

ANÁLISIS DINÁMICO DE ESTRUCTURAS EN TIEMPO REAL BASADO EN LOS MÉTODOS DE REDUCCIÓN DE MODELOS

Santiago Montagud^{1*}, Jose V. Aguado¹, Francisco Chinesta¹ y Elías Cueto²

1: GEM Institute (UMR 6183 CNRS)
Ecole Centrale de Nantes
1 Rue de la Noë, 44321 Nantes cedex 3, France
e-mail: : santiago.montagud;jose.aguado-lopez;francisco.chinesta@ec-nantes.fr, web:
<http://rom.ec-nantes.fr/>

2: Grupo de mecánica estructural y modelado de materiales
Instituto de Investigación de Ingeniería en Aragón, I3A, Universidad de Zaragoza
Edificio Betancourt, María de Luna, 7, E-50012 Zaragoza, Spain
e-mail: ecueto@unizar.es web: <http://www.unizar.es>

Palabras clave: reducción de modelos, modelos paramétricos, análisis dinámico, PGD

Resumen. Tradicionalmente, los problemas de dinámica de estructuras en ingeniería civil se han tratado como problemas estáticos con cargas mayoradas, normalmente debido a la complejidad de las ecuaciones y el tiempo necesario para resolverlas. Hoy día, el desarrollo de nuevos materiales y técnicas de construcción ha permitido estructuras más esbeltas en donde la dinámica de estructuras no puede ya ser evaluada de forma tradicional en muchos de los casos. Los métodos clásicos, si bien se han aplicado con éxito a problemas dinámicos particulares, no pueden abordar la resolución de problemas dinámicos de forma paramétrica que pueden fácilmente alcanzar millones de grados de libertad. En este trabajo se propone la resolución de problemas de dinámica de estructuras mediante otro método de reducción de modelos: la PGD (Proper Generalized Decomposition), la cual provee una herramienta de resolución paramétrica de las ecuaciones de forma que se posea la solución completa en un cierto rango de los valores de cada parámetro. La representación de la solución en forma paramétrica abre las puertas a la resolución de sistemas dinámicos permitiendo su aplicación en problemas de optimización o problemas de control en tiempo real.

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de los métodos numéricos en el ámbito de la Mecánica Computacional ha sido, y sigue siendo a día de hoy, un campo de investigación muy activo. Sin embargo, muy pocos de esos métodos llegan a tener un impacto en la práctica profesional de la ingeniería, o bien se desarrollan únicamente como método especializado dentro de alguna rama de la ingeniería. Como excepción, puede destacarse el Método de los Elementos Finitos, el cual es seguramente la técnica con mayor difusión al aplicarse indistintamente en diferentes ámbitos. Este método es fiable, fácil de implementar y muy versátil, y una buena prueba de ello es la variedad de *software*, comercial o abierto, basado en Elementos Finitos.

En Ingeniería Civil, en el análisis tanto dinámico como estático, es común el uso del Método de los elementos finitos o sistemas de barras para modelizar las estructuras en su fase de diseño. Los programas de elementos finitos parten de la discretización de un medio continuo para calcular una solución aproximada. Los modelos de estructuras de barras son ampliamente utilizados cuando una de las dimensiones de los elementos que conforman la estructura es considerablemente mayor que las otras dos, en cuyo caso pueden aplicarse ciertas hipótesis que simplifican ampliamente el número de datos y las operaciones necesarias para su resolución sin afectar a la precisión de los cálculos, acortando consecuentemente el tiempo de resolución. La teoría aplicada en estos casos se conoce como *Teoría de vigas*, y el método de resolución empleado como método matricial.

Dentro de la mecánica de sólidos y estructuras, el análisis dinámico constituye un caso especial particularmente fértil en cuanto a métodos numéricos. Al margen de esquemas de integración numérica explícitos o implícitos, existen y son comúnmente utilizados otros métodos como el método armónico para calcular la respuesta forzada a cargas periódicas, o el método de superposición modal. Esta variedad tiene su origen en las dificultades que presenta el análisis dinámico de un problema real, el cual conlleva la consideración de multitud de grados de libertad y un tiempo de computación generalmente extenso. Pese a esta variedad de métodos existente hoy día, la resolución de problemas multiparamétricos en tiempo real sigue estando fuera su alcance.

La resolución de problemas de dinámica de estructuras en tiempo real tiene un gran interés para la industria en aplicaciones enfocadas al control y a la optimización de procesos. Es evidente que disponer de una solución paramétrica ante cualquier fuerza exterior o perturbación permitiría mantener un sistema en el punto de control requerido en tiempo real. Si se amplía el rango de posibilidades a la variación no solo de fuerzas externas aplicadas, sino también a otras variaciones en el sistema, se aprecia el interés por obtener soluciones multiparamétricas. Considérese un sistema del que se quieren obtener los desplazamientos en tiempo real para una carga cualquiera, el cual los métodos clásicos resuelven sin dificultad; considérese ahora que la posición de la carga es variable, así como el módulo de elasticidad y alguna condición de contorno: el problema actual no solo no es resoluble en tiempo real, si no que puede llegar a ser irresoluble cuando se consideran varios miles de grados de libertad y medios de computación estándar.

El principal objetivo de este trabajo es acercar al mundo de la ingeniería estructural un nuevo método para el cálculo de la respuesta dinámica de estructuras en tiempo real, y que se ha aplicado con éxito en otros campos de la ingeniería [1] [3]: *Proper Generalized Decomposition*, o PGD por sus siglas. Este método aporta ciertas ventajas frente al modelado clásico, destacando la solución de problemas multiparamétricos: gracias al algoritmo del método, el número de operaciones crece geométricamente con el número de parámetros considerados en la solución del sistema, mientras que en el resto de métodos dicho número crece exponencialmente, pudiendo alcanzar un número de operaciones de coste inasumible.

La PGD, aplicada en dos etapas bien diferenciadas, que pueden separarse en una primera etapa de precálculo y en una segunda etapa de aplicación en tiempo real, proporciona una potente herramienta no solo para resolver problemas multiparamétricos, sino también para el uso de su solución en aplicaciones en tiempo real.

2. BREVE ESTADO DEL ARTE

Considérense las ecuaciones de movimiento de la dinámica en su forma matricial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (1)$$

donde \mathbf{M} representa la matriz de masa, \mathbf{C} la matriz de amortiguamiento, \mathbf{K} la matriz de rigidez y $\mathbf{f}(t)$ el vector de fuerzas aplicadas. Término a término, el primero representa las fuerzas de inercia, el segundo las fuerzas disipadoras de energía, el tercer término las fuerzas elásticas y el cuarto las fuerzas externas aplicadas.

Los métodos clásicos afrontan el problema resolviendo la ecuación bien en el espacio del tiempo, bien en el espacio de la frecuencia o bien mediante métodos modales. Los métodos que resuelven en el espacio del tiempo utilizan esquemas de integración en tiempo con los que obtener la solución para cada incremento de tiempo. Para resolver en el espacio de la frecuencia, debe transformarse el sistema a dicho espacio mediante la transformada de Fourier, resolver allí el problema y finalmente hacer la transformación inversa devolviendo la solución al espacio del tiempo. Uno de estos métodos es el análisis armónico. La tercera vía de solución clásica es el método modal, siendo uno de los más utilizados en el análisis frente a sismo. A continuación se exponen brevemente los fundamentos de estos dos últimos métodos por su proximidad al método aplicado en este trabajo.

2.1. Método Modal

El método modal está basado en la ortogonalidad de los modos de vibración de la estructura. Aprovechando esta propiedad, se proyecta el sistema en unas *nuevas coordenadas* en las que sus ecuaciones se encuentran desacopladas optimizando así el tiempo de resolución de las mismas.

Operando los términos de (1), sin considerar la matriz de amortiguamiento, la ecuación homogénea se escribe:

$$(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (2)$$

De (2) pueden obtenerse los valores y vectores propios. Considerando que la fuerza aplicada puede descomponerse en un sumatorio de armónicos, y aprovechando las propiedades de ortogonalidad de los autovectores, pueden representarse cada uno de los términos en base a unas *nuevas coordenadas* según $\hat{\mathbf{M}} = \phi^t \mathbf{M} \phi$, en las que se obtienen n ecuaciones desacopladas en la forma:

$$\hat{m}_i \ddot{\mu} + \hat{k}_i \mu = \hat{f}_i \quad \text{para } i = 1, \dots, N_{dof} \quad (3)$$

cuya resolución puede realizarse analíticamente, mediante métodos de integración, con poco coste computacional.

La solución se construye como el sumatorio de los desplazamientos aportados por cada modo:

$$u(t) = \sum_{i=1}^N \phi^i(x) \mu^i(t). \quad (4)$$

Teniendo en cuenta que cada modo tiene un peso distinto en la solución final, el número N del sumatorio puede reducirse considerablemente eliminando aquellos modos con peso poco significativo y aun así representar con suficiente exactitud la solución, con lo que se reduce notablemente el número de datos y operaciones. Esta característica es la que permite ver el Método Modal como un método de reducción de modelos.

2.2. Análisis armónico

En muchos casos es suficiente conocer los desplazamientos máximos que provocan las fuerzas actuantes sobre la estructura, por lo que puede plantearse el problema en el espacio de la frecuencia, en donde las ecuaciones transformadas resultan más sencillas de resolver. El aumento de la potencia de los ordenadores y de la transformada rápida de Fourier han incrementado la utilidad de este método, estando muy presente en tratamiento de señales y, aunque su presencia es escasa en dinámica de estructuras por su coste computacional, se presenta aquí brevemente por su conexión con el método aplicado en este trabajo.

Si en (1), despreciando el amortiguamiento, $\mathbf{f}(t)$ puede representarse como un sumatorio de n armónicos:

$$\mathbf{f}(t) = \sum_n^{-n} \mathbf{C}_n e^{in\omega t} \quad (5)$$

en comportamiento elástico la respuesta final puede escribirse como suma de las respuestas a cada uno de los armónicos de (5), en donde gracias a la ortonormalidad de la base de Fourier, se obtiene una ecuación desacoplada para cada frecuencia contenida en la señal original:

$$(-n^2 \omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{U}_n = \mathbf{C}_n. \quad (6)$$

Finalmente, los desplazamientos se representan como una serie de Fourier en la forma:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_n^{-n} \mathbf{U}_n e^{in\omega t}. \quad (7)$$

2.3. Limitaciones de los métodos clásicos

La simulación de los efectos dinámicos en estructuras para su aplicación en tiempo real requiere la resolución del problema en milésimas de segundo. Para ello, debe existir un algoritmo rápido y robusto que proporcione las respuestas de forma inmediata.

El análisis armónico permite obtener la solución para cada frecuencia contenida en la fuerza aplicada como se ha visto en la sección 2.2. Para su uso en aplicaciones en tiempo real es necesario la resolución del sistema para cada una de las frecuencias contenidas en la fuerza aplicada. Cuando este número es grande, este método pierde su competitividad. Para su uso en aplicaciones de control, es necesario calcular la solución para una banda de frecuencias suficientemente amplia, lo cual implica discretizar la banda de frecuencias y resolver para cada una de ellas. Este cálculo, si bien es realizable en sistemas simples, es inviable para sistemas más complejos en los que se consideran otros parámetros además de la frecuencia.

El método modal es ampliamente utilizado en el cálculo dinámico de estructuras por su rapidez y posibilidad de reducción del modelo simulado. Pero presenta dos dificultades: la primera concierne a la matriz de amortiguamiento y la segunda a los problemas multiparámetros. Cuando el amortiguamiento no es proporcional a las matrices de masa y rigidez, la operatividad del método se ve comprometida. Cuando es proporcional, la proyección mediante los autovectores resulta en un sistema diagonal simple de resolver; si no es proporcional, debe resolverse un problema de autovalores cuadrático. Esto limita normalmente el uso del método a amortiguamientos proporcionales, con lo que la consideración del término de la disipación de energía evita consideraciones más generales de este fenómeno. Este es un proceso físico complejo que comprende desde los rozamientos entre las distintas partes de la misma hasta interacciones internas propias de los materiales, que si bien puede simularse con eficacia en algunos casos como combinación lineal de las matrices de masa y rigidez (amortiguamiento de Rayleigh) o como rigidez compleja, limita las opciones de simulaciones más completas.

Si se extiende el uso del método modal a problemas multiparámetros su resolución es normalmente inabordable. Considerando como parámetro el coeficiente de amortiguamiento, el uso del método en tiempo real requiere el precálculo del problema de valores propios para cada valor de la muestra de tamaño m del parámetro considerado. Si el coeficiente de amortiguamiento se considera un parámetro que no necesariamente deba ser proporcional, debe entonces resolverse el problema cuadrático de valores propios asociado. La obtención de los vectores propios en estos problemas no es ni mucho menos trivial y complica en gran manera el precálculo de la solución.

3. ANÁLISIS DINÁMICO DE ESTRUCTURAS EN TIEMPO REAL Y EL PARADIGMA DE LA REDUCCIÓN DE MODELOS

Los modelos paramétricos no tienen un fácil tratamiento en el seno de los métodos clásicos de análisis dinámico, sobre todo si se está interesado en las aplicaciones en tiempo real. A partir de esta observación surge la idea de aplicar métodos de reducción de modelos para reducir el coste computacional.

El coste computacional, desde el punto de vista del tiempo de resolución de los sistemas, puede mejorarse por un lado, reduciendo el número de datos a operar, y por otro lado, mejorando los algoritmos de resolución de los sistemas de ecuaciones.

Los métodos que operan con este objetivo se conocen como métodos de reducción de modelos. Entre ellos puede citarse la *POD* (*Proper Orthogonal Decomposition*) o la *RBM* (*Reduced Basis Method*), e incluso el método modal puede considerarse un método de reducción de modelos. El procedimiento general de operación de estos métodos puede resumirse en dos etapas: se realiza un muestreo del espacio paramétrico, es decir, se calculan las respuestas dinámicas para ciertos valores del parámetro. Dependiendo del método de reducción, el muestreo se realiza, en principio, aleatoriamente o guiado por un cierto estimador de error (RBM). En segundo lugar se construye una base reducida a partir de la información del muestreo. En dicha base reducida, de tamaño n , se espera que $n \ll N$.

Este procedimiento trabaja con datos *a posteriori*, es decir, reúne toda la posible información y en base a ella busca la mejor reducción posible. El procedimiento *a posteriori* implica trabajar con toda la base, cuando en muchos casos esta puede tener un tamaño inoperable. Frente a esto, existen métodos que proceden *a priori*, es decir, no necesitan de toda la información para construir una base reducida. En este grupo se encuentra el método de la PGD. La idea del método es construir la base por etapas, de forma que en cada etapa se enriquezca la solución. El fin de este proceso de enriquecimiento puede detenerse cuando se alcanza un error previamente fijado.

El avance aportado por el método PGD es el de permitir la resolución de problemas multi-paramétricos: mientras que esta opción resulta inabordable por otros métodos, el método de la PGD es eficiente incluso para un gran número de parámetros. En la resolución de un problema que considere d parámetros y una discretización de N nodos por cada uno de ellos, mediante métodos clásicos deben resolverse N^d problemas, es decir, el número de operaciones crece exponencialmente con el número de parámetros. Con la PGD, el número de incógnitas crece geométricamente, es decir, dN .

El método es especialmente eficiente en el tratamiento de los problemas paramétricos por el motivo anterior, ya que en dichos casos el volumen de datos a operar es normalmente inabordable, mientras que el algoritmo *a priori* utilizado evita la manipulación de grandes sistemas.

Ahora bien, ¿cuál es la relación entre modelos paramétricos y tiempo real? La idea es simple: lo ideal para realizar aplicaciones en tiempo real es calcular la respuesta del sistema para todo posible input. Para que ello sea posible, hay varios requisitos que deben cumplirse:

- Que el *input* sea parametrizable, y el número de parámetros sea preferiblemente pequeño.

- Ser capaces de almacenar y calcular en un tiempo razonable y utilizando dispositivos de capacidad razonable, la respuesta para todo valor del parámetro.

Esta estrategia, que debía descartarse ante la falta de algoritmos capaces, es hoy posible gracias a la PGD. La solución para todas las posibles situaciones unitarias previsibles se realiza en una fase de precálculo, o llamada también *offline*. Una vez realizado este precálculo, su aplicación *online* o en tiempo real, es una mera elección de la solución particular, con coste computacional despreciable. Aplicado a sistemas lineales, en los que es válida la teoría de superposición, la solución unitaria para todos aquellos parámetros considerados es suficiente, pues la solución final puede ser construida mediante superposición y proporcionalmente a las soluciones unitarias.

Es condición necesaria también el conocimiento de los rangos o límites en los que varían los parámetros que intervendrán. Ya que se va a calcular la solución completa, es requisito acotar cada uno de dichos parámetros. Obviamente la solución precalculada no tiene validez para valores fuera de los rangos considerados.

Parámetros habituales que afectan al cálculo dinámico de estructuras son el valor de las fuerzas externas, su frecuencia, su punto de aplicación, características físicas como el módulo de Young o el coeficiente de amortiguamiento, o las condiciones de contorno.

4. EL MÉTODO PGD PARA UNA RESOLUCIÓN EFICIENTE DE LOS PROBLEMAS PARAMÉTRICOS

Se exponen en esta sección los fundamentos del método con detalle. Mediante un ejemplo sencillo, se muestra el procedimiento de aplicación del algoritmo y se ilustran los resultados obtenidos.

4.1. Un ejemplo ilustrativo

Considérese que se quiere calcular la respuesta de una barra de longitud L , fija en uno de sus extremos y excitada en el extremo opuesto por una carga armónica de amplitud unitaria y frecuencia ω : $f(t) = \sin(\omega t)$. Supóngase que se quiere calcular la respuesta para toda frecuencia en una banda de frecuencias predeterminada, $I_\omega = [\omega_0, \omega_f]$. La solución según el método PGD se busca en forma de variables separadas y se escribe en la forma:

$$u(x, \omega) = \sum_{i=1}^N X_i(x) \cdot W_i(\omega). \quad (8)$$

Para una mejor comprensión del alcance del método se muestra en una primera parte la solución a este sencillo problema y, posteriormente, la formulación seguida para su elaboración. La solución obtenida depende únicamente de dos coordenadas, el espacio y la frecuencia, por lo que es fácilmente representable de manera gráfica en su totalidad: figura (1). En ella se puede observar la amplitud de los desplazamientos correspondiente a cualquier punto de la barra y para frecuencias en un rango $[0,60]$ Hz. Se puede apreciar también un pico en los desplazamientos en torno a 25 Hz, correspondiente a la primera frecuencia natural de la barra.

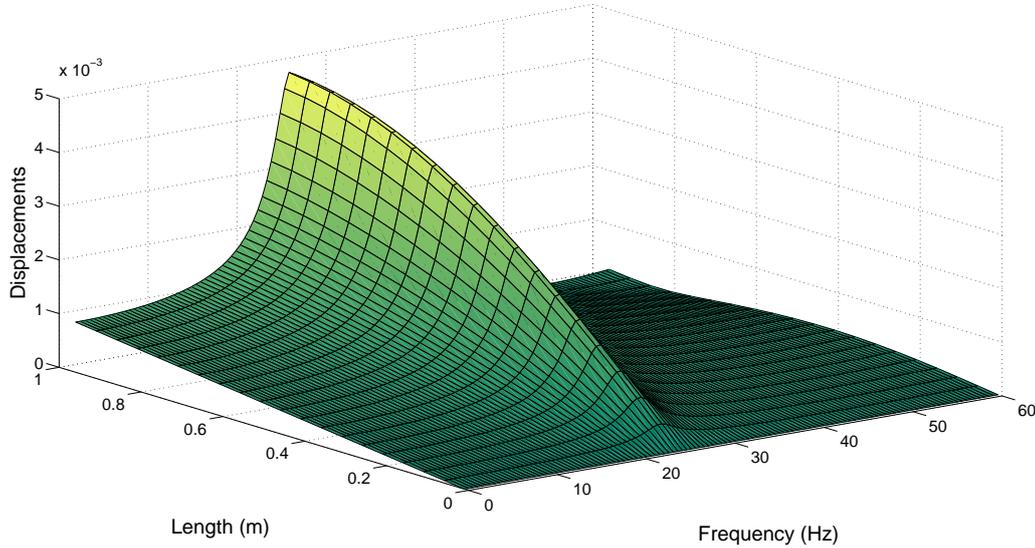


Figura 1: Ilustrando la PGD en un problema sencillo: solución en espacio y frecuencia calculada con la PGD

4.2. Formulación general para problemas de dinámica de estructuras

La PGD es un método de reducción de modelos basado en la representación paramétrica de la solución de una ecuación. El método construye una solución paramétrica a través de un procedimiento en el que mediante un esquema de iteraciones apropiadas se va enriqueciendo la solución.

Dicha solución se busca como un sumatorio de productos de funciones según (8), en donde cada una de las funciones depende de una sola coordenada (en casos complejos o de variables no separables las funciones pueden depender de más de una coordenada). En el problema que se ha resuelto en (4.1), se ha elegido como coordenadas el espacio y la frecuencia. Por lo tanto, la solución se representa como un sumatorio de N términos, en donde cada término se forma por el producto de \mathbf{X} y W , en donde el vector \mathbf{X} depende del espacio y proviene de la discretización del medio continuo, y W es una función que depende de la frecuencia. El número de términos N del sumatorio depende del error asumible prefijado, es decir, las iteraciones se detendrán al alcanzar el error establecido, siendo N el número de términos para alcanzar ese error.

Como se ha comentado, la solución se construye mediante una operación progresiva de enriquecimiento. Calculado el primer término, el segundo se obtiene en base al primero, el tercero en base a estos dos, y así sucesivamente de forma que el proceso vaya convergiendo hasta minimizar el error.

Imagínese que en el momento previo a la iteración n se conocen los primeros $n - 1$ términos. Se tiene entonces:

$$\mathbf{u}^{n-1}(x, \omega) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{X}_i \cdot W_i(\omega). \quad (9)$$

En este punto se quieren calcular el vector \mathbf{X} y la función W correspondientes a la iteración n . Por lo tanto, la solución se puede escribir como:

$$\mathbf{u}(x, \omega)^{n,p} = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{X}_i \cdot W_i(\omega) + \mathbf{R} \cdot S \quad (10)$$

de la que se quiere obtener \mathbf{R} y S , que dependen respectivamente del espacio y de la frecuencia, y que se encuentran multiplicadas entre sí; el problema a resolver es, pues, no lineal, y se resuelve en este caso mediante un proceso iterativo de punto fijo. La estrategia consiste en suponer conocidas todas las funciones excepto una y proceder a calcular esta, sustituyendo el valor de la recién calculada en la ecuación principal se procede a calcular otra de las funciones, y así sucesivamente hasta que el proceso converja al error prefijado. En (10), p representa por tanto las iteraciones internas del punto fijo.

Para aplicar el método a la dinámica, se recupera la ecuación (6), en la que se ha considerado un amortiguamiento complejo en la forma $\mathbf{K} = \hat{\mathbf{K}}(1 + i\xi)$. En forma compacta puede escribirse:

$$\mathbf{E}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (11)$$

en donde \mathbf{F} es un vector que contiene los coeficientes de la descomposición de Fourier y \mathbf{E} recoge:

$$\mathbf{E} = -n^2 \omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}. \quad (12)$$

Si se escribe (11) en forma residual ponderada:

$$\int_{\omega_o}^{\omega_f} \mathbf{U}^* (\mathbf{E} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{F}) d\omega = 0 \quad (13)$$

en donde:

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{R}^* \cdot S + \mathbf{R} \cdot S^*. \quad (14)$$

Se inicia aquí el proceso iterativo de punto fijo, en el que se comienza calculando \mathbf{R} suponiendo S conocida. Sustituyendo (10) y (14) en (13):

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_o}^{\omega_f} (\mathbf{R}^* \cdot S) (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) (\mathbf{R} \cdot S) = \\ & - \int_{\omega_o}^{\omega_f} (\mathbf{R}^* \cdot S) (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{X}_i \cdot W_i(\omega) + \int_{\omega_o}^{\omega_f} (\mathbf{R}^* \cdot S) \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (15)$$

Expandiendo los términos:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\omega_o}^{\omega_f} (\mathbf{R}^* \cdot S)(-\omega^2 \mathbf{M})(\mathbf{R} \cdot S) + \int_{\omega_o}^{\omega_f} (\mathbf{R}^* \cdot S) \mathbf{K}(\mathbf{R} \cdot S) = \\
 & \quad - \int_{\omega_o}^{\omega_f} (\mathbf{R}^* \cdot S)(-\omega^2 \mathbf{M}) \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{X}_i \cdot W_i(\omega) \\
 & \quad + \int_{\omega_o}^{\omega_f} (\mathbf{R}^* \cdot S) \mathbf{K} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{X}_i \cdot W_i(\omega) + \int_{\omega_o}^{\omega_f} (\mathbf{R}^* \cdot S) \mathbf{F}. \tag{16}
 \end{aligned}$$

En donde las integrales sobre ω pueden calcularse asumiendo S conocida:

$$D_1 = S^2 \omega^2 d\omega, \tag{17a}$$

$$D_2 = \int_{\omega_o}^{\omega_f} S^2 d\omega, \tag{17b}$$

$$N_{1i} = \int_{\omega_o}^{\omega_f} S W_i \omega^2 d\omega, \tag{17c}$$

$$N_{2i} = \int_{\omega_o}^{\omega_f} S W_i d\omega, \tag{17d}$$

$$\eta = \int_{\omega_o}^{\omega_f} S d\omega. \tag{17e}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{R}^* \mathbf{M} \mathbf{R} D_1 - \mathbf{R}^* \mathbf{K} \mathbf{R} D_2 = \\
 & \mathbf{R}^* \mathbf{M} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{X}_i N_{1i} - \mathbf{R}^* \mathbf{K} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{X}_i N_{2i} + \mathbf{R}^* \mathbf{F} \eta. \tag{18}
 \end{aligned}$$

En donde \mathbf{R} se calcula según:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}. \tag{19}$$

Obtenido \mathbf{R} , se halla S con un procedimiento análogo:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\omega_o}^{\omega_f} (\mathbf{R} \cdot S^*)(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})(\mathbf{R} \cdot S) = \\
 & \quad - \int_{\omega_o}^{\omega_f} (\mathbf{R} \cdot S^*)(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{X}_i \cdot W_i(\omega) + \int_{\omega_o}^{\omega_f} (\mathbf{R} \cdot S^*) \mathbf{F}. \tag{20}
 \end{aligned}$$

Separando los términos:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\omega_o}^{\omega_f} (\mathbf{R} \cdot S^*)(-\omega^2 \mathbf{M})(\mathbf{R} \cdot S) + \int_{\omega_o}^{\omega_f} (\mathbf{R} \cdot S^*) \mathbf{K}(\mathbf{R} \cdot S) = \\
 & \quad - \int_{\omega_o}^{\omega_f} (\mathbf{R} \cdot S^*)(-\omega^2 \mathbf{M}) \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{X}_i \cdot W_i(\omega) \\
 & \quad - \int_{\omega_o}^{\omega_f} (\mathbf{R} \cdot S^*) \mathbf{K} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{X}_i \cdot W_i(\omega) + \int_{\omega_o}^{\omega_f} (\mathbf{R} \cdot S^*) \mathbf{F}. \tag{21}
 \end{aligned}$$

Calculando las constantes en X :

$$\chi_{1i} = \mathbf{R}^H \mathbf{M} \mathbf{X}_i \tag{22a}$$

$$\chi_{2i} = \mathbf{R}^H \mathbf{K} \mathbf{X}_i \tag{22b}$$

$$\gamma_1 = \mathbf{R}^H \mathbf{M} \mathbf{R} \tag{22c}$$

$$\gamma_2 = \mathbf{R}^H \mathbf{K} \mathbf{R} \tag{22d}$$

$$\eta = \mathbf{R}^H \mathbf{F} \tag{22e}$$

donde el superíndice H representa el transpuesto conjugado. Sustituyendo las constantes:

$$\begin{aligned}
 & S^* \gamma_1 \omega^2 S - S^* \gamma_2 S = \\
 & S^* \omega^2 \sum_{i=1}^{n-1} \chi_{1i} \cdot W_i(\omega) - S^* \sum_{i=1}^{n-1} \chi_{2i} \cdot W_i(\omega) + S^* \eta. \tag{23}
 \end{aligned}$$

En donde se puede obtener S según:

$$S = \frac{\omega^2 \sum_{i=1}^{n-1} \chi_{1i} \cdot W_i(\omega) - \sum_{i=1}^{n-1} \chi_{2i} \cdot W_i(\omega) + \eta}{\omega^2 \gamma_1 + \gamma_2}. \tag{24}$$

La parada del proceso iterativo se produce cuando se alcanza un error prefijado $\epsilon(n)$:

$$\epsilon(n) = \frac{\|\mathbf{X}_n(x) \cdot W_n(\omega)\|}{\|\mathbf{X}_1(x) \cdot W_1(\omega)\|} \tag{25}$$

La solución obtenida se representa como sumatorio de una serie finita de modos, los cuales se obtienen como multiplicación de las funciones obtenidas mediante el proceso iterativo. En la figura (2) se muestra gráficamente la construcción de los primeros 3 modos.

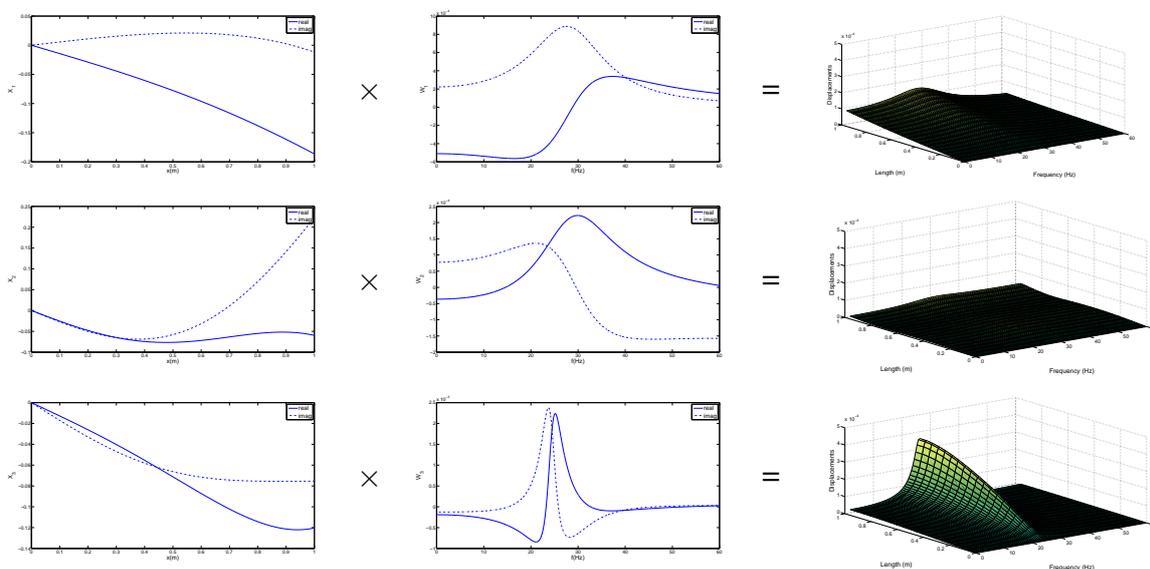


Figura 2: Construcción de los modos de la solución PGD

5. APLICACIONES

Se muestran en este apartado dos opciones que nos posibilita la resolución paramétrica del problema: la optimización y la resolución en tiempo real.

Considérese un sólido contenido en el espacio $K \subset \mathbb{R}^3$, del que se han calculado los desplazamientos para toda fuerza unitaria con frecuencia contenida en el espacio L_ω . Imagínese que se quiere calcular el desplazamiento en la posición x_j para una fuerza aplicada cualquiera. Su obtención es inmediata puesto que no es más que una mera particularización de la solución general. Teniendo en cuenta que la solución se encuentra almacenada en la forma:

$$u(x, \omega) = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i \cdot W_i(\omega) \quad (26)$$

u resulta una matriz $K \times L$ en donde K es la dimensión del espacio y L la dimensión correspondiente a la frecuencia. Encontrar, pues, el valor asociado a valores concretos de los parámetros es simple, eficiente, y como puede observarse, no presenta dificultad aun para un número importante de parámetros considerados. Si el espacio se ha discretizado por algún procedimiento como podría ser por elementos finitos, la solución puede interpolarse de la forma habitual a todo el espacio.

Si se desea recuperar su valor en tiempo, deben recordarse (5) y (6), por las que la señal puede descomponerse en suma de n funciones simples cada una de ellas asociada a una frecuencia. Realizando las operaciones en sentido inverso, puede reconstruirse la señal en tiempo a partir de la resolución en frecuencia, y mediante superposición reconstruir la señal temporal.

A su vez, si la solución paramétrica está formada por más de un parámetro, puede interesar evaluar uno o varios parámetros con respecto a valores fijos de los otros de acuerdo a intereses

de optimización.

Por otro lado, si lo que se desea es actuar en tiempo real, puede utilizarse la solución PGD como función de transferencia. La transformada de Fourier de un delta de Dirac en tiempo es una función unitaria que contiene a todas las frecuencias. Si se calcula la respuesta en frecuencia para una fuerza que contenga cualquier frecuencia, se obtiene con la transformada inversa de Fourier la respuesta en tiempo a una función impulso.

Recordando la relación entre las transformadas directa e inversa de Fourier:

$$\hat{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\exp(-i\omega t)dt \quad (27)$$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega)\exp(i\omega t)d\omega \quad (28)$$

y recordando también que se tiene precalculada la función de transferencia, los desplazamientos en el espacio de la frecuencia pueden calcularse como:

$$\hat{u}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) \quad (29)$$

en donde $\hat{f}(\omega)$ es la transformada de Fourier de la fuerza aplicada y $\hat{g}(\omega)$ es la función de transferencia. Aquí puede hacerse la antitransformada de Fourier para obtener los desplazamientos en tiempo. El inconveniente es que se requiere de la transformada de la fuerza para realizar la operación, y para ello debe haberse recibido previamente la señal para obtener su transformada, lo que es incompatible con aplicaciones en tiempo real. En cambio, si se aplica la siguiente igualdad:

$$u(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau \quad (30)$$

la obtención de los desplazamientos en tiempo resulta ser la convolución de la fuerza con la función de transferencia en tiempo. Por tanto, es suficiente tener precalculada la transformada inversa de Fourier de la función de transferencia para obtener en tiempo real los desplazamientos asociados a una fuerza de cualquier frecuencia. El coste computacional de la convolución es completamente coherente con los tiempos que se exigen en aplicaciones en tiempo real.

6. EXPERIENCIAS NUMÉRICAS Y RESULTADOS

Se ha aplicado el método a una estructura de barras según la figura (3) para la que se ha calculado la solución en desplazamientos para una fuerza de cualquier frecuencia actuando en su nodo central superior. La celosía evaluada es un tipo de viga ampliamente utilizado en ingeniería civil. Como condiciones de contorno se han impuesto desplazamiento y giro nulos en los apoyos, es decir, en los nodos 1 y 16.

En la figura (4) los resultados en desplazamientos obtenidos con el método de la PGD se comparan con la resolución frecuencia a frecuencia obtenida mediante el método de los ele-

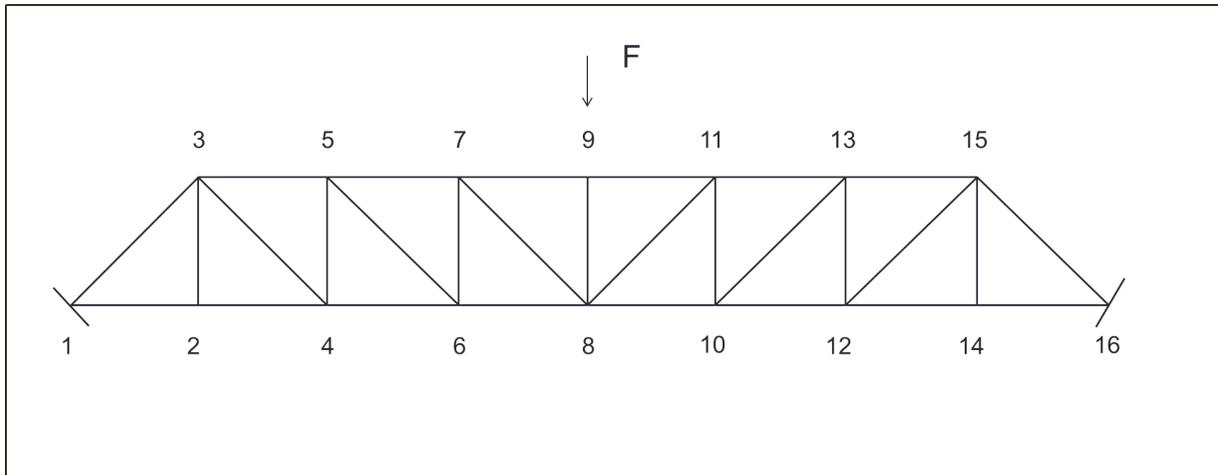


Figura 3: Celosía

mentos finitos. Dichos desplazamientos corresponden al nodo 3. Como se aprecia en la figura, el error no es apreciable.

En la figura (5) se muestran los desplazamientos del nodo 9, correspondiente al punto de aplicación de la carga, en dirección y , para cada frecuencia comprendida entre 0 y 50 Hz.

Suponiendo una fuerza senoidal, conteniendo 3 frecuencias (5.2, 10.4 y 15.6 Hz), representada en la figura (6), y que actúa en el nodo 9 en dirección vertical, se han calculado en tiempo real mediante una convolución los desplazamientos para todos los nodos de la estructura. En la figura (7) se muestran los correspondientes al nodo 9 en su dirección vertical.

7. CONCLUSIONES

La dinámica de estructuras es un campo de la ingeniería ampliamente estudiado, en el que existen numerosos métodos de abordar el problema. Pese a ello, la resolución de sistemas en tiempo real presenta todavía ciertas dificultades en problemas paramétricos, pues su resolución es en muchos casos inabordable computacionalmente. En problemas de control, dependientes de la variación de un número conocido de parámetros, se hace necesario un método que abarque la resolución del problema posibilitando no solo su resolución, sino también su aplicación en tiempo real.

El método PGD se presenta como una potente herramienta para el cálculo de soluciones paramétricas de estructuras. La posibilidad de obtener una solución en función de un cierto número de parámetros, opción inabordable por métodos clásicos, brinda nuevas oportunidades en el campo de la optimización: la evaluación de los parámetros en este caso es rápida y sencilla.

Por otra parte, su uso en aplicaciones que requieren respuestas en tiempo real es una muestra de las posibilidades que aporta el método. Disponer de las soluciones unitarias precalculadas es un escenario ideal para resolver en tiempo real sistemas frente a cualquier tipo de entrada.

Los resultados obtenidos se han comparado con los obtenidos por medios clásicos no existiendo error apreciable en la solución PGD. Tanto los resultados obtenidos en medios continuos

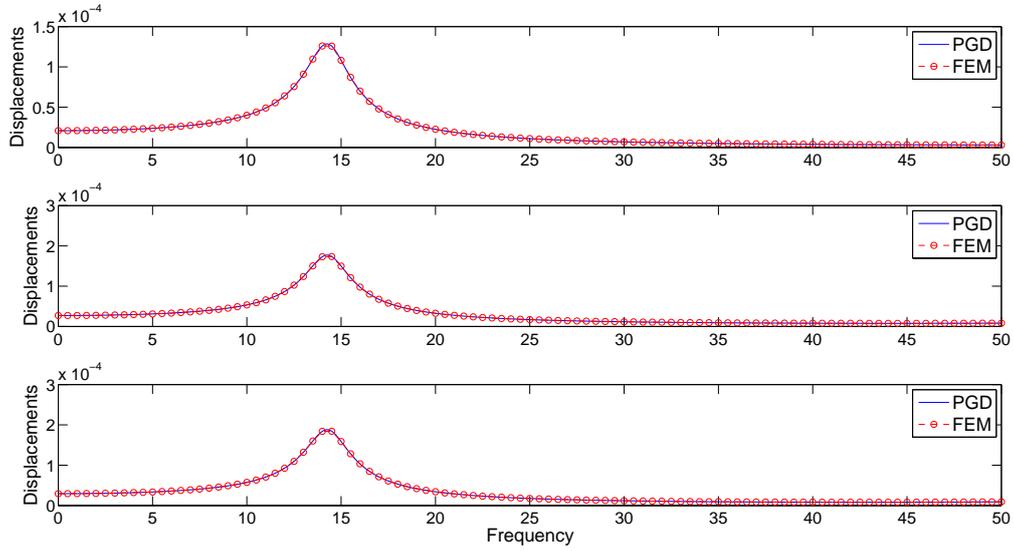


Figura 4: Comparación entre las soluciones FEM y PGD en el nodo número 3 para sus 3 grados de libertad

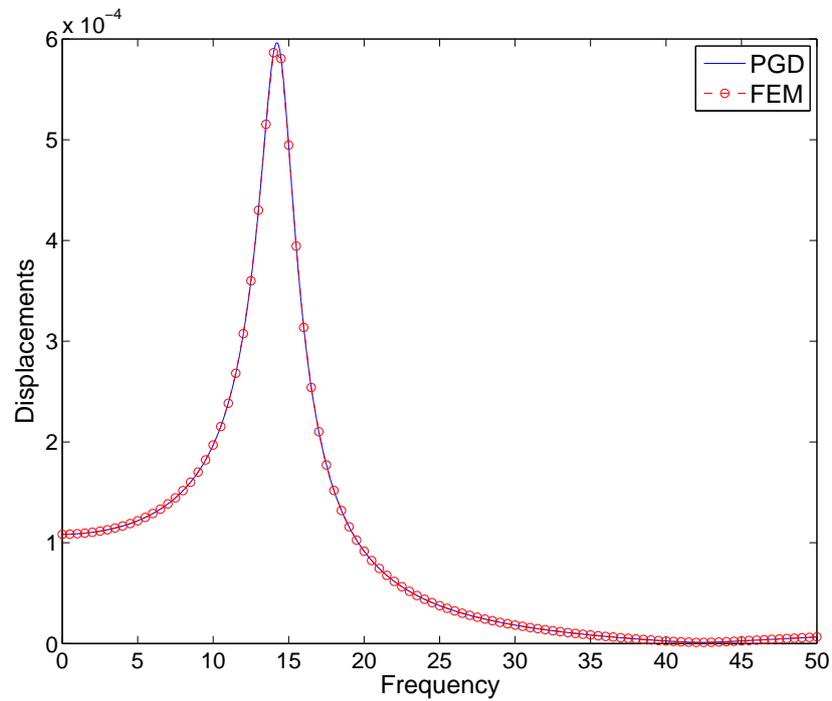


Figura 5: Comparación entre las soluciones FEM y PGD en el nodo número 9 en dirección y

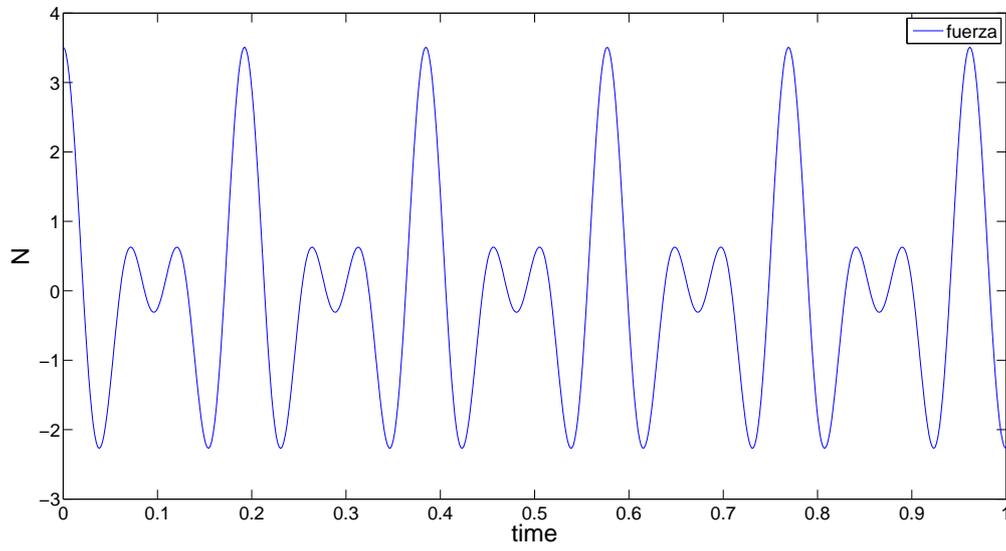


Figura 6: Fuerza aplicada

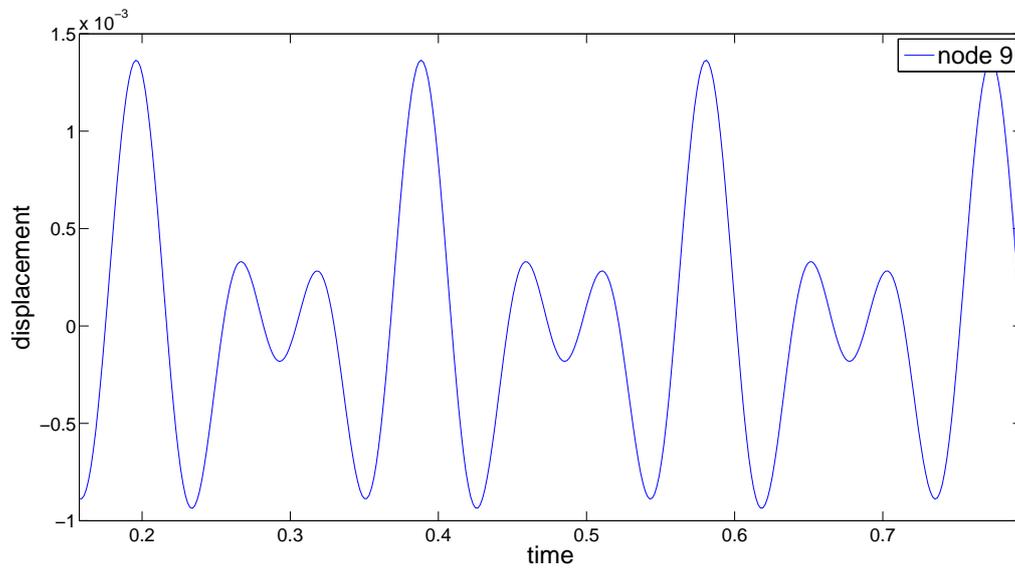


Figura 7: Desplazamientos en tiempo para el nodo 9 en dirección y

como estructuras de barras han sido satisfactorios según puede observarse en los gráficos aportados.

REFERENCIAS

- [1] Ammar, A, Mokdad, B, Chinesta, F, Keunings, R (2006) *A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids*. J Non-Newton Fluid Mech 139: pp. 153-176
- [2] Ammar, A, Normandin, M, Chinesta, F (2010) *Solving parametric complex fluids models in rheometric flows*. J Non-Newton Fluid Mech 165: pp. 1588-1601
- [3] Bognet, B, Leygue, A, Chinesta, F, Poitou, A, Bordeu, F (2012) *Advanced simulation of models defined in plate geometries: 3D solutions with 2D computational complexity*. Comput Methods Appl Mech Eng 201: pp. 1-12
- [4] Bordeu F, Leygue A, Modesto D, Gonzalez D, Cueto E, Chinesta F. *Real-time simulation techniques for augmented learning in science and engineering higher education. A PGD approach*. Arch Comput Methods Eng, submitted
- [5] Chinesta, F, Ammar, A, Leygue, A, Keunings, R (2011). *An overview of the proper generalized decomposition with applications in computational rheology*. J Non-Newton Fluid Mech 166: pp. 578-592
- [6] Clough, R W, Penzien, J. *Dynamics of Structures*, 2nd edition, McGraw-Hill, New York, 1993.
- [7] Jolliffe I.T. *Principal Component Analysis*. 2nd ed., Springer, NY, 2002
- [8] Noor, A K, Peters, J M, *Reduced basis technique for nonlinear analysis of structures*, AIAA Journal, 18 (1980).
- [9] Timoshenko, S, Young, D. *Advanced Dynamics*. Literary Licensing, LLC (July 14, 2012)
- [10] Zienkiewicz, O C, *The finite element method* Mc. Graw Hill (1979).