(\frac{b * y_n^i}{b + 2 * y_n^i}\right)^{2/3} - \frac{M_s}{b} + y_n^i = y_n^{i+1} \tag{10}$$

Como suele ocurrir con el método de iteración de punto fijo la ecuación (10) es divergente, sin embargo, esta ecuación puede replantearse y simplificarse como se muestra en (11) y (12),

$$y_n^{i+1} = \frac{m y_n^i - g\left(y_n^i\right)}{m-1} \tag{11}$$

$$y_n^{i+1} = \left(\frac{1}{m-1}\right)\left[y_n^i\left((m-1) - \left(\frac{b * y_n^i}{b + 2 * y_n^i}\right)^{2/3}\right) + \frac{M_s}{b}\right] \tag{12}$$

La ecuación (12) no representa un costo computacional adicional significativo respecto a la ecuación (10) y es convergente. Para el caso específico de canales rectangulares el factor de dirección de búsqueda *m* debe ser estrictamente mayor a 1 y existe una forma de calcular un valor "m óptimo o cercano al óptimo" que acelera la convergencia y da paso al cálculo de un valor semilla del tirante normal cercano a la solución. Este nuevo método cuenta con dos bondades, por un lado sugiere una manera inteligente de calcular un valor semilla dejando de lado la práctica de tomar valores arbitrarios, y por otro, tiene una manera propia de calcular el factor *m* con resultados de convergencia similares o superiores a los de Newton-Raphson con la ventaja de no requerir la derivada de la función [1, 2, 3, 5, 6].

El procedimiento de cálculo del valor semilla del tirante normal y el valor de *m* óptimo, es:

1) calcular el valor semilla empleando la ecuación (7) aplicando dos valores y_1^* y y_2^*; estos valores deben producir cambio de signo en la función f(y) *–esta operación es sencilla ya que el espacio de búsqueda en el rango de metros no es grande–*; 2) calcular las funciones g(y) sumando el correspondiente valor (y) a f(y); 3) calcular dos valores m_r y b_r correspondientes a una recta trazada entre los puntos (y_1^*, $g(y_1^*)$) y (y_2^*, $g(y_2^*)$), este procedimiento es numéricamente factible y razonable ya que la función g(y) siendo una función no lineal exhibe una gráfica que luce como una función lineal y en cercanías a la solución *–esto es, en el cruce de la recta y=x* y *g(y) según el método de iteración de punto fijo–* el empleo de una recta es válido como primera aproximación. Entonces, las ecuaciones (13) y (14) permiten calcular los valores de m_r y b_r.

$$m_r = \frac{g\left(y_1^*\right) - g\left(y_2^*\right)}{y_1^* - y_2^*} \tag{13}$$

$$b_r = g\left(y_1^*\right) - m_r y_1^* \tag{14}$$

4) Determinar el valor óptimo del factor m y el valor semilla del tirante y_n^0 por medio de las expresiones (15) y (16) respectivamente,

$$m = m_{opt} = m_r \tag{15}$$

$$y_n^0 = \frac{b_r}{\left(1 - m_r\right)} \tag{16}$$

5) Aplicar la ecuación (12). Con una o dos iteraciones los resultados son bastante satisfactorios para la precisión requerida para el problema.

6. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para verificar el comportamiento de las formulaciones revisadas y propuestas se emplea un caso típico que requiere el cálculo del tirante normal en un canal rectangular de características determinadas por un caudal Q=4.5 m^3/s, coeficiente de rugosidad de Manning *n*= 0.013, pendiente S_o=0.0018, ancho de 2.0 metros. Se adopta como criterio de parada una tolerancia de 1 mm (iteración en la que el error absoluto de la solución es inferior a 0.001) suficiente para fines de cálculo ingenieril.

Se considera que la solución exacta es aquel valor de la variable que anula numéricamente la función; este valor de y_n que fue verificado en los métodos de Newton y DNO es 1.07030484108076. Los resultados contenidos en la Tabla 1 señalan que todos los métodos arrojan resultados satisfactorios, sin embargo, el método DNO propuesto converge más rápido a la solución con errores porcentuales muy pequeños; cuando el

método inicia con un valor semilla y_o=1.069 –*obtenido de la aplicación de la formulación descrita en el apartado 5*– se reflejan claras ventajas sobre los demás métodos, sin embargo, si no se hace uso de la semilla y se inicia en cero el método propuesto sigue superando a Newton-Raphson y a Knight et. al., ya que llega más rápidamente a la solución con un error relativo porcentual muy pequeño del orden de 10^{-8}. Nótese además, que Newton-Raphson no puede iniciar de cero, ya que la derivada se anula e indetermina la ecuación de iteración.

Tabla 1. Resultados obtenidos de los métodos revisados y propuestos

Método	Iteración de parada	Valor de y_n	Error relativo respecto al valor "exacto" (%)
Vatankhah y Easa	---	1.07105446060914	0.070e+00
Knight et al (y_o=0)	6	1.07019716910401	0.010e+00
NR(y_o=0.01)	5	1.07030484108079	2.803e-12
DNO (y_o=0)	4	1.07030484184407	7.132e-08
DNO (y_o=1.069)	1	1.07030495557215	1.070e-05

Fuente: autores

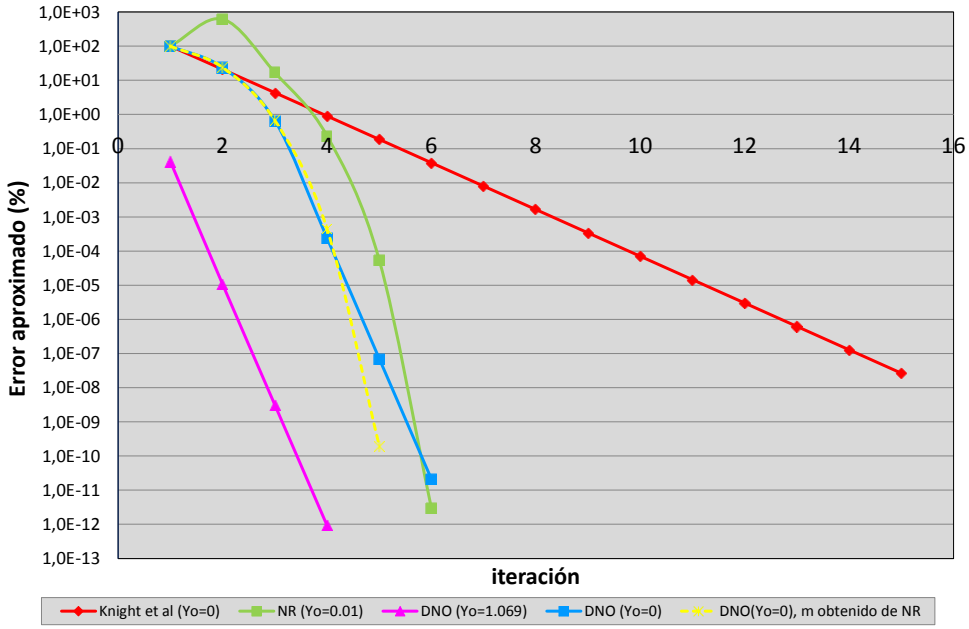

Figura 2. Gráfica de convergencia de los métodos revisados y propuestos. Fuente: Autores

A partir de las curvas de convergencia de la figura 2 puede deducirse que el factor *m* en el método DNO tiene un valor óptimo que puede obtenerse de la tabla de iteración del método de Newton revisando el valor de la derivada en la solución; esto es, si a dicho valor se le suma la unidad ($m=m_{opt}=1+f'(y)$ en la que *y* se evalúa en la solución final del método NR), *se obtiene el valor de m óptimo exacto* el cual hace que el método DNO adquiera convergencia cuadrática, es decir, bajo valores de *m* diferentes del óptimo el método DNO se convierte en un clon "degenerado" del método NR. Esta propiedad tan interesante demuestra que es posible obtener convergencias cuadráticas o muy cercanas

sin derivar permanentemente como en el método NR obviando los altos costos de operaciones y la complejidad en las expresiones de iteración (*la línea punteada en la gráfica 2, representa la convergencia del método DNO partiendo del valor de m extraído de cálculos del método NR, esto es, $m_{óptimo}$=1.85156559512771 –se observa claramente la convergencia cuadrática y el paralelismo con la curva de convergencia del método NR–*). Si además se agrega la estrategia de búsqueda de una semilla inteligente, el método DNO se convierte en una alternativa altamente competitiva para la solución de problemas de no linealidad. En la figura 2 también se observa que la convergencia de los métodos de Knight et. al. y DNO(y_o=1.069) es lineal, sin embargo, la pendiente del método DNO es muy superior a la de Knight et. al. sugiriendo mayor convergencia; además tiene la ventaja de la semilla inteligente que lo hace superar a todas las alternativas evaluadas; prácticamente la fase iterativa del método DNO se ocupa de refinar la solución. Cuando se emplea DNO partiendo de y_o=0 se evidencia cómo supera a las otras alternativas a excepción del método NR en la iteración 5 donde se presenta una pequeña diferencia, no obstante, DNO cumple la tolerancia en la iteración 4 y mantiene ventaja sobre NR.

7. CONCLUSIONES

Se presentan además de alternativas recientes e interesantes para el cálculo del tirante normal en canales rectangulares otras desarrolladas por los autores, las cuales son competitivas frente a los métodos existentes. El método DNO propuesto puede denominarse un clon degenerado del método de Newton Raphson–NR (bajo valores de m diferentes al óptimo) el cual, de acuerdo al valor del parámetro *m* de dirección de búsqueda utilizado puede convertirse en una copia perfecta del método NR, mutar negativamente siendo inferior en convergencia al método NR o mutar positivamente si se emplean semillas inteligentes y determinaciones aproximadas del parámetro de búsqueda *m*.

REFERENCIAS

[1] Akai, T. J. (2004). *Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería*. México: Limusa Willey.
[2] Burden, R. L., & Faires, D. J. (2011). *Análisis Numérico*. México: Cengage Learning Editores S.A.
[3] Chapra, S. C., & Canale, P. R. (2007). *Métodos Numéricos para Ingenieros*. México: Mc. Graw Hill.
[4] Donald W. K., et. Al., (2009). *Practical Channel hydraulics,* London: CRC Press.
[5] Mathews, J. H., & Fink, K. D. (2011). *Métodos Numéricos con Matlab*. México: Cengage Learning Editores S.A.
[6] Nakamura, S. (1997). *Análisis Numérico y Visualización Gráfica con Matlab*. México: Pearson Education.
[7] Vatankhah, R.A. and Easa. (2011). *Explicit solutions for critical and normal depths in channels with different shapes, Journal of flow measurement and instrumentation.* Vol. 22**,** pp. 43-49.