

ANÁLISE DE ESTABILIDADE E VIBRAÇÃO DE BARRAS DE PAREDE FINA FLETIDAS COM SEÇÃO EM I ATRAVÉS DA TEORIA GENERALIZADA DE VIGAS (GBT)

Andréa G. Rodrigues^{1*}, Marcílio Freitas¹, Dinar Camotim² e Pedro Borges Dinis²

1: EM, DECIV, PROPEC, UFOP

Escola de Minas, Depart. de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Federal de Ouro Preto

Campus Universitário Morro do Cruzeiro, CEP 35400-000, Ouro Preto, MG, Brasil
e-mail: rgandrea@yahoo.com.br, marcilio@em.com.br

2: CERis, ICIST

Instituto Superior Técnico
Universidade de Lisboa

Av. Rovisco Pais, 1, 1049-001, Lisboa
e-mail: {dinis, dcamotim}@civil.ist.utl.pt

Palavras-chave: Teoria Generalizada de Vigas (GBT), análises de estabilidade e de vibração, cargas críticas, frequências, modos globais, distorcionais e locais

Resumo. *As barras constituídas por perfis de aço formados a frio exibem seções de parede fina muito esbeltas, o que as torna suscetíveis a fenômenos de instabilidade e vibração envolvendo deformações locais (L), distorcionais (D) e globais (G). A importância relativa destes três tipos de deformações depende da geometria (comprimento e dimensões da seção transversal) e das condições de apoio da barra. Apesar de ser inegável a importância do estudo do comportamento de vibração de barras carregadas, i.e., tomando em consideração a influência do carregamento nos valores das frequências naturais e nas formas dos correspondentes modos de vibração, o número de trabalhos publicados neste domínio é relativamente escasso, devendo referir-se aos trabalhos de Ohga et al. [18], Okamura & Fukasawa [19], Hashemi & Richard [10] e Silvestre & Camotim [25] – note-se, no entanto, que todos estes envolveram unicamente barras submetidas a cargas axiais (esforços normais). É ainda importante mencionar que o último adota análises baseadas na Teoria Generalizada de Vigas (GBT), mas considera apenas barras com seção de parede fina “não ramificada” (cada nó é partilhado por não mais que duas paredes). O objetivo deste trabalho consiste em aplicar a GBT para avaliar o comportamento de estabilidade e vibração de barras de parede fina com seção em I (“ramificada”), submetidas à flexão reta (em torno dos eixos de maior e menor inércia) ou desviada devida à aplicação de momentos de extremidade de igual valor – em particular, analisam-se barras simplesmente apoiadas constituídas por perfis de aço formados a frio tipo U enrijecido ligados através das almas. Para fins de validação, alguns dos resultados obtidos através das análises baseadas na GBT são comparados com valores fornecidos por fórmulas analíticas ou análises de elementos finitos efetuadas com o programa ABAQUS (Simulia Inc. [27]).*

1. INTRODUÇÃO

Elementos estruturais de aço formados por seções transversais de paredes finas sujeitos a ações dinâmicas constituem foco de relevante interesse em várias áreas da engenharia. Em razão da expressiva esbelteza, avaliar a eficiência estrutural dos perfis que os compõem exige compreender a diversidade dos fenômenos de deformações envolvidos, de natureza global, local ou distorcional. Com esse intuito, diferentes técnicas de análise têm sido empregadas, sendo considerável o número de publicações relativas ao *Método dos Elementos Finitos* (MEF) e ao *Método das Faixas Finitas* (MFF) e suas variações. A esse respeito, merecem referência os trabalhos de Kawai & Muraki [12], Krajcinovic [14], Dubigeon & Kim [7], Banerjee & Williams [1], Tanaka & Bercin [28] e Moon-Young *et al.* [16] sobre o comportamento de vibração global (por flexão e/ou flexo-torção) e as investigações conduzidas por Hashemi & Richard [10] sobre a influência da compressão axial na vibração de barras. No âmbito da vibração local, Noor *et al.* [17] compararam elementos finitos de casca e de barra, lineares e não lineares. Klausbruckner & Pryputniewicz [13] efetuaram ensaios experimentais e análises numéricas com elementos finitos de casca para estudar barras curtas com seção em *U*. Ohga *et al.* [18] implementaram um método alternativo ao MFF semi-analítico, denominado “método da matriz de transferência”, para analisar colunas curtas simplesmente apoiadas formadas por perfis *I*, *U* e tubular (retangular), validando resultados com Okamura & Fukusawa [19]. Mais recentemente, De Borbón & Ambrosini [5] realizaram um estudo numérico e experimental para avaliar a influência dos carregamentos axiais em vigas de paredes finas. Prokić *et al.* [20] estudaram a vibração por flexo-torção em barras com seções transversais abertas arbitrárias submetidas a carregamentos axiais. Kashani *et al.* [11] examinaram a vibração em vigas com várias condições de contorno sujeitas à combinação de esforços axiais e de flexão.

Outra metodologia desenvolvida especialmente para analisar o comportamento de barras prismáticas de paredes finas é a *Teoria Generalizada de Vigas* (GBT) (Schardt [22]), que se distingue dos métodos tradicionais por empregar um processo exclusivo de decomposição “modal” capaz de aproximar a configuração deformada de uma barra (modo de instabilidade/vibração) através de uma combinação linear de “modos de deformação” da seção, contabilizando tanto efeitos globais (relativos à deformação do eixo da barra) quanto locais (associados a deformações da seção transversal no seu próprio plano). Como vantagens adicionais, a GBT propicia ainda (i) considerar nas análises apenas modos preponderantes, previamente selecionados, o que implica menor número de graus de liberdade e consequente economia computacional sem comprometer a precisão dos resultados, (ii) avaliar o grau de interação entre esses modos e (iii) determinar os correspondentes percentuais de contribuição modal. Saal [21], Schardt & Heinz [23], Silvestre & Camotim [25, 26] e Bebiani *et al.* [2] utilizaram-na para investigar o comportamento dinâmico de barras de parede fina com seções transversais abertas “não ramificadas”.

Objetivando salientar as potencialidades da GBT, o presente artigo apresenta um estudo sobre estabilidade e vibração de barras simplesmente apoiadas, formadas por seções transversais de paredes finas abertas “ramificadas”, a exemplo de uma seção em *I*. Preliminarmente, faz-se uma breve descrição dos fundamentos básicos da GBT. Em particular, descrevem-se as etapas

sequenciais: (i) *análise da seção*, que envolve procedimentos para identificar os modos de deformação da seção e determinar as propriedades mecânicas associadas; (ii) *análise da barra*, que compreende a resolução das equações de equilíbrio e correspondentes condições de contorno. A seguir, avalia-se como a magnitude do carregamento de compressão ou flexão aplicado afeta o comportamento de vibração (global, distorcional e local) dos elementos estruturais estudados. Empregam-se fórmulas analíticas e análises por elementos finitos de casca para validar alguns dos resultados fornecidos pela GBT.

2. TEORIA GENERALIZADA DE VIGAS (GBT)

Para elucidar alguns conceitos essenciais à compreensão da GBT, considera-se a barra prismática de parede fina com seção transversal aberta ramificada (figura 1), formada por placas de material linear elástico e isotrópico, rigidamente interconectadas entre si. Indica-se por X, Y, Z o sistema de coordenadas globais. Em cada placa, o sistema de eixos locais é designado por x, s, z , em que x define o comprimento longitudinal da barra ($0 \leq x \leq L$), s corresponde à linha média da seção e z é medido na direção perpendicular ao plano médio da seção ao longo da espessura (e).

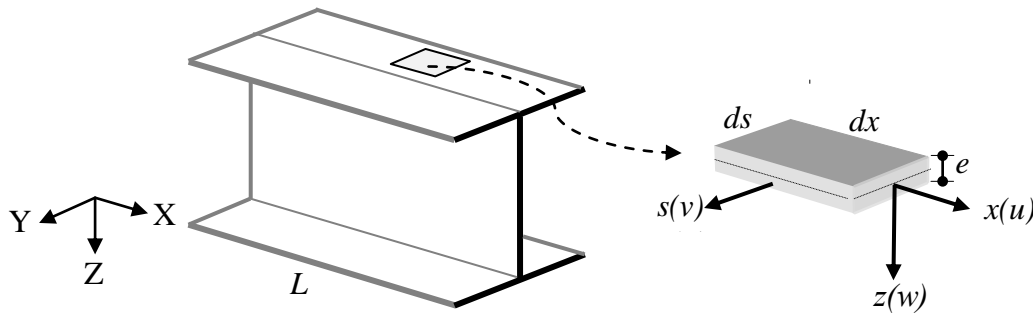


Figura 1. Seção de parede fina, elemento infinitesimal de placa e campo de deslocamentos.

Com base nos pressupostos da teoria clássica de vigas, as três componentes do campo de deslocamentos $u(x, s, z, t)$, $v(x, s, z, t)$ e $w(x, s, z, t)$ associadas ao sistema de eixos local, definidas num determinado intervalo de tempo (t), exprimem-se como a soma de produtos entre dois tipos de funções:

$$u(x, s, t) = \sum u_k(s) \cdot \phi_{k,x}(x, t) \quad v(x, s, t) = \sum v_k(s) \cdot \phi_k(x, t) \quad w(x, s, t) = \sum w_k(s) \cdot \phi_k(x, t) \quad (1)$$

em que $(.)_{,x} \equiv \partial(.)/\partial x$ e $(.)_{,s} \equiv \partial(.)/\partial s$. Aplica-se a convenção de soma ao índice k , que representa cada modo de deformação. As funções de deslocamentos axiais $u_k(s)$, transversais de membrana $v_k(s)$ e de flexão $w_k(s)$ correspondem aos perfis de deslocamentos associados ao modo k , obtidos durante a primeira etapa de aplicação da GBT, ou seja, *análise da seção*. As funções de amplitude $\phi_k(x, t)$, incógnitas do problema a serem determinadas na *análise da*

barra, fornecem a variação longitudinal desses perfis com o comprimento da barra num dado instante de tempo.

No plano médio de cada placa, assume-se como hipótese simplificativa o anulamento das distorções de membrana ($\gamma_{xs}^M = u_{,s} + v_{,x} = 0$) (Vlasov) e das extensões transversais de membrana ($\varepsilon_{ss}^M = 0$) (Kirchhoff-Love). Dessa forma, as relações cinemáticas relevantes entre deformações e deslocamentos associadas a um campo de deslocamentos genérico escrevem-se como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^M &= u_{,x} & \varepsilon_{xx}^F &= -Zw_{,xx} & \varepsilon_{xx}^{NL} &= \frac{1}{2} \left((v_{,x})^2 + (w_{,x})^2 \right) \\ \varepsilon_{ss}^M &= 0 & \varepsilon_{ss}^F &= -Zw_{,ss} & \gamma_{xs}^{NL} &= w_{,s}w_{,x} + v_{,s}v_{,x} \\ \gamma_{xs}^M &= 0 & \gamma_{xs}^F &= -2Zw_{,xs} \end{aligned} \quad (2)$$

em que se observa a decomposição dos termos em parcelas de membrana (M) e flexão (F). No contexto de análises lineares de estabilidade e de vibração carregada, os termos não lineares (NL) fazem-se imprescindíveis para obtenção da matriz de rigidez geométrica.

Em cada placa submetida a um estado plano de tensão ($\sigma_{xz} = \sigma_{sz} = \sigma_{zz} = 0$) e deformação ($\gamma_{xz} = \gamma_{sz} = \varepsilon_{zz} = 0$), as relações constitutivas (tensão-deformação) são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{ss} \\ \sigma_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{ss} \\ \gamma_{xs} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

em que E (módulo de elasticidade), G (módulo de distorção) e ν (coeficiente de Poisson) representam as constantes elásticas do material.

Substituindo as expressões (2) e (3) em (1), obtêm-se as componentes tensões-deslocamentos:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^F &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} (w_k \phi_{k,xx} + \nu w_{k,ss} \phi_k) & \sigma_{xx}^M &= \frac{E}{1-\nu^2} u_k \phi_{k,xx} \\ \sigma_{ss}^F &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} (w_{k,ss} \phi_k + \nu w_k \phi_{k,xx}) & \sigma_{ss}^M &= \frac{E\nu}{1-\nu^2} u_k \phi_{k,xx} \\ \sigma_{xs}^F &= -\frac{Ez}{1+\nu} w_{k,s} \phi_{,x} & \sigma_{xs}^M &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Para estabelecer as equações diferenciais de equilíbrio da GBT, utiliza-se o Princípio de Hamilton:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(U + \Pi - T) dt = 0 \quad (5)$$

que estipula que a variação da energia cinética (T), energia de deformação (U) e potencial das

forças externas (Π) evoluem num sistema conservativo da configuração inicial para a final no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$ de forma a tornar estacionário o valor do funcional. Incorporando a expressão (4) em (5), integrando por partes e efetuando as simplificações descritas pormenorizadamente por Silvestre [24], obtêm-se:

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_L (C_{ik} \phi_{k,xx} \delta \phi_{i,xx} + D_{ik} \phi_{k,x} \delta \phi_{i,x} + B_{ik} \phi_k \delta \phi_i) dx + \int_L W_j^0 X_{jik} \phi_{k,x} \delta \phi_{i,x} dx \\ \delta T &= \int_L (Q_{ik} \phi_{k,xt} \delta \phi_{i,xt} + R_{ik} \phi_{k,t} \delta \phi_{i,t}) dx\end{aligned}\quad (6)$$

As expressões finais dos tensores resultantes da integração das componentes de deslocamentos $u_k(s)$, $v_k(s)$ e $w_k(s)$ e suas derivadas ao longo da linha média da seção são dadas por:

$$\begin{aligned}C_{ik} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \int_s e u_i u_k ds + \frac{E}{12(1-\nu^2)} \int_s e^3 w_i w_k ds \\ B_{ik} &= \frac{E e^3}{12(1-\nu^2)} \int_s w_{i,ss} w_{k,ss} ds \\ D_{ik} &= \frac{G e^3}{3} \int_s w_{i,s} w_{k,s} ds - \frac{\nu E e^3}{12(1-\nu^2)} \int_s (w_i w_{k,ss} + w_k w_{i,ss}) ds \\ X_{jik} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \int_s e u_j (v_i v_k + w_i w_k) ds \\ Q_{ik} &= \rho e \int_s u_i u_k ds + \int_s \frac{\rho e^3}{12} w_i w_k ds \\ R_{ik} &= \rho e \int_s (v_i v_k + w_i w_k) ds + \int_s \frac{\rho e^3}{12} w_{i,s} w_{k,s} ds\end{aligned}\quad (7)$$

onde $i \geq 1$, $1 \leq j \leq 4$ e $k = 1, \dots, n+1$.

Reagrupando os termos da energia de deformação (δU) e da energia cinética (δT), observando que a primeira variação da diferença entre elas é nula no intervalo de tempo $[0, T]$ e considerando arbitrariamente as variações $\delta \phi_i$, obtém-se o sistema de equações diferenciais de equilíbrio. Deve-se sublinhar que a forma inovadora com que a GBT trata a caracterização da configuração deformada da barra conduz a um sistema de equações de equilíbrio escrito convenientemente na forma “modal”:

$$[C_{ik}\phi_{k,xxxx} - D_{ik}\phi_{k,xx} + B_{ik}\phi_k - \lambda_p W_j^0 X_{jik}\phi_{k,xx}] - [\omega^2 (R_{ik} - Q_{ik})\phi_{k,xx}] = 0 \quad (8)$$

que permite:

- (i) precisar os diversos fenômenos envolvidos no comportamento de barras de paredes finas, os quais possuem significados mecânico-estruturais claramente identificados a partir das componentes das matrizes: (i) C_{ik} que se relaciona com a rigidez da seção em relação aos deslocamentos axiais de suas paredes; (ii) D_{ik} associada à rigidez da seção à rotação de torção; (iii) B_{ik} referente à rigidez da seção a deformações locais; (iv) X_{jik} que representa as propriedades geométricas não lineares associadas às resultantes das tensões normais e tangenciais que atuam na barra; (v) Q_{ik} e R_{ik} que representam forças de inércia que atuam respectivamente no plano da seção e na direção perpendicular a esse mesmo plano.
- (ii) analisar a vibração livre de barras (sem tensões normais, $W_j^0(x) \equiv 0$) e/ou a estabilidade e vibração de elementos estruturais na presença de (i) esforço axial ($W_1^0(x) \equiv N(x)$), (ii) momentos fletores em torno dos eixos de maior ($W_2^0(x) \equiv M_Z(x)$) e menor inércia ($W_3^0(x) \equiv M_Y(x)$), bimomento ($W_4^0(x) \equiv \Theta(x)$) ou quaisquer outras combinações, em que ω representa a frequência de vibração e λ_p indica o parâmetro de carga.

Recorrendo unicamente a relações geométricas, é possível obter a representação modal do campo de deslocamentos e determinar as matrizes associadas à identificação das propriedades (geométricas, mecânicas e de massa) e os modos de deformação da seção. Tais procedimentos englobam a *análise da seção*. Exclusivamente para seções transversais abertas ramificadas, a exemplo da seção em *I* (figura 2), aplica-se a formulação desenvolvida por Dinis *et al.* [6].

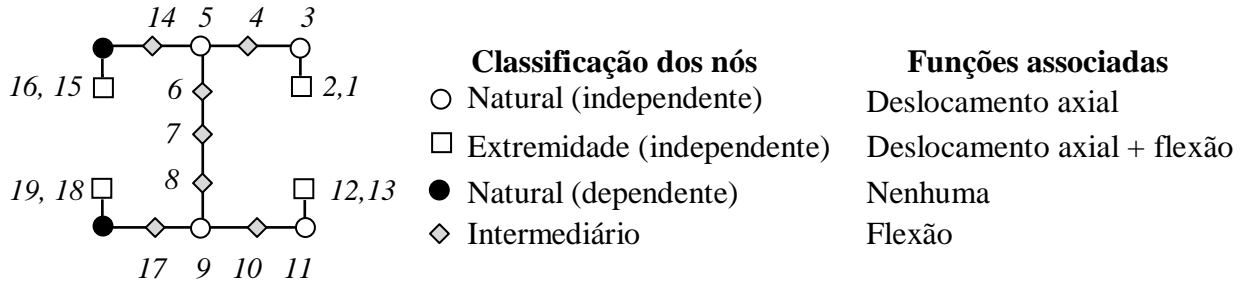


Figura 2. Perfil *I*: discretização, classificação dos nós e funções associadas.

Em decorrência da discretização nodal adotada para a seção em *I*, obtém-se um conjunto de 19 funções que conduzem aos seguintes modos *convencionais*: (i) modos *globais* (**1– 4**) associados a movimentos de corpo rígido da seção (**1** - extensão axial, **2** - flexão em torno do eixo de maior inércia, **3** - flexão em torno do eixo menor inércia, **4** - torção); (ii) modos *distorcionais* (**5 – 8**) que envolvem deslocamentos de nós internos no plano da seção e deformação da seção com empenamento das suas paredes; (iii) modos *locais de placa* (**9 – 19**) que resultam na deformação da seção sem empenamento nem deslocamento de nós internos. A figura 3 indica a representação da configuração deformada no plano da seção de alguns dos

principais modos puros de deformação (2 – 15).

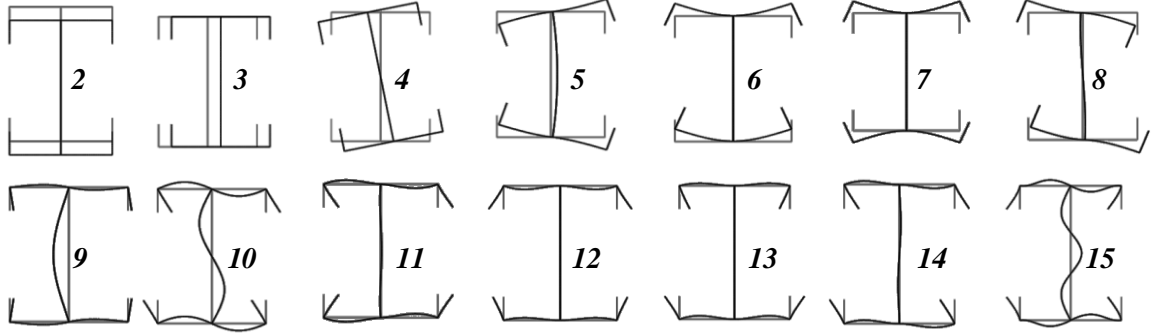


Figura 3. Principais modos de deformação da seção em I: configurações deformadas no plano da seção.

A etapa seguinte consiste na *análise da barra*, que abrange uma série de operações a partir da definição de condições de apoio, propriedades materiais, comprimento da barra e carregamento aplicado, seguida da resolução do sistema de equações de equilíbrio, o que pode ser feito através de métodos apropriados (exatos ou aproximados).

Ressalta-se que a GBT proporciona a opção de selecionar apenas um único modo de deformação (modo individual) ou os modos mais relevantes combinados entre si (modos mistos).

Especificamente para barras simplesmente apoiadas, a solução do sistema de equações de equilíbrio envolvendo um único modo de deformação k pode ser obtida de forma exata, sendo $\phi_k(x)$ expressa por funções sinusoidais:

$$\phi_k(x) = d_k \sin\left(\frac{n_s \pi x}{L}\right) \quad (9)$$

em que d_k representa a amplitude do modo de deformação k e n_s indica o número de semi-comprimentos de onda da respectiva variação longitudinal (L). Substituindo a expressão (9) em (8) e efetuando a derivação em ordem a x , definem-se problemas de autovalores (λ ou ω^2) e autovetores ($d_k = [\phi_1 \dots \phi_n]$) relativos às análises de:

(i) *Estabilidade*

$$\left(\mathbf{C}_{ik} \left(\frac{n_s \pi}{L} \right)^4 + \mathbf{D}_{ik} \left(\frac{n_s \pi}{L} \right)^2 + B_{ik} + \lambda_p \mathbf{X}_{jik} \left(\frac{n_s \pi}{L} \right)^2 \right) \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} \sin\left(\frac{n_s \pi x}{L}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

que fornece as resultantes das tensões de bifurcação, o valor crítico do parâmetro de carga e os correspondentes modos de instabilidade.

(ii) *Vibração*

 (a) *Livre* (sem carregamentos atuantes)

$$\left(\mathbf{C}_{ik} \left(\frac{n_s \pi}{L} \right)^4 + \mathbf{D}_{ik} \left(\frac{n_s \pi}{L} \right)^2 + \mathbf{B}_{ik} - \omega^2 (\mathbf{R}_{ik} + \mathbf{Q}_{ik} \left(\frac{n_s \pi}{L} \right)^2) \right) \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} \sin \left(\frac{n_s \pi x}{L} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

 (b) *Carregada*

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{C}_{ik} \left(\frac{n_s \pi}{L} \right)^4 + \mathbf{D}_{ik} \left(\frac{n_s \pi}{L} \right)^2 + \mathbf{B}_{ik} + \lambda_p \mathbf{X}_{jik} \left(\frac{n_s \pi}{L} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. - \omega^2 (\mathbf{R}_{ik} + \mathbf{Q}_{ik} \left(\frac{n_s \pi}{L} \right)^2) \right) \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} \sin \left(\frac{n_s \pi x}{L} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

que conduz às frequências e aos modos de vibração associados.

3. EXEMPLOS ILUSTRATIVOS

Para ilustrar a aplicação da GBT em análises de estabilidade e de vibração de elementos estruturais constituídos por seções de parede fina compostas, abertas e ramificadas, associam-se dois perfis *U* enrijecidos (Georgieva *et al.* [8]) de aço formado a frio ($E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$ e $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$), os quais dão origem a uma seção composta do tipo *I* (figura 4).

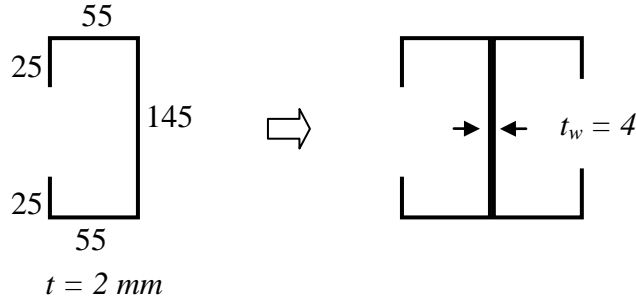


Figura 4. Seção transversal composta em *I*.

Relativamente às condições de apoio, admitem-se todos os elementos estruturais analisados simplesmente apoiados, cujas seções extremas são local e globalmente articuladas, podendo empenar livremente. No que diz respeito aos carregamentos atuantes, consideram-se: (i) colunas sujeitas a esforços de compressão axial (N) e (ii) vigas submetidas a momentos flettores (M_y e/ou M_z), de igual valor, aplicados em ambas as extremidades, atuando no plano da seção transversal coincidente com um dos eixos principais de inércia (figura 5).

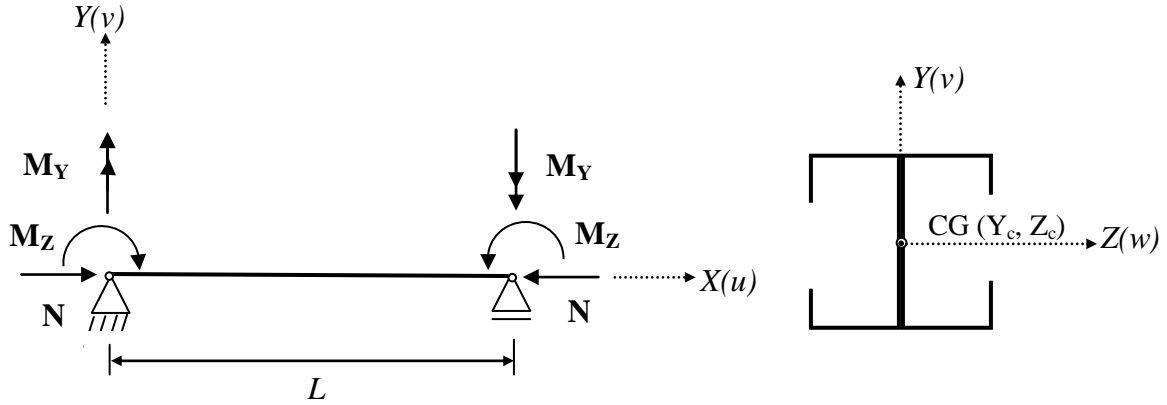


Figura 5. Carregamentos considerados nas análises de estabilidade e de vibração dos elementos estruturais.

Dependendo da combinação dos esforços aplicados, o sistema de equações de equilíbrio da GBT permite realizar análises de estabilidade e de vibração em elementos estruturais sob:

- (i) esforço axial: $W_1^0 = \lambda_{cr}P$, $W_2^0 = W_3^0 = 0$
- (ii) flexão em torno do eixo Z: $W_1^0 = 0$, $W_2^0 = \lambda_{cr}M_z$ e $W_3^0 = 0$
- (iii) flexão em torno do eixo Y: $W_1^0 = W_2^0 = 0$ e $W_3^0 = \lambda_{cr}M_y$
- (iv) flexão desviada: $W_1^0 = 0$, $W_2^0 = \lambda_{cr}M_z$ e $W_3^0 = \lambda_{cr}M_y$

em que λ_{cr} indica o parâmetro crítico de carga e a resultante das tensões aplicadas:

- (i) $W_1^0 = 0$ associa-se às componentes da matriz \mathbf{X}_1 relativas ao esforço de compressão axial $W_1 \equiv \lambda P_b$ (devido ao modo 1).
- (ii) $W_2^0 = \lambda_{cr}M_z$ corresponde às componentes da matriz \mathbf{X}_2 que representa o diagrama de tensões com variação linear em Z (devido ao modo 2).
- (iii) $W_3^0 = \lambda_{cr}M_y$ associa-se às componentes da matriz \mathbf{X}_3 que traduz o diagrama de tensões com variação linear em Y (devido ao modo 3).

Preliminarmente, para subsidiar as análises de vibração, analisa-se a estabilidade de colunas comprimidas axialmente e de vigas submetidas à flexão no intuito de avaliar como o nível do carregamento crítico atuante influencia o comportamento de vibração. Em suma, os resultados apresentados consistem basicamente de: (i) valores das resultantes das tensões de bifurcação (forças axiais/momentos fletores) e configurações dos correspondentes modos de instabilidade; (ii) valores de frequências fundamentais de vibração e configurações dos respectivos modos de vibração; (iii) fatores de participação de cada modo de deformação nos modos de instabilidade/vibração.

A) ANÁLISES DE ESTABILIDADE

A.1) Estabilidade de colunas submetidas à compressão axial

Os gráficos (figura 6) mostram para colunas com vários comprimentos ($10 \leq L \leq 1000$ cm):

- (i) as cargas de bifurcação ($P_{b,1}$) relativas à combinação simultânea de todos os modos puros

de deformação (1 – 19) e aos modos individuais (3, 4, 5 e 9) para um único semi-comprimento de onda ($n_s = 1$); (ii) o efeito do número de semi-ondas ($1 \leq n_s \leq 10$) nos modos críticos de instabilidade; (iii) os correspondentes diagramas de participação modal e (iv) a comparação entre a configuração dos respectivos modos de instabilidade obtidos via GBT e ABAQUS para colunas de comprimento $L = 100$ cm.

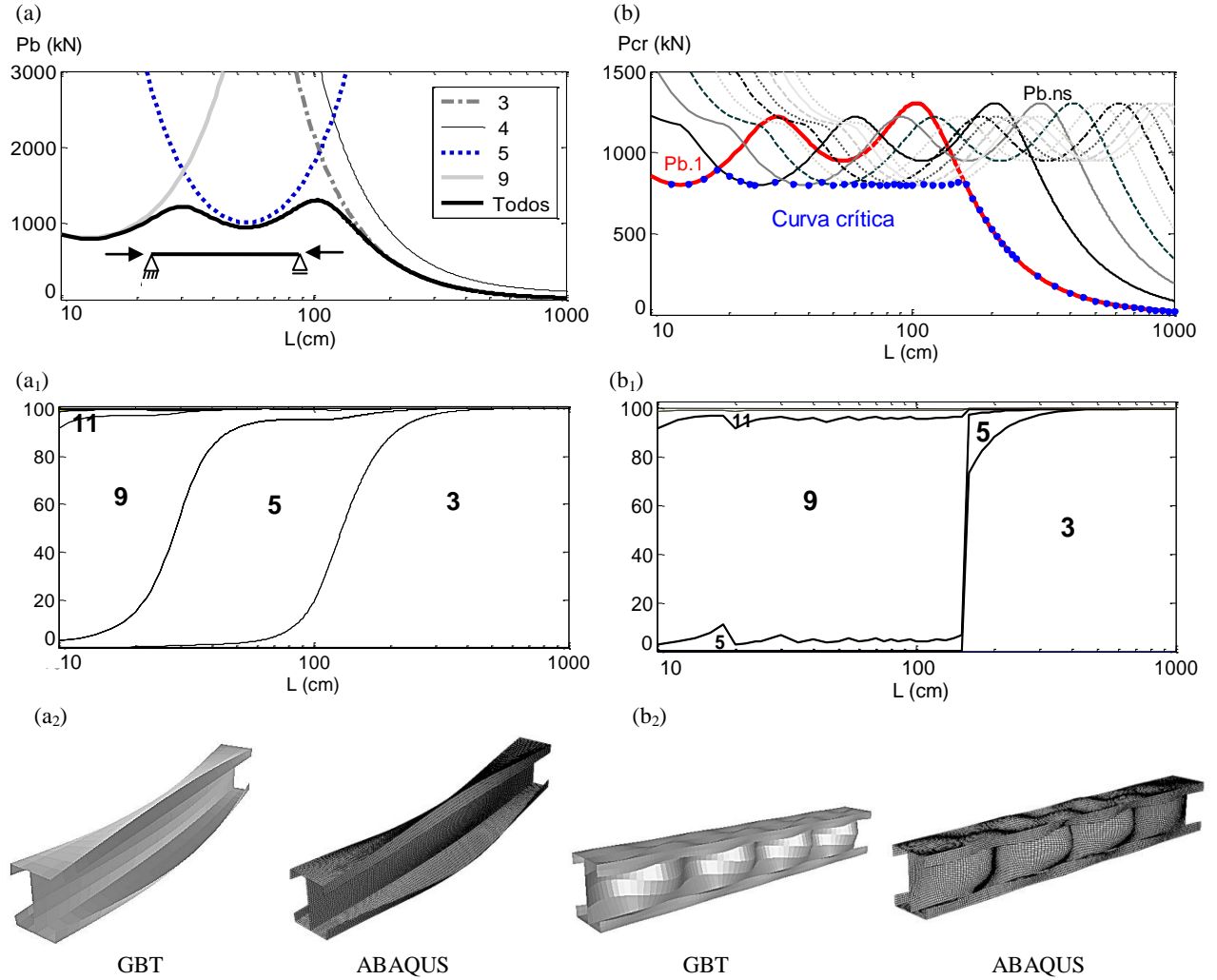


Figura 6. Estabilidade de colunas: curvas (a) $P_{b,1}(L)$ e (b) $P_{cr}(L)$. Participação modal para (a₁) $n_s = 1$. (b₁) $n_s = \infty$ (modo crítico). Configuração dos respectivos modos de instabilidade para coluna com $L = 100$ cm: (a₂) para $n_s = 1$ e (b₂) modo crítico.

Nota-se que:

- (i) Na figura 6(a), a curva exata $P_{b,1}(L)$ relativa a uma única semi-onda e a todos os modos exhibe segmentos coincidentes com as curvas dos modos individuais 3, 5 e 9.

- (ii) Dois valores mínimos apresentam-se bem definidos, associados respectivamente à instabilidade no modo local de placa (**MLP** \equiv 9) e no modo distorcional (**MD** \equiv 5): $P_{b,1(LP)} \cong 801.3 \text{ kN}$ ($L = 13 \text{ cm}$) e $P_{b,1(D)} \cong 949.5 \text{ kN}$ ($L = 54 \text{ cm}$).
- (iii) Em comprimentos intermediários, predominam modos mistos que envolvem a combinação do modo local de placa/distorcional (**MLPD** \equiv 9 + 5) ou global/distorcional (**MFD** \equiv 3 + 5).
- (iv) No segmento final, a curva $P_{b,1}(L)$ decresce acentuadamente. O modo distorcional (**MD** \equiv 5) deixa de participar gradualmente da instabilidade da coluna até preponderar a instabilidade global por flexão em torno do eixo de menor inércia (**MF** \equiv 3).
- (v) Como não tangencia a curva exata, mostra-se que o modo 4 não influi na instabilidade da coluna.
- (vi) Na figura 6(b), à proporção que o número de semi-ondas ($1 \leq n_s \leq 10$) aumenta, as curvas de bifurcação $P_{b,ns}(L)$ deslocam-se horizontalmente para a direita até intersectarem no segmento final a curva $P_{b,1}(L)$ relacionada a $n_s = 1$. Independentemente do número de semi-ondas, todos os valores mínimos (**MLP** ou **MD**) equivalem aos encontrados para $n_s = 1$.
- (vii) A curva crítica $P_{cr}(L)$ não coincide necessariamente com $P_{b,1}(L)$ em todo o trajeto. Apenas para $L \leq 18 \text{ cm}$ e $L \geq 158 \text{ cm}$, $P_{cr}(L) \equiv P_{b,1}(L)$. Nesses trechos, os modos de instabilidade associam-se exclusivamente a $n_s = 1$.
- (viii) Entre $18 \leq L \leq 158 \text{ cm}$, $P_{cr} = \min(P_{b,1} \dots P_{b,10})$ agrega parcialmente segmentos das curvas relativas a $1 \leq n_s \leq 10$ e tende a linearizar-se para valores de $P_{cr} \cong 801.3 \text{ kN}$. Nesse intervalo, dependendo do comprimento, as colunas podem se instabilizar num modo crítico com uma ou várias semi-ondas. Para $L = 100 \text{ cm}$, por exemplo, tem-se $n_s = 8$, como mostrado na figura 6(b₂).
- (ix) Os diagramas de participação modal indicados nas figuras 6(a₁)-(b₁) evidenciam o predomínio do modo global de flexão (**MF** \equiv 3) para colunas longas.

A.2) Estabilidade de vigas submetidas à flexão

Os gráficos (figura 7) apresentam (i) a variação dos momentos $M_{z,bns}$ e $M_{y,bns}$ com o comprimento ($0 \leq L \leq 1000 \text{ cm}$) das vigas incluindo todos os modos puros de deformação (1 – 19); (ii) os diagramas que traduzem as correspondentes composições modais e (iii) as configurações dos modos de instabilidade obtidas da GBT e do ABAQUS para $L = 100 \text{ cm}$. Mostra-se que:

- (i) As curvas relativas a $M_{z,b1}(L)$ e $M_{y,b1}(L)$ apresentam comportamento similar ao da instabilidade da coluna comprimida, exibindo dois valores mínimos associados respectivamente aos modos locais de placa (**MLP**) ($L = 6 \text{ cm}$) e distorcionais (**MD**) ($L = 50 \text{ cm}$) que correspondem à:
 - (a) Flexão em torno do eixo Z: $M_{z,b1(LP)} \cong 6702 \text{ kN.m}$ e $M_{z,b1(D)} \cong 7110 \text{ kN.m}$, como indicado na figura 7(a).
 - (b) Flexão em torno do eixo Y: $M_{y,b1(LP)} \cong 2032 \text{ kN.m}$ e $M_{y,b1(D)} \cong 2810 \text{ kN.m}$, como mostra a figura 7(b).

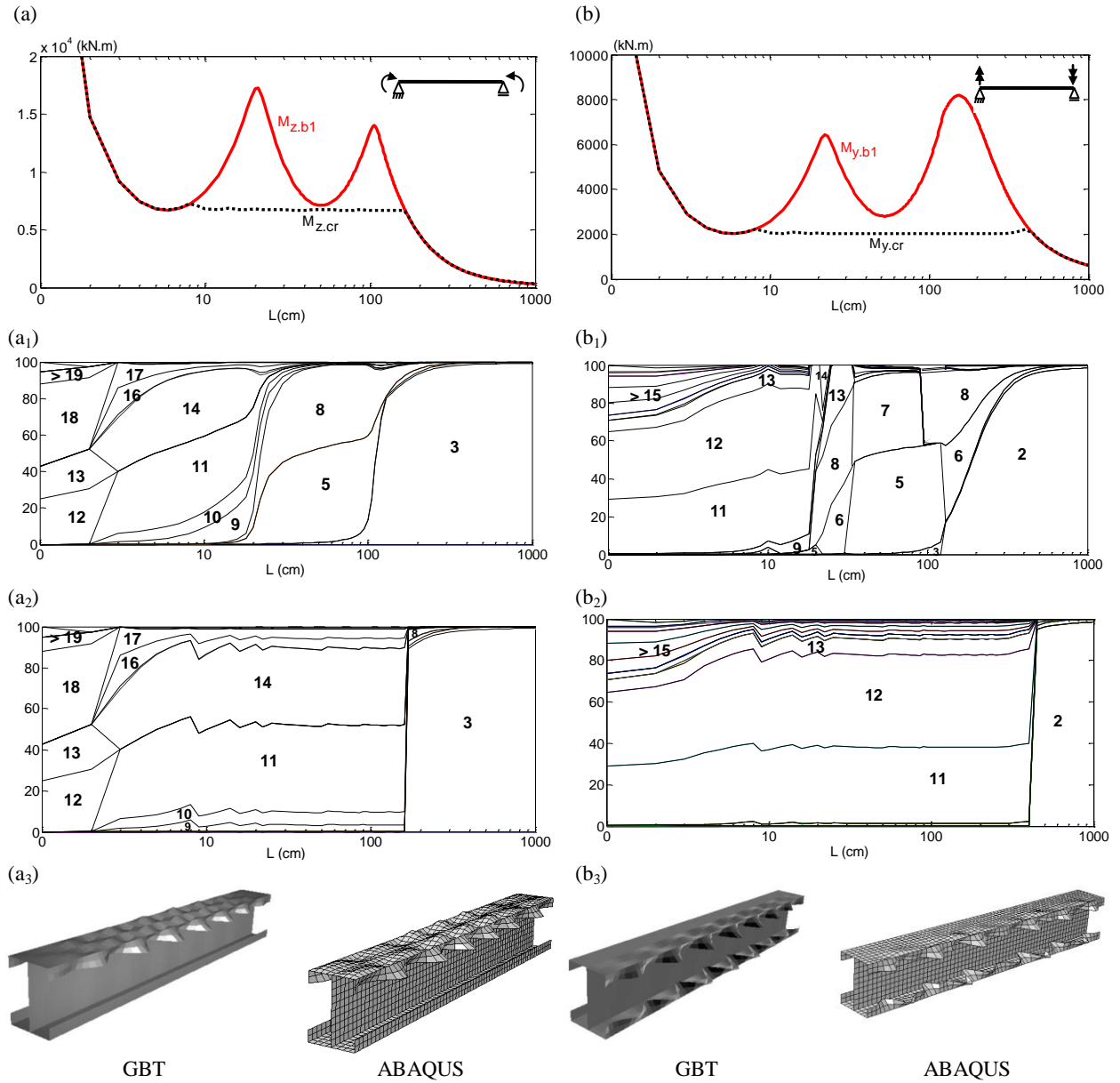


Figura 7. Estabilidade de vigas: (a) curvas $M_{z,b1}(L)$ e $M_{z,cr}(L)$. (b) curvas $M_{y,b1}(L)$ e $M_{y,cr}(L)$. Participação modal para (a₁ e b₁) $n_s = 1$ e (a₂ e b₂) $n_s = \infty$ (modo crítico). Configuração dos modos de instabilidade críticos para vigas com $L = 100$ cm: flexão na (a₃) maior e (b₃) menor inércia

- (ii) Nos trechos iniciais e finais, as curvas críticas $M_{z,cr}(L)$ e $M_{y,cr}(L)$ coincidem exatamente com $M_{z,b1}(L)$ e $M_{y,b1}(L)$. Nos intervalos intermediários, para os quais $M_{cr} = \min(M_{b,1} \dots M_{b,n_s})$, em função do número de semi-ondas considerado ($1 \leq n_s \leq 40$) praticamente ocorre o alinhamento horizontal das curvas críticas. Os valores dos

- momentos críticos equiparam-se aos dos respectivos mínimos locais de placa (**MLP**). Para $L = 150 \text{ cm}$, por exemplo, as diferenças entre os resultados encontrados no ABAQUS ($M_{z,cr} \cong 6954.0 \text{ kN.m}$ e $M_{y,cr} \cong 2130.6 \text{ kN.m}$) e os obtidos da GBT não excedem 1.05%.
- (iii) Diferentemente das colunas, a instabilidade das vigas envolve um maior número de modos de deformação que participam dos modos de instabilidade por ser necessário eliminar a deformação na zona tracionada da seção.
 - (iv) Relativamente a uma única semi-onda, a figura 7(a₁) permite visualizar para $L \leq 22 \text{ cm}$ a prevalência dos modos locais de placa (**MLP** $\equiv 9 + 10 + 11 + 14$). Entre $22 \leq L \leq 128 \text{ cm}$, predominam os modos distorcionais (**MD** $\equiv 5 + 8$). A partir de $L \geq 128 \text{ cm}$, as vigas passam a instabilizar em modos globais de flexão em torno do eixo de menor inércia (**MF** $\equiv 3$).
 - (v) Na figura 7(b₁), os trechos entre $22 \leq L \leq 32 \text{ cm}$ e $32 \leq L \leq 128 \text{ cm}$ compreendem respectivamente **MLPD** $\equiv 13 + 6 + 8$ e **MD** $\equiv 5 + 7$. Para $L \geq 128 \text{ cm}$, ocorrem modos mistos (**MDF** $\equiv 8 + 6 + 2$) que contam com o gradual aumento da participação do modo 2 para vigas longas.
 - (vi) Os diagramas de participação dos modos críticos indicados nas figuras 7(b₂-a₂) atestam o predomínio dos modos locais para vigas curtas e médias e dos modos globais para vigas longas. Conforme explicitado, os modos distorcionais pouco influenciam a instabilidade crítica das vigas pelo fato de o segundo mínimo local (**MD**) não estar correlacionado a $M_{z,cr}(L)$ e $M_{y,cr}(L)$.
 - (vii) As configurações dos modos críticos de instabilidade mostram a diminuição de resistência das respectivas áreas comprimidas (flanges e alma). Deve-se atentar para o fato de que na seção I em análise a alma tem o dobro da espessura dos flanges e enrijecedores de borda.

Para ilustrar a estabilidade de vigas submetidas à flexão desviada, apresenta-se na figura 8 a (i) variação dos momentos $M_{yz,bns}$ com o comprimento ($0 \leq L \leq 1000 \text{ cm}$) incluindo todos os modos de deformação (**1 – 19**); (ii) as respectivas participações modais relativas a uma única semi-onda e aos modos críticos ($1 \leq n_s \leq 60$) e (iii) as configurações dos modos de instabilidade obtidas da GBT e do ABAQUS para vigas com $L = 100 \text{ cm}$.

Observa-se que:

- (i) Da mesma forma que na estabilidade de vigas submetidas à flexão em torno de um dos eixos principais de inércia, a curva $M_{yz,bI}(L)$ exibe dois mínimos correlacionados aos modos locais de placa ($L = 6 \text{ cm}$) e distorcionais ($L = 50 \text{ cm}$): $M_{yz,bI(LP)} \cong 1590 \text{ kN.m}$ e $M_{yz,bI(D)} \cong 2193 \text{ kN.m}$.
- (ii) Para $L = 150 \text{ cm}$, por exemplo, a variação entre ABAQUS ($M_{yz,cr} \cong 1607.7 \text{ kN.m}$) e GBT é de 1.01%.
- (iii) Na figura 8(b₁), entre $22 \leq L \leq 90 \text{ cm}$ predominam essencialmente **MD** $\equiv 5 + 6 + 7 + 8$. Entre $90 \leq L \leq 142 \text{ cm}$, ocorrem modos mistos. Para valores crescentes de comprimento ($L \geq 142 \text{ cm}$), as vigas instabilizam em modos globais de flexão (**MF** $\equiv 3 + 2$).
- (iv) Na figura 8(b₂), o diagrama de participação modal crítico evidencia para $L \leq 350 \text{ cm}$ a predominância de modos locais (**MLP** $\equiv 11 + 12 + 13 + 14 + 15$). Para vigas longas, predominam **MF** $\equiv 3 + 2$.

- (v) A figura 8(c) mostra que apenas o banzo superior esquerdo se instabiliza. Essa peculiaridade deve-se ao fato de haver mais modos de deformação a contribuir para o modo de instabilidade – a zona que se instabiliza é mais localizada, sendo necessário eliminar a deformação na seção restante.

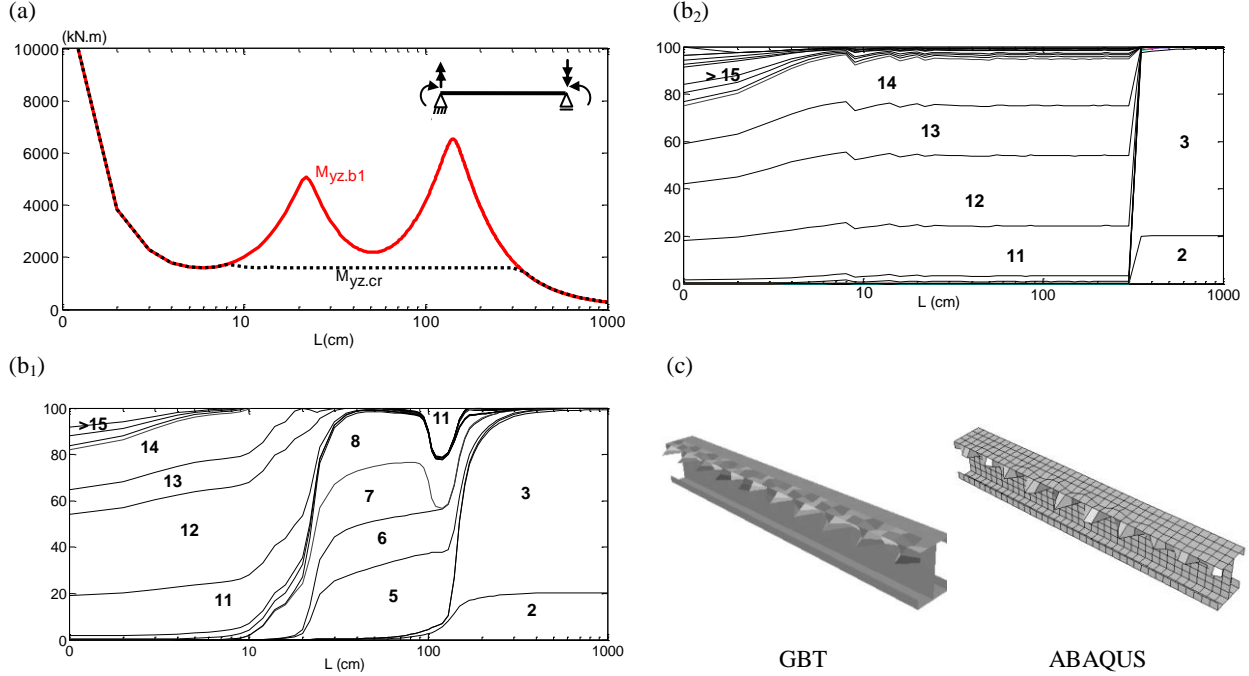


Figura 8. Estabilidade de vigas: curvas (a) $M_{yz,b1}(L)$ e $M_{yz,cr}(L)$. (b) Participação modal para (b1) $n_s = 1$ e (b2) $n_s = \infty$ (modo crítico). (c) Configuração dos modos de instabilidade críticos para viga com $L = 100$ cm.

B) ANÁLISES DE VIBRAÇÃO

B.1) Vibração livre da barra

A figura 9 fornece para $1 \leq n_s \leq 3$ (i) a variação das três primeiras frequências naturais de vibração (ω_1 , ω_2 e ω_3) com o comprimento ($10 \leq L \leq 1000$ cm) da barra totalmente descarregada, incluindo simultaneamente todos os modos de deformação (1 - 19), (ii) os respectivos diagramas de participação modal e (iii) os correspondentes modos de vibração para $L = 22$ cm e $L = 100$ cm.

Para fins de comparação, apresentam-se os valores estimados das frequências fundamentais (ω_f) (Clough e Penzien [4]):

$$\omega_f = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} \quad (13)$$

em que L representa o comprimento da barra, ρA indica a densidade linear e I_y é o menor momento de inércia.

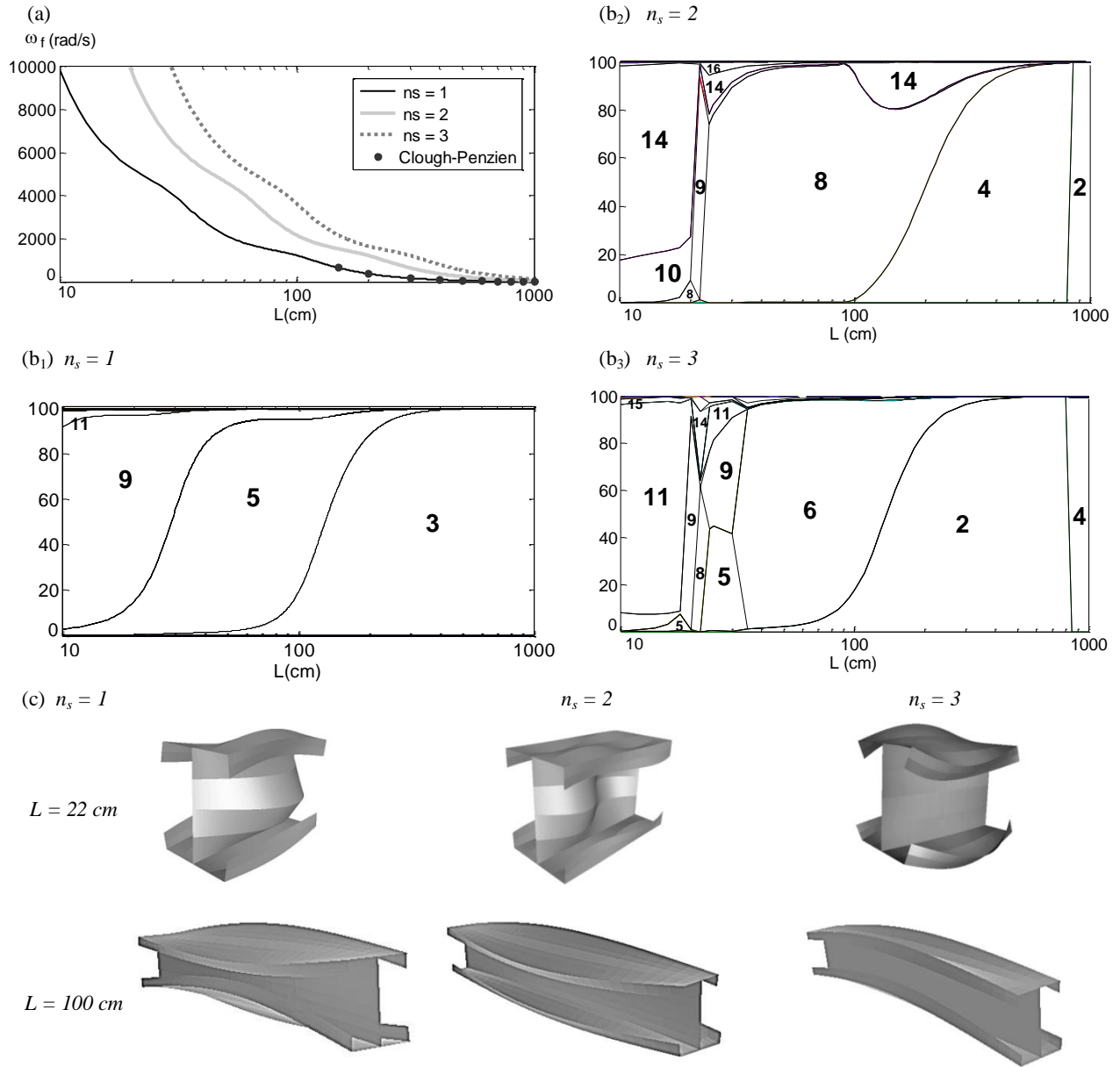


Figura 9. Vibração livre: (a) variação de ω_1 , ω_2 e ω_3 com L . (b) Participação modal para $n_s=1, 2$ e 3 . (c) Configuração dos correspondentes modos de vibração (GBT).

Observa-se que:

- (i) Diferentemente de $P_{b,ns}(L)$ (figura 6), as curvas relativas a $\omega_{ns}(L)$ não possuem mínimos locais. À medida que o comprimento da barra aumenta, $\omega_1(L)$, $\omega_2(L)$ e $\omega_3(L)$ decrescem monotonicamente, tendem a valores nulos e tornam-se praticamente coincidentes no segmento final.

- (ii) Ao contrário do que sucede na estabilidade de colunas, onde os modos críticos de instabilidade podem exibir várias semi-ondas, os modos *fundamentais* de vibração exibem sempre um único semi-comprimento de onda: $\omega_f \equiv \omega_1$ ($n_s = 1$).
- (iii) Os diagramas de participação modal relativos à estabilidade de colunas comprimidas (figura 6(a₁)) e vibração livre de barras (figura 9(b₁)) são equivalentes, o que implica ter modos de instabilidade (coluna) e vibração (barra) com uma semi-onda com configurações idênticas (figura 6(a₂)). Silvestre [24] demonstra que essa coincidência aplica-se exclusivamente à solução exata de barras simplesmente apoiadas e fornece a seguinte expressão que permite relacionar frequência fundamental ω_f à carga de bifurcação $P_{b,1}$ associada a $n_s = 1$:

$$\omega_f = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{P_{b,1}}{\rho A}} \quad (14)$$

- (iv) A figura 9(a₁) mostra que no modo fundamental a barra vibra entre $10 \leq L \leq 300$ cm em modos mistos **MLPD** $\equiv 11 + 9 + 5$, **MLPDF** $\equiv 9 + 5 + 3$ e **MFD** $\equiv 3 + 5$, o que pode exemplificado considerando as contribuições modais relativas a:
 - (a) $L = 20$ cm: 88.21% (modo **9**); 8.11% (modo **5**); 2.63% (modo **11**)
 - (b) $L = 100$ cm: 63.9% (modo **5**), 29.01% (modo **3**) e 6.28% (modo **9**)
 - (c) $L = 250$ cm: 96.95% (modo **3**) e 2.54% (modo **5**)
- (v) No segmento final, o modo distorcional (**MD** $\equiv 5$) deixa de participar gradativamente da vibração da barra até predominar o modo global por flexão em torno do eixo de menor inércia (**MF** $\equiv 3$), que atinge seu percentual máximo (99.99%) quando $L = 1000$ cm.
- (vi) Nos trechos em que o modo **3** prevalece, as diferenças observadas entre os valores de ω_f obtidos da GBT e os fornecidos analiticamente (expressão 14) não ultrapassam 0.78%.
- (vii) Em contraste com a figura 9(a₁) ($n_s = 1$), os diagramas de participação modal referentes à segunda ($n_s = 2$) (figura 9(b₂)) e terceira frequência ($n_s = 3$) (figura 9(b₃)) variam pronunciadamente com o comprimento da barra, por coexistir uma maior variedade de modos. A título de ilustração, mostra-se que a configuração dos modos de vibração da barra pode exibir uma única ou duas semi-ondas (figura 9(c)).

B.2) Vibração de colunas submetidas à compressão axial

A Fig. 10 fornece para $n_s = 1$ (i) as curvas $\omega_{f,N}(L)$ que traduzem a variação das frequências naturais com o esforço axial de compressão (N), expresso sob a forma de percentagem da carga de bifurcação ($N = \alpha \cdot P_{b,1}$, em que $0 \leq \alpha \leq 0.9$). Para melhor visualização dos gráficos, os comprimentos das colunas são definidos em dois intervalos ($10 \leq L \leq 100$ e $100 \leq L \leq 1000$ cm).

Observa-se que:

- (i) As similaridades entre as diversas curvas $\omega_{f,N}(L)$ pressupõem que estas possam ser obtidas através da expressão:

$$\omega_{f,N}(L) = \alpha \cdot \omega_{f,0}(L)(N = 0) \equiv \alpha \cdot \omega_f \quad (15)$$

em que $\alpha \leq 1$ e $\omega_{f,N}/\omega_{f,0} = \sqrt{1 - \alpha}$. Se $N = P_{b,1}$, $\alpha = 0$.

- (ii) Comparando as expressões (11) e (12), as quais definem respectivamente as frequências $\omega_{f,0}$ para $N = 0$ (vibração livre) e $\omega_{f,N}$ para $N \neq 0$ (vibração carregada), nota-se que a expressão (12) se reduz a (11), se $N = 0$. Diante dessa constatação, Silvestre [24] apresenta a seguinte expressão que possibilita correlacionar $\omega_{f,N}$ e $\omega_{f,0}$ diretamente com o nível de compressão instalado na coluna:

$$\omega_{f,N}^2 + \frac{N}{\rho A} \left(\frac{n_s \pi}{L} \right)^2 = \omega_{f,0}^2 \quad (16)$$

- (iii) Se $N = 0$, a curva $\omega_{f,0}(L)$ corresponde à vibração livre, o que significa que todas as colunas têm modos fundamentais de vibração iguais entre si e ao modo fundamental de vibração da barra não carregada (figura 9(b₁)).

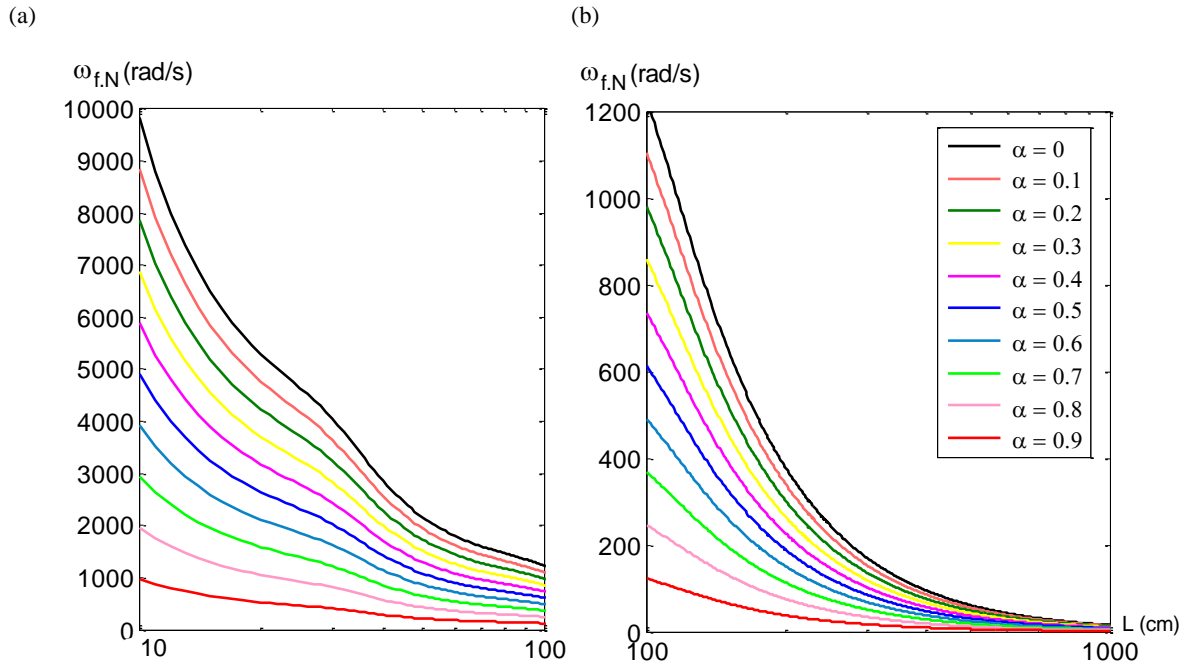


Figura 10. Variação da frequência fundamental $\omega_{f,N}(L)$ com $N = \alpha \cdot P_{b,1}$ para (a) $10 \leq L \leq 100$ cm. (b) $100 \leq L \leq 1000$ cm.

Ilustra-se a seguir (i) a variação da frequência fundamental (ω_f) para colunas de vários comprimentos ($10 \leq L \leq 1000$ cm) e níveis de compressão ($N = \alpha \cdot P_{cr}$, em que $0 \leq \alpha \leq 0.999$) indicados por percentuais de carga crítica de bifurcação $P_{cr} = \min(P_{b,1}, P_{b,2}, \dots, P_{b,10})$

associados a $1 \leq n_s \leq 10$ e (ii) os respectivos diagramas de participação modal para $\alpha = 0.85$ e 0.95 (figura 11).

Ressalta-se que:

- (i) As curvas exibem três segmentos distintos. No segmento inicial ($L \leq 18$ cm), apresentam comportamento similar. No trecho intermediário ($18 \leq L \leq 158$ cm), observa-se a presença de várias ondulações. No trecho final ($L \geq 158$ cm), as curvas decrescem acentuadamente e tendem para valores nulos de frequências fundamentais quanto mais elevado for α . Esse comportamento é decorrente das diferenças observadas (configuração e número de semi-ondas) entre os modos críticos de instabilidade e fundamental de vibração.
- (ii) Para $L \leq 18$ cm e $L \geq 158$ cm, à medida que $\alpha \approx 1$, a configuração e o número de semi-ondas do modo fundamental de vibração aproximam-se da configuração dos modos críticos de instabilidade (figura 6(a₂)).
- (iii) Entre $18 \leq L \leq 158$ cm, os diagramas de participação modal mostram que a natureza dos modos de vibração altera-se consideravelmente, tal como ilustrado na figura 11(b₁)-(b₂). À medida que $\alpha \approx 1$, as semelhanças com a figura 6(b₂) vão se tornando cada vez bem menos evidentes.

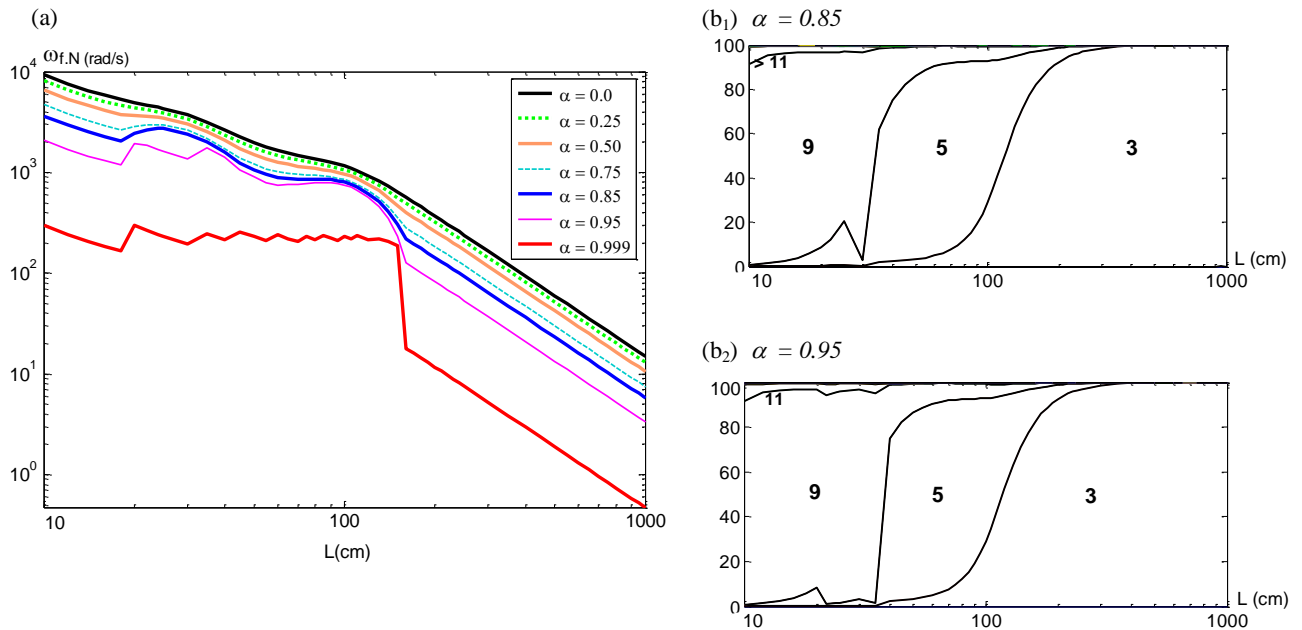


Figura 11. (a) Curvas de vibração $\omega_{f,N}(L)$ com $N = \alpha.P_{cr}$ e respectivas participações modais para (b₁) $\alpha = 0.85$ e (b₂) $\alpha = 0.95$

C.2) Vibração de vigas submetidas à flexão

Apresenta-se a seguir o comportamento de vibração de vigas submetidas à flexão reta (em torno de um dos eixos principais de inércia) (figura 12). Investiga-se em função do

comprimento das vigas ($0 \leq L \leq 1000 \text{ cm}$) como os carregamentos $M_{z,cr}$ e $M_{y,cr}$ aplicados, expressos como frações de momentos críticos $M = \alpha M_{cr}$ ($0 \leq \alpha \leq 0.999$), interferem nos valores das frequências fundamentais e nas formas dos respectivos modos de vibração. A Figura 13 ilustra as correspondentes configurações dos modos críticos de vibração para $\alpha = 0.95$ e 0.999 e $L = 100 \text{ cm}$.

Observa-se que:

- (i) As curvas que traduzem a variação de $\omega_{f,\alpha}(L)$ em relação aos momentos críticos $M_{z,cr}$ e $M_{y,cr}$ possuem comportamentos semelhantes visto que, quanto mais elevados os percentuais de carga aplicada, menores os valores das frequências fundamentais de vibração.
- (ii) Diferentemente da vibração de colunas, pequenos incrementos nos valores de α já provocam alterações nas figuras 12(a₁-a₄ e b₁-b₄).
- (iii) A presença de ondulações nas curvas $\omega_{f,\alpha}(L)$ nos trechos entre $8 \leq L \leq 158 \text{ cm}$ (figura 12(a)) e $8 \leq L \leq 400 \text{ cm}$ (figura 12(b)) sugere mudanças significativas nos diagramas de participação modal.
- (iv) Quando $\alpha \approx 1$, as contribuições modais tendem a aproximar das configurações dos respectivos modos críticos de instabilidade (forma e número de semi-ondas), exceto nas faixas situadas entre $45 \leq L \leq 128 \text{ cm}$ (figura 12(a₄)) e $150 \leq L \leq 450 \text{ cm}$ (figura 12(b₄)) em que prevalecem os respectivos modos mistos: **MLPD** $\equiv 14 + 11 + 10 + 8 + 5$ e **MFD** $\equiv 3 + 5$.

Os gráficos (figura 14) traduzem o comportamento de vibração de vigas sujeitas à flexão desviada. Em função do comprimento ($0 \leq L \leq 1000 \text{ cm}$), avaliam-se para determinados percentuais de momentos críticos $M_{yz} = \alpha M_{yz,cr}$ ($0.95 \leq \alpha \leq 0.999$) as alterações desencadeadas nos valores das frequências fundamentais e nas formas dos respectivos modos de vibração.

Nota-se que:

- (i) Como se verifica na vibração de vigas sob flexão em torno de um dos eixos principais de inércia (figura 12), as composições modais para $\alpha = 0.95$ (figura 14(a₁)) diferem das apresentadas na figura 8(b₁)) no intervalo compreendido entre $22 \leq L \leq 142 \text{ cm}$. Ressalta-se que os pontos máximos da curva $M_{yz,bl}(L)$ (figura 8(a)) ocorrem para $L = 22 \text{ cm}$ (**MLP**) e $L = 142 \text{ cm}$ (**MD**). Para $L = 150 \text{ cm}$, por exemplo, o fator de participação modal devido ao modo **3** é de 71.22%, 16.26% (modo **2**) e 3.27% (modo **7**).
- (ii) O diagrama de participação modal para $\alpha = 0.999$ (figura 14(a₂)) aproxima-se da figura 8(b₂)) apenas nos trechos em que $L \leq 142 \text{ cm}$ e $L \geq 350 \text{ cm}$. Observam-se discrepâncias entre $142 \leq L \leq 350 \text{ cm}$ em função da ocorrência de modos mistos (**MFD** $\equiv 3 + 5 + 2$). Ressalta-se que o ponto de intersecção entre $M_{yz,cr}(L)$ e $M_{yz,bl}(L)$ (figura 8(a)) ocorre para $L = 350 \text{ cm}$. A título de exemplificação, tem-se para $L = 150 \text{ cm}$ a seguinte contribuição modal: 75.63% (modo **3**), 12.06% (modo **5**) e 2.77% (modo **2**).

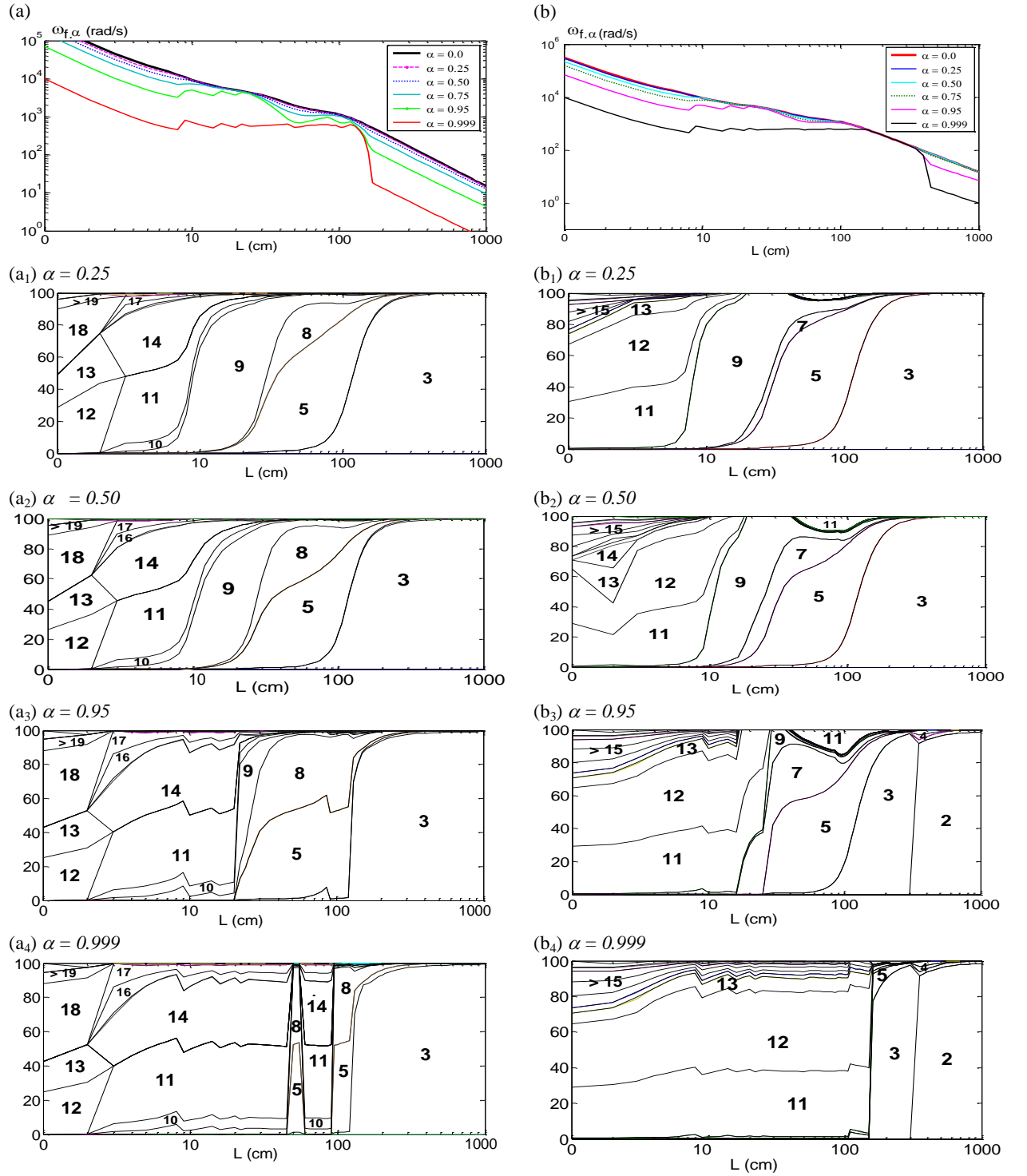


Figura 12. Vibração de vigas: variação de $\omega_{f,\alpha}(L)$ com: (a) $M_{z,cr}$. (b) $M_{y,cr}$ e respectivas participações modais para $\alpha = 0.25; 0.50, 0.95$ e 0.999

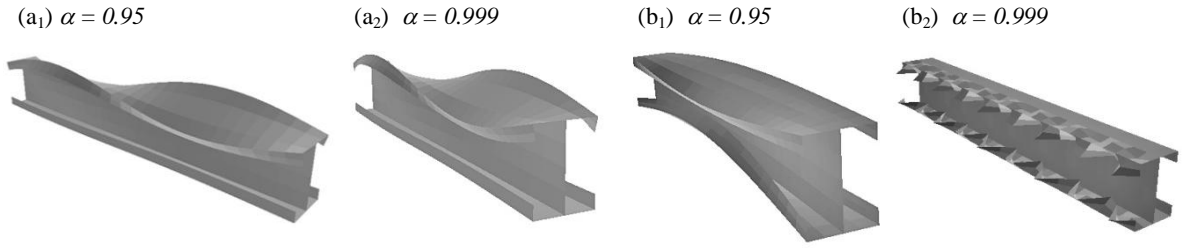


Figura 13. Configuração dos modos de vibração (GBT) para $L = 100$ cm e $\alpha = 0.95$ e 0.99 : (a) flexão na maior e (b) menor inércia.

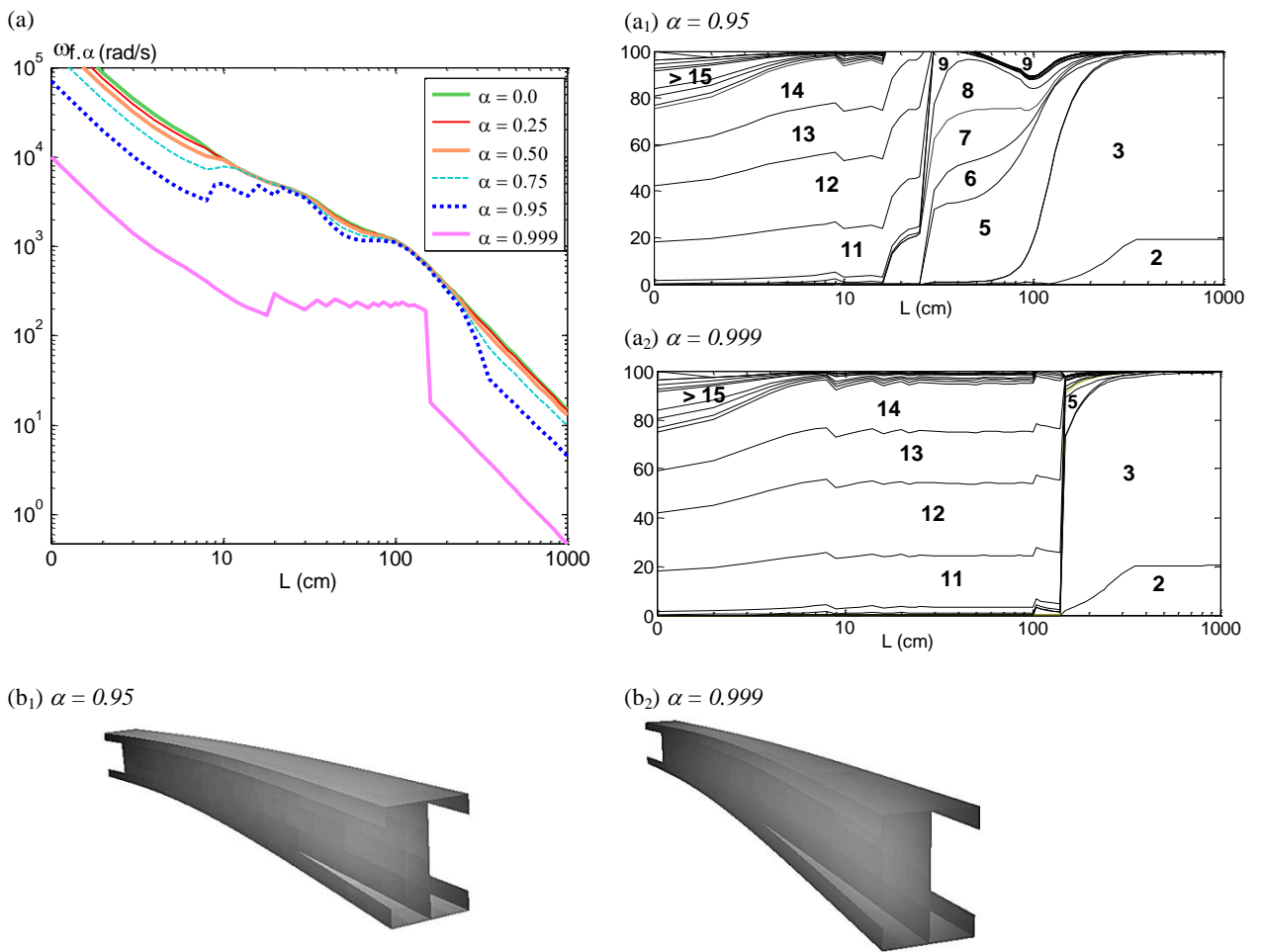


Figura 14. Vibração de vigas: (a) variação de $\omega_{f,\alpha}(L)$ com $M_{yz,cr}$. (b) Participações modais para $\alpha = 0.95$ e 0.999 e (c) respectivas configurações dos modos de vibração (GBT) para $L = 150$ cm.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho, investigou-se por meio da Teoria Generalizada de Vigas (GBT) o comportamento de estabilidade e vibração de colunas e vigas, formadas por seções transversais de paredes finas, abertas ramificadas, do tipo *I*. Os parâmetros avaliados consistiram da variação dos valores das frequências fundamentais com o nível de carga aplicado (compressão ou flexão) em função do comprimento dos elementos estruturais analisados. Conclui-se que:

- (i) Devido às características modais exclusivas, a GBT mostra-se extremamente versátil para analisar elementos estruturais de parede fina, conseguindo capturar com precisão as diversas variações comportamentais ocorridas.
- (ii) Excepcionalmente para a estabilidade de colunas submetidas à compressão axial e vibração livre de barras simplesmente apoiadas, para as quais se admite a solução exata com um único semi-comprimento de onda, os respectivos diagramas de participação modal são idênticos. Consequentemente, os modos de instabilidade (coluna) e vibração (barra) possuem configurações idênticas.
- (iii) Os maiores incrementos na magnitude dos momentos aplicados induzem a alterações significativas nos valores das frequências fundamentais e nas formas dos correspondentes modos de vibração. Dependendo do comprimento das colunas e vigas, à proporção que os momentos aproximam-se de seu valor crítico, a configuração do modo fundamental de vibração pode tender a convergir ou não para a do correspondente modo crítico de instabilidade.
- (iv) O comportamento dos modos distorcionais na vibração carregada de elementos estruturais de parede fina requer investigações futuras.
- (v) As mudanças mais pronunciadas na configuração dos modos críticos de vibração ocorrem para os casos de flexão de vigas. As reduções mais significativas nos valores das frequências fundamentais de vibração verificam-se na vibração de colunas comprimidas axialmente.

REFERÊNCIAS

- [1] Banerjee, J.R., Williams, F.W. Coupled Bending-Torsional Dynamic Stiffness Matrix of an Axially Loaded Timoshenko Beam Element, *International Journal of Solids and Structures*, v.31, p.749-762, 1994.
- [2] Bebiano, R.; Silvestre, N.; Camotim, D. Local and Global Vibration of Thin-Walled Members Subjected to Compression and Non-Uniform Bending, *Journal of Sound and Vibration*, v.315, n.3, p.509-535, 2008.
- [3] Camotim, D., Silvestre, N., Bebiano, R. GBT-Based Local and Global Vibration Analysis of Thin-Walled Members. In: Shanmugan, N.E. E Wang, C. M. (Eds). *Analysis and Design of Plated Structures: Dynamics*. Inglaterra: CRC Press, v.2, p.36-74, 2007.
- [4] Clough, R., Penzien, J. *Dynamics of Structures*. Singapore: McGraw-Hill, 1975.
- [5] De Borbón, F., Ambrosini, D. On Free Vibration Analysis of Thin-Walled Beams Axially Loaded, *Thin-Walled Structures*, v.48, n.12, p.915-920, 2010. doi: 10.1016/j.tws.2010.06.002.

- [6] Dinis, P.B., Camotim, D., Silvestre, N. GBT Formulation to Analyse the Buckling Behaviour Of Thin-Walled Members With Arbitrarily ‘Branched’ Open Cross-Sections, *Thin-Walled Structures*, v.44, p.20-38, 2006.
- [7] Dubigeon, S., Kim, C.B. A Finite Element for the Study of Coupled Bending-Prevented Torsion of a Straight Beam, *Journal of Sound and Vibration*, v.8, n.2, p.255-270, 1982.
- [8] Georgieva, I., Schueremans, L., Vandewalle, L., Pyl, L. Design of Built-Up Cold-Formed Steel Columns According to the Direct Strength Method, *Procedia Engineering*, v.40, p.119-124, 2012.
- [9] Hassan, R. *Distortional Lateral Torsional Buckling Analysis for Beams of Wide Flange Cross-Sections*. Canadá: Universidade de Ottawa, 2013.
- [10] Hashemi, S. M., Richard, M. J. A Dynamic Finite Element (DFE) for Free Vibrations of Bending-Torsion Coupled Beams, *Aerospace Science And Technology (AST)*, v.4, p.41-55, 2000.
- [11] Kashani, T., Jayasinghe, M.T.S., Hashemi, S.M. On The Flexural-Torsional Vibration and Stability of Beams Subjected to Axial Load and End Moment, *Shock and Vibration*, 2014. <http://dx.doi.org/10.1155/2014/153532>.
- [12] Kawai, T., Muraki, T., Tanaka, N., Iwaki, T. Finite Element Analysis of Thin-Walled Structures Based on the Modern Engineering Theory of Beams. In: *Proc. of the 3rd Conference on the Matrix Method in Structural Mechanics*, WPAFB, Dayton, Ohio, 1971.
- [13] Klausbruckner, M.J., Pryputniewicz, R.J. Theoretical and Experimental Study of Coupled Vibrations of Channel Beams, *Journal of Sound and Vibration*, v.183, n.2, p.239-252, 1995.
- [14] Krajcinovic, D. Stress Analysis of Hexagonal Shells, *International Journal of Solids and Structures*, v.7, n.6, p.559-584, 1971.
- [15] Mathworks. Matlab R2012a.
- [16] Moon-Young, K., Nam Ii, K., Hee-Taek, Y. Exact Dynamic And Static Stiffness Matrices of Shear Deformable Thin-Walled Beam-Columns, *Journal of Sound and Vibration*, v.267, n.1, p.29-55, 2003.
- [17] Noor, A.K., Hadian, M.J., Andersen, C.M. Hybrid Analytical Technique For Nonlinear Vibration Analysis of Thin-Walled Beams, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, v.199, n.4, p.786-800, 1993.
- [18] Ohga, M., Nishimoto, K., Shigematsu, T., Hara, T. Natural Frequencies and Mode Shapes of Thin-Walled Members Under In-Plane Forces. In: Shanmugam, N., Liew, J.Y.R., Thevendran, V. (Eds.), *Thin-Walled Structures-Research and Development*, Elsevier, Amsterdam, p.501-508, 1998.
- [19] Okamura, M., Fukasawa, Y. Characteristics of Instability of Local Vibration of the Thin-Walled Members Under Periodic Axial Forces, *Structural And Earthquake Engineering (JSCE)*, v.15, n.2, p.215s-223s, 1998.
- [20] Prokić, A., Lukić, D. Flexural-Torsional Vibration Analysis of Axially Loaded Thin-Walled Beam, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng.*, v.34, n.3, 2012. <http://dx.doi.org/10.1590/s1678-782012000300006>.
- [21] Saal, G. *A Contribution to the Dynamic Analysis of Thin-Walled Prismatic Structures with Unbranched Sections*. Germany: Technische Hochschule Darmstadt, 1974. (Ph.D. Dissertation).
- [22] Schardt, R. *Eine Erweiterung Der Technischen Biegetheorie Zur Berechnung Prismatischer Faltwerke*, *Der Stahlbau*, v.35, p.161-171, 1966.
- [23] Schardt, R., Heinz, D. Vibrations of Thin-Walled Prismatic Structures Under Simultaneous Static Load Using Generalized Beam Theory, *Structural Dynamics*, p.921-927, 1991.

- [24] Silvestre, N. M. R. *Teoria Generalizada de Vigas - Formulações, Implementação Numérica e Aplicações*. Lisboa: Universidade Técnica De Lisboa/IST, 2005. Tese (Ph.D.).
- [25] Silvestre, N., Camotim, D. Vibration Behavior of Axially Compressed Cold-Formed Steel Members, *Steel and Composite Structures*, v.6, n.3, p.221-236, 2006.
- [26] Silvestre, N., Camotim, D. Generalized Beam Theory to Analyze the Vibration of Open-Section Thin-Walled Composite Members, *J. Eng. Mech.*, Special Issue: Stability of Composite Structures, n.139, p.992–1009, 2013.
- [27] Simulia Inc., *ABAQUS CAE* (version 6.11-PR3), 2011.
- [28] Tanaka, M., Bercin, A. N. Free Vibration Solution for Uniform Beams of Nonsymmetrical Cross Section Using Mathematica, *Computers And Structures*, v.71, p.1-8, 1999.