

SUBESCALAS DE ORDEN REDUCIDO PARA MODELOS POD EN PROBLEMAS DE DINÁMICA DE FLUIDOS

Joan Baiges^{*,1,2}, Ramon Codina^{2,1} y Sergio Idelsohn^{3,1}

¹ Centre Internacional de Mètodes Numèrics a l'Enginyeria (CIMNE),
Edifici C1, Campus Nord UPC C/ Gran Capità S/N 08034 Barcelona, Spain

² Universitat Politècnica de Catalunya, Jordi Girona 1-3, Edifici C1, 08034 Barcelona, Spain

³ Intitució Catalana de Recerca i Estudis Avançats (ICREA), Passeig Luíís Companys 23,
08010 Barcelona, Spain

*jbaiges@cimne.upc.edu

Palabras clave: Modelos de Orden Reducido, POD, Métodos Multiescala

Resumen. *En este trabajo se presentan las subescalas de orden reducido para métodos de descomposición ortogonal apropiada (POD). La idea básica consiste en separar la solución de alta fidelidad en dos partes: la parte que puede ser capturada por el modelo reducido y la parte que no, para la cuál se necesita un modelo. El modelo propuesto para las subescalas se define como una función lineal de la solución del modelo reducido para las mismas condiciones iniciales. La diferencia entre ambas soluciones (alta fidelidad y modelo reducido) son las subescalas, que se construyen mediante un proceso de mínimos cuadrados. El modelo resultante se pone a prueba en varios ejemplos numéricos.*

1 INTRODUCCIÓN

Los modelos de descomposición ortogonal apropiada (POD) consisten en la proyección de representaciones de alta fidelidad (de orden completo) de problemas físicos en Mecánica Computacional a espacios de soluciones de dimensión reducida. Estos espacios reducidos son capaces de capturar los componentes más representativos de la solución, y su principal ventaja es que los cálculos en el espacio de orden reducido se pueden hacer a un coste computacional bajo. Ésto ha llevado a los investigadores a aplicar modelos basados en POD varios problemas de física e ingeniería [7, 8, 3, 2, 5, 4]

A pesar de todas las ventajas de las estrategias de modelado de orden reducido, los modelos POD aún tienen algunos problemas sin resolver que les impiden ser utilizados en la ingeniería del día a día. Uno de estos problemas se relaciona con el hecho de que el efecto de las componentes del modelo de alto orden que no está presente en el espacio de orden reducido no se tiene en cuenta en las ecuaciones de orden reducido. Este problema es bien conocido en otros contextos de la mecánica computacional como son los elementos finitos, dónde se han desarrollado formulaciones estabilizados para tratar

con las inestabilidades del método de Galerkin. Uno de los marcos más populares para el desarrollo de formulaciones estabilizadas es el Método Multiescala Variacional (VMS) [6].

En este trabajo se propone aplicar las ideas VMS a los modelos de orden reducido POD. Algunas aplicaciones del método VMS a los modelos POD se puede encontrar en la literatura [9, 10, 11, 1].

Contrariamente a los trabajos anteriores sobre el método VMS aplicado a modelos POD, presentaremos un modelo para las subescalas de orden reducido que no requieren de grados de libertad adicionales. Para ello, se desarrollará una estrategia que tiene como objetivo tener en cuenta la componente intermedia de la solución, es decir, la componente que puede ser representado por el espacio de elementos finitos, pero no puede ser capturada por el espacio de orden reducido. Esta componente son las subescalas de orden reducido. La solución de orden completo puede ser dividida en la solución de orden reducido y las subescalas.

Esto resulta en un sistema de orden reducido modificado. Como se verá, cuando se compara con el modelo de orden reducido original, el sistema modificado tiene varias ventajas: para el mismo número de grados de libertad, se obtienen soluciones más precisas, y cuando se trata con problemas que son típicamente difíciles de resolver usando modelos de orden reducido (flujo a altos números de Reynolds), es capaz de proporcionar soluciones precisas mediante el uso de un número reducido de grados de libertad.

2 POD para un problema genérico

Definamos el espacio vectorial de incógnitas $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^M$ y el espacio de orden completo $\mathcal{V} = \mathbb{R}^M$. M representa la dimensión de la incógnita. El problema transitorio no lineal es:

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}^{n+1})\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{R}(\mathbf{U}^n, \mathbf{U}^{n-1}, \dots), \quad (1)$$

donde n es el contador de pasos de tiempo, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ es la matriz del sistema y $\mathbf{R}$ es el lado derecho.

La aproximación de la incógnita en el espacio reducido es:

$$\mathbf{U} \approx \Phi \mathbf{U}_\Phi + \bar{\mathbf{U}}. \quad (2)$$

donde $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times m}$ es la base ortogonal para el espacio reducido $\mathcal{V}_\Phi$, $\bar{\mathbf{U}}$ es el vector de valores medios, y m es la dimensión del espacio reducido. Algunos operadores interesantes que permiten moverse entre el espacio completo y el reducido son el operador de restricción $\mathcal{R}_\Phi : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^m$, :

$$\mathcal{R}_\Phi(\mathbf{U}) = \Phi^T (\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}) \in \mathbb{R}^m,$$

y el operador de extensión $\mathcal{E} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^M$, :

$$\mathcal{E}(\mathbf{U}_\Phi) = \Phi \mathbf{U}_\Phi + \bar{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^M.$$

Tambi3n definimos el operador de proyecci3n $\mathcal{V}_\Phi$, $\Pi_\Phi : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$:

$$\Pi_\Phi(\mathbf{U}) = \mathcal{E}(\mathcal{R}_\Phi(\mathbf{U})).$$

El sistema reducido resultante es:

$$\Phi^T \mathbf{A} \Phi \mathbf{U}_\Phi^{n+1} = \Phi^T \mathbf{R} - \Phi^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{U}}. \quad (3)$$

En las siguientes secciones utilizaremos la notaci3n:

$$\mathbf{A}_\Phi := \Phi^T \mathbf{A} \Phi \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad (4)$$

$$\mathbf{R}_\Phi := \Phi^T (\mathbf{R} - \mathbf{A} \bar{\mathbf{U}}) \in \mathbb{R}^m, \quad (5)$$

con lo que el sistema reducido resultante es:

$$\mathbf{A}_\Phi := \Phi^T \mathbf{A} \Phi \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad (6)$$

$$\mathbf{R}_\Phi := \Phi^T (\mathbf{R} - \mathbf{A} \bar{\mathbf{U}}) \in \mathbb{R}^m, \quad (7)$$

3 Subescalas para modelos reducidos

La idea principal consiste en descomponer la inc3gnita en cada paso de tiempo en su proyecci3n al espacio reducido y las subescalas:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \Pi_\Phi(\mathbf{U}^{n+1}) + \tilde{\mathbf{U}}^{n+1}. \quad (8)$$

El sistema reducido teniendo en cuenta la contribuci3n de las subescalas es:

$$\mathbf{A}_\Phi \mathcal{R}_\Phi(\mathbf{U}^{n+1}) + \Phi^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{U}}^{n+1} = \mathbf{R}_\Phi, \quad (9)$$

n3tese el t3rmino adicional debido al espacio no capturado por el modelo reducido. Esta contribuci3n deber3 ser tomada en cuenta mediante un modelo para las subescalas. El modelo que proponemos consiste en la definici3n de un campo de subescalas $\mathbf{S}^{n+1} \in \mathcal{V}_\Phi$ y su expresi3n en la base reducida Φ , $\mathbf{S}_\Phi^{n+1} \in \mathbb{R}^m$, tal que:

$$\mathbf{A}_\Phi \mathbf{S}_\Phi^{n+1} \approx \Phi^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{U}}^{n+1},$$

con lo que el sistema reducido final queda:

$$\mathbf{A}_\Phi (\mathbf{U}_\Phi^{n+1} + \mathbf{S}_\Phi^{n+1}) = \mathbf{R}_\Phi, \quad (10)$$

La expresi3n para el campo de subescalas considerada en este trabajo es una relaci3n lineal con la soluci3n de orden reducido, aunque se podr3an considerar modelos m3s complejos:

$$\mathbf{S}_\Phi^{n+1} = \mathbf{C}_s \mathbf{U}_\Phi^{n+1} + \mathbf{D}_s. \quad (11)$$

Los coeficientes de este modelo se ajustan mediante un proceso de m3nimos cuadrados usando la informaci3n de la soluci3n muestra usada para construir la base de orden reducido (v3ase [4] para una explicaci3n detallada del ajuste de los coeficientes del modelo num3rico para las subescalas).

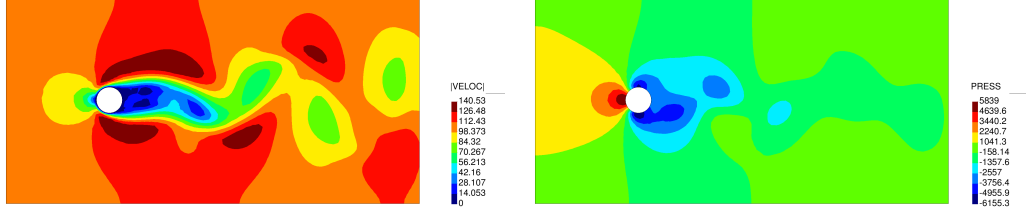


Figura 1: Campos de velocidad y presión, flujo alrededor del cilindro

4 Algunos ejemplos numéricos

En esta sección presentamos algunos ejemplos numéricos que ilustran el rendimiento de las subescalas de orden reducido en casos prácticos. Nos centramos primero en problemas con pocos grados de libertad, en los que se muestra la capacidad del modelo de subescalas para mejorar la precisión de la solución obtenida con el modelo de orden reducido. Finalmente nos centramos en un problema para el que, más allá de un cierto punto, aumentando el número de grados de libertad de la solución de orden reducido conduce a una pobre mejora de la precisión. En este caso las subescalas de orden reducido son capaces de incrementar la precisión usando un número relativamente bajo de grados de la libertad.

4.1 Ejemplo 1

En el primer ejemplo numérico aplicamos el método desarrollado a un problema de flujo incompresible, que consiste en encontrar un campo de velocidades $\mathbf{u}$ y una presión p tales que:

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (13)$$

En este ejemplo numérico se estudia el flujo incompresible alrededor un cilindro en $Re = 100$. La figura 1 muestra los campos de velocidad y de presión resultantes en un instante determinado.

La figura 2 muestra una comparación de la historia del campo de velocidades entre el modelo completo, y el reducido usando y sin usar subescalas. Se observa que la precisión es mucho mayor usando el modelo de subescalas.

4.2 Ejemplo 2

En esta sección se resuelve el clásico problema del escalón en dinámica de fluidos usando modelos reducidos. Los campos de velocidades y presiones resultantes se muestran en la figura 3.

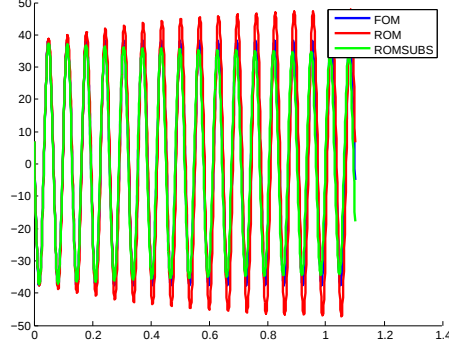


Figura 2: Time history of the vertical velocity at (6.5,4). Comparativa de la historia del campo de velocidades entre el modelo completo, y el reducido usando y sin usar subescalas.

La figura 4 compara la historia temporal y el espectro en el espacio de Fourier en un punto del flujo usando modelos reducidos con y sin subescalas. Se observa que el modelo con subescalas presenta resultados mucho mejores.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un modelo para las subescalas de orden reducido en modelos POD. La idea básica consiste en dividir la solución en parte capturable por el espacio reducido y la parte que no puede ser capturada, las subescalas.

El modelo propuesto para las subescalas se define como una función lineal de la solución del modelo de orden reducido. Los coeficientes de esta función lineal se obtienen mediante la comparación de la solución de la orden completa y la solución del modelo de orden reducido para algunas soluciones de prueba. La diferencia entre ambas soluciones (de orden reducido y completo) son las subescalas, para las que un modelo puede ser construido usando un proceso de mínimos cuadrados.

Finalmente, el modelo de orden reducido mejorado se ha probado en varios ejemplos numéricos. Estos casos prácticos muestran que el uso de las subescalas conduce a soluciones más precisas y permite resolver problemas de flujo complejos utilizando un número reducido de grados de libertad.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente financiado por el *Ministerio de Economía y Competitividad* del Gobierno de España bajo el Plan Nacional de Investigación 2012: AYA2012-33490 y parcialmente financiado mediante el proyecto Advanced Grant: ERC-2009-AdG “Real Time Computational Mechanics Techniques for Multi-Fluid Problems”. Ramon Codina agradece el soporte recibido

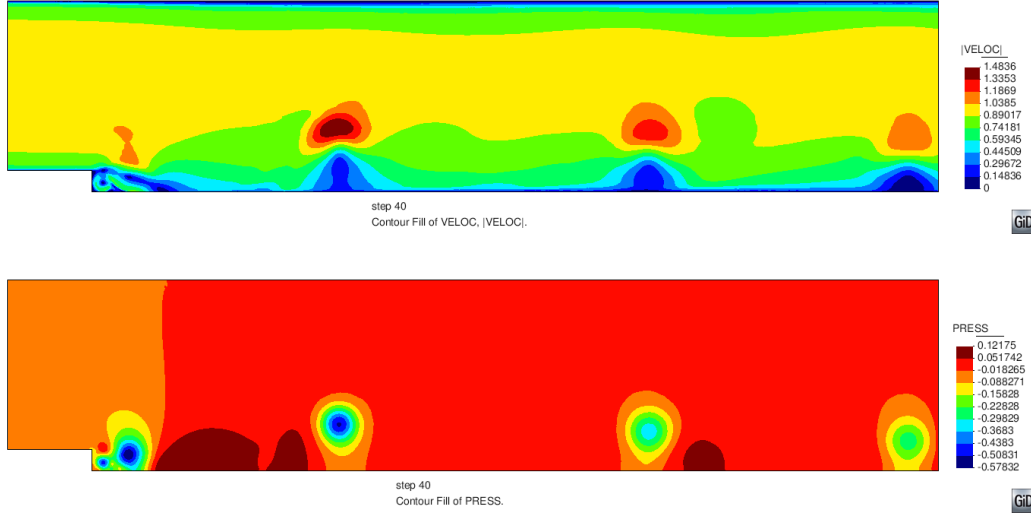


Figura 3: Campos de velocidad y presión en el problema del escalón.

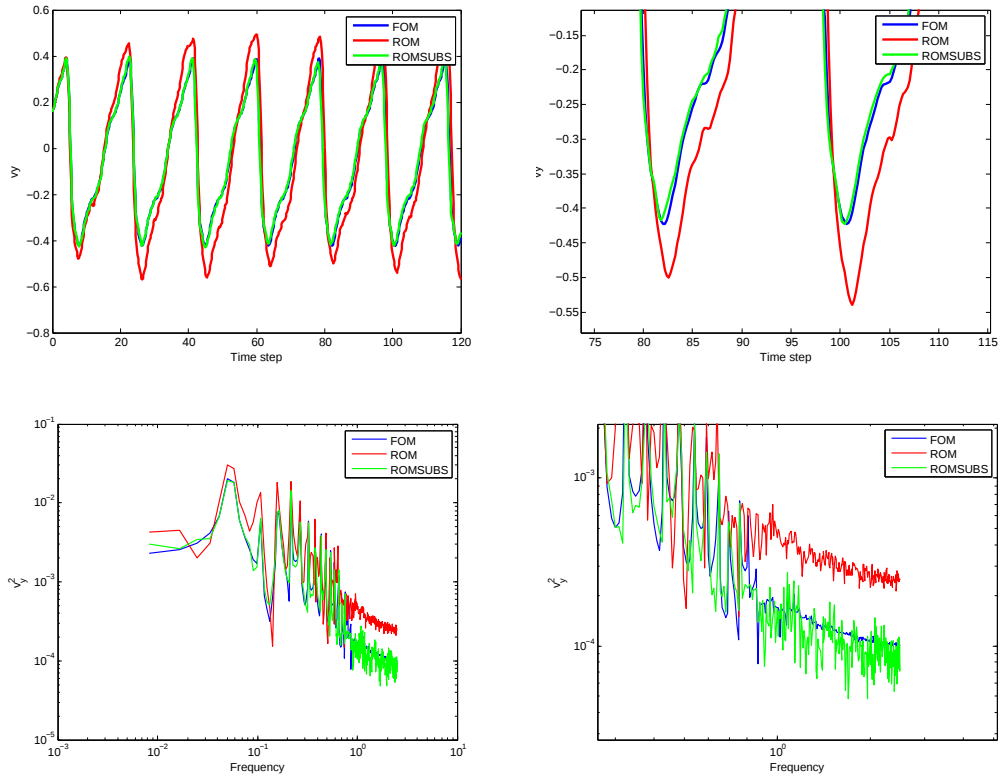


Figura 4: Comparativa de resultados en alto orden y orden reducido con y sin subescalas. Arriba: Historia del campo de velocidad, componente vertical. Abajo: Espectro en el espacio de Fourier.

del Gobierno Catalán a través del ICREA Acadèmia Research Program.

REFERENCIAS

- [1] G. Artana, A. Cammilleri, J. Carlier, and E. MÃ©min. Strong and weak constraint variational assimilations for reduced order fluid flow modeling. *Journal of Computational Physics*, 231(8):3264 – 3288, 2012.
- [2] J. Baiges, R. Codina, and S. Idelsohn. A Domain Decomposition strategy for Reduced Order Models. Application to the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 267:23–42, 2013.
- [3] J. Baiges, R. Codina, and S. Idelsohn. Explicit Reduced Order Models for the stabilized finite element approximation of the incompressible Navier-Stokes equations. , 72:1219–1243, 2013.
- [4] Joan Baiges, Ramon Codina, and Sergio Idelsohn. Reduced-order subscales for {POD} models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (0):–, 2015.
- [5] J. Burkardt, M. Gunzburger, and H. Lee. POD and CVT-based reduced-order modeling of Navier-Stokes flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(1-3):337–355, 2006.
- [6] T.J.R. Hughes, G.R. Feijóo, L. Mazzei, and J.B. Quincy. The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166:3–24, 1998.
- [7] F. Lihong. Review of model order reduction methods for numerical simulation of nonlinear circuits. *Applied Mathematics and Computation*, 167(1):576–591, 2005.
- [8] C. Maier, A. Epureanu, V. Marinescu, and F. M. Bogdan. A new concept of the reduced order modeling in metal forming. In *Proceedings of the 6th WSEAS international conference on Dynamical systems and control*, CONTROL’10, pages 133–136, Stevens Point, Wisconsin, USA, 2010. World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS).
- [9] S. Y. Shvartsman and I. G. Kevrekidis. Nonlinear model reduction for control of distributed systems: A computer-assisted study. *AIChE Journal*, 44(7):1579–1595, 1998.
- [10] S. Sirisup and G.E. Karniadakis. A spectral viscosity method for correcting the long-term behavior of POD models. *Journal of Computational Physics*, 194(1):92 – 116, 2004.
- [11] Zhu Wang, Imran Akhtar, Jeff Borggaard, and Traian Iliescu. Proper orthogonal decomposition closure models for turbulent flows: a numerical comparison. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 237:10–26, 2012.