INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Universidade Técnica de Lisboa

Observadores Não Lineares de Posição e Atitude para Veículos Autónomos

Sérgio Daniel Gonçalves Gante Brás

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Júri

Presidente: Prof. Carlos Jorge Ferreira Silvestre
Orientador: Prof. Carlos Jorge Ferreira Silvestre
Co-orientador: Prof. Paulo Jorge Coelho Ramalho Oliveira
Vogal: Professor João Manuel Lage de Miranda Lemos

Outubro 2008

Agradecimentos

Esta dissertação de mestrado é o resultado do trabalho desenvolvido nos últimos meses. Foi um período de muito estudo e trabalho, mas também com bastante convívio e boa disposição. Por todas as pessoas que me ajudaram, incentivaram e acompanharam, esta dissertação não estaria completa sem os respectivos agradecimentos.

Gostaria de começar por agradecer aos orientadores deste trabalho, Professor Carlos Silvestre e Professor Paulo Oliveira, pela confiança depositada em mim desde o primeiro dia, pelas sessões de trabalho muito instrutivas e estimulantes, e pela disponibilidade sempre demonstrada face às minhas incontáveis questões.

Agradeço também ao doutorando José Vasconcelos, por ter partilhado comigo o seu trabalho, pela sua ajuda e clareza a explicar os conceitos mais avançados, e também pela sua constante prontidão a esclarecer todas as minhas dúvidas.

Deixo um especial obrigado ao grupo do 5º piso, Tiago Gaspar, Luís Gomes, Renato Sousa, Bruno Dias, João Picão, ao meu amigo Ricardo Preguiça que me atura desde o primeiro semestre na universidade, ao Rúben Gomes, Sérgio Paiva, e a todos os restantes amigos e colegas, pelo apoio, ajuda e sugestões preciosas, e também pelos almoços e lanches prolongados, e por toda a alegria e boa disposição que sempre estiveram presentes.

Não menos importantes foram os meus pais, o meu irmão João, e a minha namorada Márcia, aos quais agradeço pelo seu incondicional apoio, e também pela a compreensão e paciência demonstrada por todos os momentos que ficaram por partilhar.

E ainda, a todos os outros que aqui não foram referidos mas que contribuiriam para esta dissertação chegar a bom porto, o meu sincero agradecimento.

Resumo

Esta dissertação aborda o projecto e implementação em tempo discreto de observadores não lineares para estimação da posição e atitude, com aplicação a veículos autónomos. As principais contribuições são: a concepção, síntese e prova da estabilidade exponencial do observador de posição, e o estudo e aplicação de métodos convenientes para realização da integração numérica de equações diferenciais cujas variáveis são matrizes de rotação.

A primeira parte da dissertação apresenta os conceitos fundamentais necessários à leitura do documento. Introduzem-se diferentes representações de atitude ou orientação; descreve-se a cinemática do corpo rígido; apresenta-se o conjunto de sensores que irá equipar o veículo; e incluem-se algumas definições e teoremas fundamentais à análise de sistemas dinâmicos não lineares em tempo contínuo.

Na segunda parte, são projectados os observadores de atitude e posição linear. Mostra-se a estabilidade das soluções propostas recorrendo a técnicas de Lyapunov, permitindo concluir que os erros de estimação convergem exponencialmente para a origem.

Na terceira parte, apresenta-se um estudo sobre técnicas de obtenção de aproximações em tempo discreto de sistemas dinâmicos em tempo contínuo, em particular, são estudados métodos de integração numérica aplicáveis a equações diferenciais ordinárias definidas no grupo das matrizes de rotação. Na quarta parte deste trabalho, estes métodos são aplicados ao observador projectado.

Na última parte, explica-se e exemplifica-se o procedimento utilizado para a determinação dos ganhos dos observadores de forma a minimizar o efeito da presença de ruído nos sensores. Finalmente são apresentadas simulações que mostram o desempenho e viabilidade prática das soluções propostas.

Palavras Chave: Sistemas de Navegação, Observadores Não Lineares, Aproximações em Tempo Discreto

Abstract

This dissertation addresses the design and discrete time implementation of nonlinear observers for estimation of the position and attitude, with application to autonomous vehicles. The main contributions are: the design, synthesis and proof of exponential stability of the position observer, and the study and application of suitable numerical integration methods for differential equations whose variables are rotation matrices.

The first part of the document introduces the fundamental definitions and theorems required for the developments that follow. Different representations for attitude or orientation are presented, the rigid body kinematics are described, the sensor' suite that will equip the vehicle is presented, and some fundamental definitions and theorems for stability analysis of nonlinear continuous time systems are included.

In the second part, the attitude and position observers are synthesized. The stability characteristics of the proposed solutions are analysed resorting to Lyapunov techniques, allowing to conclude that the estimation errors converge exponentially fast to the origin.

The third part studies the computation of discrete time approximations of continuous time systems, particularly, a series of numerical integration techniques suitable to be applied to ordinary differential equations defined on the rotation matrices group. In the forth part, these methods are used to obtain discrete time implementations of the proposed observers.

The last part describes the techniques used to tune the observers gains with the objective of minimising the impact of sensor' noise on the state estimates. Finally, simulations illustrating the overall performance and suitability of the proposed solutions are presented and discussed.

Keywords: Navigation Systems, Nonlinear Observers, Discrete Time Aproximations

Conteúdo

Agradecimentos **i**

Resumo **iii**

Abstract **v**

Conteúdo **vii**

Lista de figuras **xi**

Lista de Tabelas **xiii**

1 Introdução **1**

1.1 Estado da Arte 2

1.2 Contribuições da Dissertação 3

1.3 Organização do Relatório 4

2 Conceitos Introdutórios **7**

2.1 Descrição Geral 7

2.2 Representação de Atitude 7

2.2.1 Matriz de Rotação 7

2.2.2 Ângulos de Euler 8

2.2.3 Vector de Rotação 10

2.2.4 Quaterniões 10

2.3 Cinemática do Corpo Rígido 11

2.3.1 Cinemática de Posição e Velocidade 11

2.3.2 Cinemática de Atitude 11

2.4 Sensores 12

2.4.1 Giroscópios 12

2.4.2 Acelerómetros 14

2.4.3 Emissores de Ultra-Sons e Receptores Acústicos 14

2.5 Determinação da Posição a partir dos Tempos de Propagação dos Sinais Sonoros . . 16

2.5.1 Introdução do Problema 16
2.5.2 Formulação da Equação de Erro 17
2.5.3 O Método de Interpolação Esférica 17
2.5.4 Resultados de Simulação 18
2.6 Sistemas Dinâmicos Não Lineares em Tempo Contínuo 21
2.6.1 Estabilidade de Lyapunov 22
2.6.2 Estabilidade de Sistemas Lineares Variantes no Tempo Parametrizados 23
2.6.3 Input-to-State Stability 24
2.7 Comentários Finais 25

3 Projecto de Observadores em Tempo Contínuo 27
3.1 Descrição Geral 27
3.2 Referenciais de Interesse 28
3.3 Síntese e Análise do Observador 29
3.3.1 Observador que não Considera Polarizações nos Giroscópios 31
3.3.2 Observador que Considera Polarizações nos Giroscópios 39
3.4 A Lei de Retroacção e as Leituras dos Sensores 46
3.5 Comentários Finais 46

4 Aproximação em Tempo Discreto de Sistemas Dinâmicos em Tempo Contínuo 49
4.1 Descrição Geral 49
4.2 Discretização de SLITs Contínuos 50
4.2.1 Integração Numérica 51
4.2.2 Mapeamento Pólos-Zeros 53
4.2.3 Retentores 54
4.3 Aproximações em Tempo Discreto de Sistemas Não-Lineares 54
4.3.1 Integração Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias em $\mathbb{R}^3$ 55
4.3.2 Integração Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias no Grupo $\mathrm{SO}(3)$ . . . 57
4.4 Comentários Finais 63

5 Implementação do Observador em Tempo Discreto 65
5.1 Descrição Geral 65
5.2 Integração Numérica do Observador de Atitude 66
5.3 Integração Numérica do Observador de Posição 70
5.4 Simulações 71
5.5 Diferentes Ritmos de Amostragem 73
5.6 Comentários Finais 73

6 Determinação dos Ganhos dos Observadores **75**

6.1 Descrição Geral 75

6.2 Não Idealidades das Medidas 76

6.3 Ganhos da Implementação Discreta do Observador de Atitude, K_ω e K_{b_ω} 76

6.4 Ganhos da Implementação Discreta do Observador de Posição, K_p e K_v 78

6.5 Resultados de Simulação 80

6.6 Comentários Finais 83

7 Conclusões e Trabalho Futuro **85**

A Geometria do Grupo de Rotações **87**

A.1 Exponencial e Logaritmo 87

B Filtro de Kalman em Tempo Contínuo **89**

B.1 Derivação do Filtro 89

Referências Bibliográficas **91**

Lista de Figuras

1.1 Organização conceptual do relatório. 4

2.1 Ângulos de Euler Z-Y-X (extraido de [1]). 9
2.2 Referenciais inercial e do corpo e vector de posição. 12
2.3 Esquema de um giroscópio mecânico (extraído de [2]). 13
2.4 Giroscópio Silicon Sensing CRS03. 13
2.5 Esquema de um acelerómetro, baseado no deslocamento de uma massa de prova (extraído de [3]). 14
2.6 Acelerómetro Xbow CXL02TG3. 15
2.7 Elementos do sistema *Cricket*. 15
2.8 Ilustração do problema de localização de um emissor e algumas relações geométricas. 16
2.9 Simulação 1 (a) e simulação 2 (b). 20
2.10 Simulação 3 (a) e simulação 4 (b). 21
2.11 Simulação 5 (a) e simulação 6 (b). 21

3.1 Referenciais de interesse. 28
3.2 Posições dos emissores de ultra-sons relativas aos referenciais $\{\mathbf{B}\}$ e $\{\mathbf{L}\}$. 29
3.3 Representação em cascata dos observadores. 30
3.4 Ilustração dos emissores de ultra-sons e dos receptores acústicos. 34
3.5 Simulação da evolução do erro de atitude do observador que não considera a existência de polarizações nos giroscópios. 37
3.6 Simulação da evolução do erro de posição e de velocidade do observador que não considera a existência de polarizações nos giroscópios. 38
3.7 Trajectórias real e estimada quando os ganhos do observador são: $K_\omega = K_p = K_v = 10$. 38
3.8 Simulação da evolução do erro de atitude e estimativa das polarizações nos giroscópios. 44
3.9 Simulação da evolução do erro de posição e de velocidade do observador que considera polarizações nos giroscópios. 45
3.10 Trajectórias real e estimada quando os ganhos do observador são: $K_\omega = K_p = K_v = 10$. 45

4.1 Método *Euler Explícito* 51

4.2 Método *Euler Implícito* 52
4.3 *Regra Trapezoidal* 52
4.4 Mapeamento da metade estável do plano-*s* (cor cinzento) para o plano-*z* realizado por cada um dos métodos de integração. (a) *Euler Explícito*. (b) *Euler Implícito*. (c) *Regra Trapezoidal*. 53
4.5 Diagrama de blocos que mostra a construção realizada para obter um sistema discreto a partir de retentores de ordem zero 54

5.1 Erro dos algoritmos CG, MK de segunda e LC de terceira ordem, quando são utilizados para integrar a equação (5.2) e $\hat{\omega}$ tem um crescimento linear. 67
5.2 Erro dos algoritmos CG, MK de segunda ordem e LC de terceira ordem, quando são utilizados para integrar a equação (5.2) e $\hat{\omega}$ tem uma evolução quadrática. 68
5.3 Comparação entre as estimativas do observador de atitude em tempo contínuo e da aproximação em tempo discreto. 71
5.4 Comparação entre as estimativas do observador de atitude em tempo contínuo e da aproximação em tempo discreto. 72

6.1 Erro quadrático médio do erro de atitude. O valor mínimo encontrado está identificado por uma bola verde. 78
6.2 Evolução no tempo dos erros de estimação do observador. 81
6.3 Comparação entre a estimativa do erro de posição fornecida pelo sistema de posicionamento de ultra-sons e a fornecida pelo observador. 82
6.4 Trajectórias real e estimada em três dimensões quando existem não idealidades nos sensores. 82

Lista de Tabelas

2.1 Configurações dos receptores. 19
2.2 Condições de ruído e geometria dos receptores para cada simulação. 19
2.3 Resultados das simulações realizadas ao algoritmo de interpolação esférica. 20

3.1 Erros inicias das simulações. 37
3.2 Erros inicias das simulações. 44

4.1 Mapeamento $s \to z$ 53
4.2 Quadro com vários coeficientes dos métodos *Adams-Bashford* (adaptada de [4]). . . . 57
4.3 Quadro com vários coeficientes dos métodos *Adams-Mouton* (adaptada de [4]). 57
4.4 Tabela de coeficientes do *Método Crouch-Grossman* de segunda ordem. 59
4.5 Tabela de coeficientes do *Método Crouch-Grossman* de terceira ordem. 59
4.6 Tabela de coeficientes do *Método Crouch-Grossman* de quarta ordem. 59
4.7 Tabela de coeficientes do *Método Munthe-Kaas* de segunda ordem. 60
4.8 Tabela de coeficientes do *Método Munthe-Kaas* de terceira ordem. 60
4.9 Tabela de coeficientes do *Método Munthe-Kaas* de quarta ordem. 60
4.10 Tabela de coeficientes do *Método Livre de Comutadores* de terceira ordem. 61
4.11 Tabela de coeficientes do *Método Livre de Comutadores* de quarta ordem. 61
4.12 Complexidade por passo dos algoritmos CG^a, MK^b e LC^c de segunda, terceira e quarta ordens. 62

5.1 Complexidade por passo dos algoritmos CG^a, MK^b e LC^c quando $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ não depende de $\hat{\mathcal{R}}$. 67
5.2 Erros inicias das simulações. 72

6.1 Polarizações e variância do ruído nas medidas (ruído gaussiano). 76
6.2 Erros inicias da simulação com ruído nos sensores. 81

Capítulo 1

Introdução

O estudo e desenvolvimento de veículos autónomos é uma área de constante pesquisa cientifica, com aplicabilidade militar, e cada vez mais também com grande interesse comercial. Em particular, os veículos aéreos autónomos são plataformas extremamente versáteis que, quando devidamente equipadas com sistemas de navegação e controlo, apresentam características de estabilidade e operacionalidade que lhes permitem tirar partido de sensores tais como câmaras vídeo, câmaras fotográficas digitais, e ladars. Estas plataformas apresentam capacidade de realizar um conjunto de missões, a baixa velocidade e tipicamente algumas dezenas metros de altitude do solo, as quais vão desde da detecção de fogos florestais, a inspecção de infra-estruturas, a monitorização de auto-estradas, até ao seguimento de cardumes no mar.

Um dos componentes fundamentais que constituem um veículo autónomo é o sistema de navegação. Este, tem por missão fornecer aos restantes sistemas embarcados, informação sobre a posição, velocidade e orientação (também designada atitude) do veículo. Este é um sistema crítico. Uma falha no seu funcionamento, não só impede a correcta operação do veículo, como no caso dos veículos aéreo autónomos, pode muitas vezes originar perdas materiais relevantes, e até colocar em risco vidas humanas.

Uma das famílias mais conhecidas de sistemas de navegação, é denominada INS (*Inertial Navigation Systems* na literatura anglo-saxónica). Estes sistemas determinam a posição, velocidade, atitude, e velocidade angular, recorrendo a sensores inerciais: giroscópios e acelerómetros. Os INS podem ser divididos em duas classes designadas na literatura anglo-saxónica respectivamente por *Glimballed* e *Strapdown Systems*. A classe dos *Glimballed Systems* utiliza complexos sistemas mecânicos de estabilização, que garantem que a instrumentação de navegação não altera a sua orientação com o movimento do veículo. Na classe *Strapdown Systems*, os acelerómetros e giroscópios encontram-se fixos e solidários com o veículo, sendo por isso mecanicamente mais simples. Por outro lado, necessitam de algoritmos mais avançados para compensar os efeitos do movimentos dos veículos nas medidas dos sensores inerciais e portanto possuem maior complexidade computacional.

As grandezas que os INS têm como objectivo determinar são obtidas com base na integração de

sensores não ideais, cujas medidas estão corrompidas por ruído e polarizações. Por este motivo, os dados fornecidos por sistemas de navegação, baseados apenas em sensores inerciais, degradam-se com o tempo de funcionamento. Outros dispositivos, como GPS (*Global Positioning System* na literatura anglo-saxónica), ou sistemas de posicionamento alternativos, fornecem medidas de posição linear em tempo real. No entanto, também estes sistemas de posicionamento são passíveis de erro, e nem sempre estão acessíveis. Um caso típico trata-se do sistema GPS, o qual em ambientes urbanos ou perto de estruturas tais como pontes, viadutos ou paredes de barragens, está sujeito a oclusões e multi-caminhos, podendo a informação por ele fornecida degradar-se dramaticamente. Uma alternativa possível, a qual é adoptada neste trabalho, consiste em combinar estes dois tipos de sensores com o objectivo de tirar partido das vantagens de ambos. Obtém-se desta forma um sistema de navegação mais eficiente e robusto.

Em teoria dos sistemas, a questão que os sistemas de navegação tentam resolver constitui um problema de estimação. Ou seja, consiste na identificação do estado interno de um sistema a partir de medições indirectas. O corpo teórico existente permite a síntese de estimadores (também designados observadores) para algumas classes de sistemas. Para sistemas determinísticos e lineares e na ausência de ruído, podem ser utilizados os denominados observadores de *Luenberguer* [5]. Também para sistemas lineares, a teoria da filtragem de *Kalman* [6], permite obter estimadores óptimos na presença de incerteza no modelo do sistema e quando as medições realizadas pelos sensores estão corrompidas com ruído gaussiano. No caso de sistemas não lineares, recorre-se muitas vezes a linearizações em torno do ponto de funcionamento corrente do sistema, e em seguida utilizam-se as técnicas conhecidas para sistemas lineares. Uma abordagem alternativa é a baseada na síntese de observadores não lineares. Esta abordagem implica maior complexidade, mas entre outras possui a vantagem de poder dar origem a observadores dotados de características globais, tais como a estabilidade do sistema de erro associado. Os observadores lineares quando aplicados a sistemas não lineares produzem em geral resultados locais, sendo extremamente sensíveis à linearização do sistema utilizada.

1.1 Estado da Arte

O problema da estimação de atitude e posição, não obstante o seu rico legado histórico, é uma área de permanentes avanços científicos. Em [7], [8], [9], [10], [11], encontram-se trabalhos recentes na obtenção de leis de retroacção para sistemas definidos em variedades, nomeadamente $\mathrm{SO}(3)$ e $\mathrm{SE}(3)$, que fornecem valiosas indicações e linhas de orientação para o projecto de observadores, discutindo as características topológicas e limitações na obtenção de estabilidade global em $\mathrm{SO}(3)$.

Algumas soluções propostas neste âmbito, baseiam-se no modelo da dinâmica do veículo em estudo. Dos trabalhos disponíveis na literatura, são de realçar os seguintes. Deriva-se em [12], um observador cuja estimativa de atitude é obtida através da observação vectorial, com recurso à

intersecção dos respectivos elipsóides de incerteza. Em [13], estudam-se as propriedades de um observador com convergência localmente exponencial, baseado na fusão de dados de uma câmara monocular e de sensores inerciais. Em [14], os autores apresentam um observador com retroacção de velocidade, que preserva a simetria, com aplicação a sistemas de navegação inercial.

Em muitas aplicações é, por outro lado, conveniente projectar os observadores baseado-se somente na cinemática das grandezas lineares e angulares. Estes observadores, apresentam a vantagem da cinemática ser uma descrição exacta da evolução das grandezas físicas envolvidas, requerendo no entanto, maior número de sensores [15], [16], [17], [18]. Nestes observadores, tipicamente, é integrada uma medida de uma derivada de ordem superior, velocidade ou aceleração, fornecida por um sensor inercial. Os erros associados a este processo, são compensados por uma lei de retroacção baseada nas medidas das derivadas de ordem inferior. Em [19], propõem-se um observador de atitude definido no grupo de Lie das matrizes de rotação, $\mathrm{SO}(3)$. Este observador é projectado com base em medidas de posição e velocidade angular com polarização. Um outro observador não linear de atitude, formulado com recurso a quaterniões, é proposto em [20], onde os autores provam a convergência exponencial para origem, na presença de medidas de atitude e velocidade angular com polarização.

Noutra área do conhecimento, tem sido recentemente alvo de intensa pesquisa, o desenvolvimento de métodos de integração numérica que preservem as características geométricas de diferenciais em variedades, em especial, os integradores para grupos de Lie. Estes integradores, foram originalmente propostos em [21], seguindo-se duas publicações com o mesmo tema [22] e [23]. Em [24] e [25], desenvolvem-se as condições de ordem para uma subclasse dos métodos em grupos de Lie, onde a solução é obtida na respectiva álgebra de Lie, a qual é um espaço linear. Em [26], mostra-se que as condições de ordem clássicas podem ser utilizadas, juntamente com uma transformação conveniente. Recentemente em [27], derivam-se as condições de ordem para os métodos de integração numérica em grupos de Lie, livres de comutadores [28], que foram propostos para superar os problemas associados ao cálculo de comutadores.

1.2 Contribuições da Dissertação

Neste trabalho desenvolve-se um algoritmo de navegação da classe *Strapdown*, baseado na síntese de observadores não lineares, os quais apresentam características de estabilidade quase global para o sistema de erro associado. É estudado e implementado um método para realizar a implementação em tempo discreto do observador. São também obtidos valores para os ganhos com objectivo de minimizar do erro de estimação resultante na presença de ruído em todos os sensores e polarização nas medidas fornecidas pelos giroscópios.

1.3 Organização do Relatório

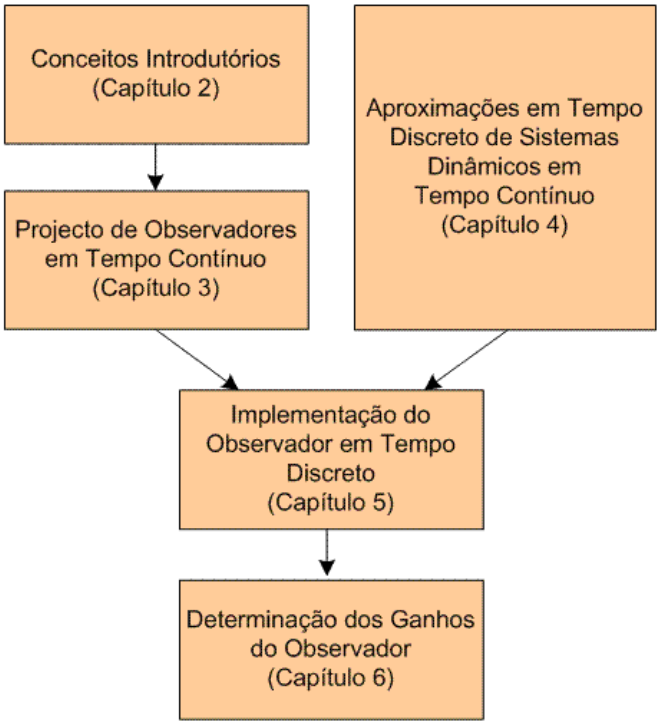


Figura 1.1: Organização conceptual do relatório.

O presente relatório encontra-se organizado conceptualmente como ilustrado na Figura 1.1 e está estruturado da seguinte forma:

- No Capítulo 2 introduzem-se os conceitos necessários ao desenvolvimento do trabalho. Representação de atitude, cinemática do corpo rígido, sensores utilizados e alguns teoremas que permitem a análise da estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares em tempo contínuo.

- No Capítulo 3 apresentam-se observadores de atitude desenvolvidos em [15] e [16], e desenvolvem-se observadores de posição exponencialmente estáveis. São apresentadas simulações ilustrativas do funcionamento das soluções propostas.

- No Capítulo 4 são apresentadas técnicas para obtenção de aproximações em tempo discreto de sistemas dinâmicos lineares e não lineares em tempo contínuo. Com especial relevância para métodos de integração numérica em variedades aplicáveis à equação diferencial da dinâmica de atitude.

- No Capítulo 5 procede-se à implementação em tempo discreto de um observador sintetizado no Capítulo 4 e são apresentadas simulações comparativas do desempenho do observador em tempo contínuo e da sua aproximação em tempo discreto.

- No Capítulo 6 propõe-se e realiza-se um procedimento para determinar os ganhos do observador, de forma a minimizar o efeito da presença do ruído nos sensores nas estimativas resultantes. São apresentadas simulações que mostram o desempenho das soluções propostas na presença desta fonte de erro.

- No Capítulo 6 apresentam-se as principais conclusões decorrentes do trabalho desenvolvido e indicam-se tópicos para trabalho futuro.

- O Apêndice A apresenta uma breve introdução formal ao grupo das matrizes de rotação.

- No Apêndice B é apresentado o filtro de Kalman-Bucy, também conhecido por filtro de Kalman em tempo contínuo. São apresentadas as equações de erro e a derivação dos ganhos óptimos que minimizam a covariância dos estados estimados. Introduz-se sumariamente o filtro de Kalman estacionário em tempo contínuo.

Capítulo 2

Conceitos Introdutórios

2.1 Descrição Geral

O algoritmo de navegação desenvolvido neste trabalho necessita de um conjunto de sensores, designadamente, giroscópios, acelerómetros e receptores que medem a distância a emissores, e apresenta uma forma inovadora de fundir as suas medidas, recorrendo a técnicas avançadas de estimação não linear e integração numérica em variedades diferentes de $\mathbb{R}^n$.

Este capítulo apresenta os conceitos teóricos utilizados na elaboração do trabalho, os quais são indispensáveis para a compreensão do restante texto. Introduzem-se diferentes possibilidades de representação da orientação, ou atitude, de um referencial relativamente a outro, apresenta-se a cinemática do corpo rígido, descrevem-se os princípios de funcionamento dos sensores utilizados, e referem-se algumas técnicas avançadas de análise de sistemas não lineares. Devido à sua clareza, adopta-se neste capítulo, a notação de [1].

2.2 Representação de Atitude

A escolha de uma representação matemática adequada para a orientação encontra-se revestida de importância. Dependendo da representação adoptada, o mesmo problema pode ser tratável, ou de impossível resolução. Algumas das vantagens e desvantagens de cada representação serão apresentadas em seguida.

2.2.1 Matriz de Rotação

A matriz de rotação é uma transformação linear utilizada para rodar vectores, e realizar o mapeamento de coordenadas entre referenciais com a mesma origem. Quando estes vectores pertencem a $\mathbb{R}^3$, a matriz de rotação tem dimensões 3×3. Assim, na equação

$$^{A}P = {}^{A}_{B}\mathcal{R}\,^{B}P,$$

${}^{A}P$ é o vector que descreve a posição do ponto P no referencial $\{\mathbf{A}\}$, ${}^{B}P$ é o vector que descreve a posição do ponto P no referencial $\{\mathbf{B}\}$, e ${}^{A}_{B}\mathcal{R}$ é a matriz de rotação do referencial $\{\mathbf{B}\}$ para o referencial $\{\mathbf{A}\}$.

Qualquer matriz de rotação $\mathcal{R}$ verifica as seguintes propriedades

$$\mathcal{R}\mathcal{R}^T = \mathbf{I} \tag{2.1}$$

$$\det(\mathcal{R}) = 1, \tag{2.2}$$

onde $\mathcal{R}^T$ é a notação para a matriz transposta de $\mathcal{R}$, e $\det(\mathcal{R})$ representa o determinante da matriz $\mathcal{R}$. Destas propriedades é possível concluir que $\mathcal{R}^T = \mathcal{R}^{-1}$. O conjunto de todas as matrizes de rotação com dimensão 3×3 forma o grupo $\mathrm{SO}(3)$[1].

A matriz de rotação ${}^{A}_{B}\mathcal{R}$ pode ser obtida directamente através da projecção dos versores do referencial $\{\mathbf{B}\}$, nos versores do referencial $\{\mathbf{A}\}$,

$${}^{A}_{B}\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \hat{X}_B.\hat{X}_A & \hat{Y}_B.\hat{X}_A & \hat{Z}_B.\hat{X}_A \\ \hat{X}_B.\hat{Y}_A & \hat{Y}_B.\hat{Y}_A & \hat{Z}_B.\hat{Y}_A \\ \hat{X}_B.\hat{Z}_A & \hat{Y}_B.\hat{Z}_A & \hat{Z}_B.\hat{Z}_A \end{bmatrix},$$

em que $\mathbf{x}.\mathbf{y}$ representa o produto interno dos vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, e $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$, representam os versores de cada um dos referenciais. Como o produto interno de dois vectores unitários é idêntico ao cosseno do ângulo entre eles, esta representação é denominada por Matriz dos Cossenos Directores (DCM).

2.2.2 Ângulos de Euler

A matriz de rotação necessita de nove parâmetros escalares para definir uma rotação ou atitude, mas pode-se questionar se é possivel definir uma rotação com menos parâmetros. Um resultado da álgebra linear conhecido como *fórmula de Cayley para matrizes ortogonais*[2] afirma que, para qualquer matriz de rotação $\mathcal{R}$, existe uma matriz S, tal que,

$$\mathcal{R} = (\mathbf{I}_{3\times3} - S)^{-1}(\mathbf{I}_{3\times3} + S),$$

em que S é anti-simétrica, ou seja, $S = -S^T$, e é especificada por três parâmetros s_x, s_y, s_z, como

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix},$$

permitindo concluir que uma matriz de rotação pode ser definida apenas por três parâmetros.

Uma forma alternativa de descrever a atitude de um referencial $\{\mathbf{B}\}$ em relação a um referencial $\{\mathbf{A}\}$ que apenas necessita de três parâmetros, é a dada pelos denominados ângulos de Euler. Esta

[1] Denominado na literatura anglo-saxónica por *Special Orthonormal Group*. Grupo de todas as rotações em torno da origem do espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$. Este grupo é também uma variedade, encontrando-se no Apêndice A a sua definição formal.

[2] Uma matriz quadrada A diz-se ortogonal se $AA^T = A^TA = \mathbf{I}$.

representação é definida pelos ângulos que cada um dos eixos do referencial $\{\mathbf{B}\}$ tem de rodar, de forma sequencial, até o referencial rodado coincidir com o referencial $\{\mathbf{A}\}$. Adoptando a descrição em ângulos de Euler Z-Y-X, começa-se por rodar em torno de $\hat{Z}_B$, do ângulo α, depois roda-se em torno de $\hat{Y}_B$, do ângulo β, e por último roda-se em torno do eixo $\hat{X}_B$, do ângulo γ. Os ângulos α, β e γ são também denominados *Yaw*, *Pitch* e *Roll*, respectivamente. A Figura 2.1 ilustra este processo.

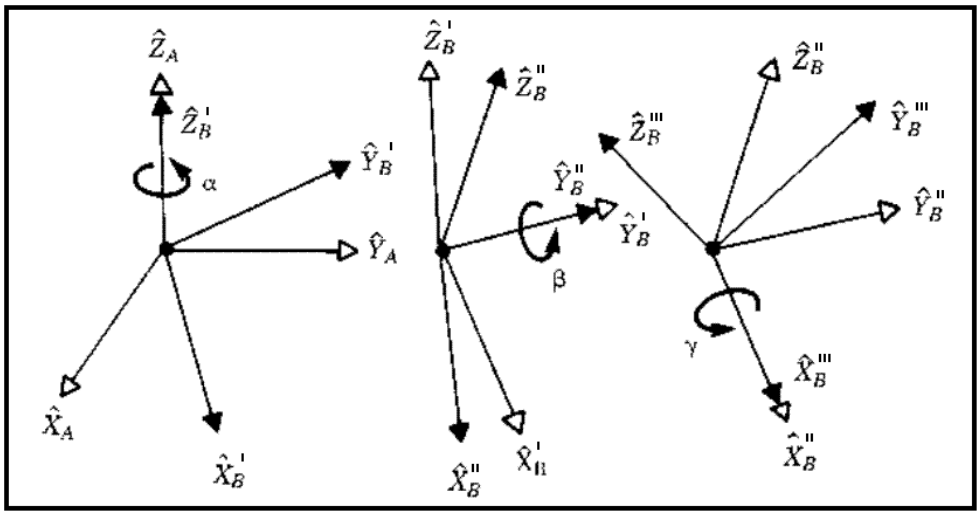


Figura 2.1: Ângulos de Euler Z-Y-X (extraido de [1]).

A matriz de rotação pode ser obtida através destes ângulos da seguinte forma

$$
{}^{A}_{B}\mathcal{R}_{ZYX} = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha s\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix},
$$

em que se utilizaram as abreviaturas $c\alpha = \cos(\alpha)$, $s\alpha = \sin(\alpha)$, $c\beta = \cos(\beta)$, $s\beta = \sin(\beta)$, $c\gamma = \cos(\gamma)$ e $s\gamma = \sin(\gamma)$.

A partir da matriz de rotação, é possível obter os ângulos de Euler através das expressões [1]

$$
\beta = \arctan2\left(-r_{31},\ \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right)
$$

$$
\alpha = \arctan2\left(r_{21}/c\beta, r_{11}/c\beta\right)
$$

$$
\gamma = \arctan2\left(r_{32}/c\beta, r_{33}/c\beta\right),
$$

se $c\beta \neq 0$, onde r_{ij} é o elemento da linha i e coluna j da matriz de rotação, e $\arctan2(x, y)$ calcula $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$, mas utiliza o sinal de x e y para determinar o quadrante a que pertence o ângulo resultante.

Esta representação utiliza apenas três parâmetros. No entanto, apresenta singularidades em $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$. Para desambiguar, em [1] sugere-se a seguinte convenção. Se $\beta = +\frac{\pi}{2}$,

$$
\alpha = 0
$$

$$
\gamma = \arctan2(r_{12}, r_{22}),
$$

e se $\beta = -\frac{\pi}{2}$,

$$\alpha = 0$$

$$\gamma = -\arctan2(r_{12}, r_{22}).$$

De notar, que para além dos ângulos de Euler Z-Y-X, existem mais 11 conjuntos de ângulos de Euler em função da ordem pela qual se realiza a rotação.

2.2.3 Vector de Rotação

Uma forma alternativa de definir uma rotação entre $\{\mathbf{B}\}$ e $\{\mathbf{A}\}$, é através da direcção perpendicular ao plano de rotação, indicada pelo vector ${}^{A}\boldsymbol{\lambda}_B$, e do ângulo da rotação, representado por θ. ${}^{A}\boldsymbol{\lambda}_B$ pertence ao grupo formado por todos os vectores de dimensão 3×1 com norma (euclidiana) unitária, $S(2)$, e $\theta \in [0\ \pi]$.

A matriz de rotação ${}^{A}_{B}\mathcal{R}$ relaciona-se com ${}^{A}\boldsymbol{\lambda}_B$ e θ através da expressão [29]

$${}^{A}_{B}\mathcal{R} = \mathrm{rot}(\theta, {}^{A}\boldsymbol{\lambda}_B) := \cos(\theta)\mathbf{I} + \sin(\theta)({}^{A}\boldsymbol{\lambda}_B)^{\wedge} + (1 - \cos(\theta)){}^{A}\boldsymbol{\lambda}_B{}^{A}\boldsymbol{\lambda}_B^T, \tag{2.3}$$

em que $(\mathbf{x})^{\wedge}$ representa a matriz anti-simétrica definida pelo vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $(\mathbf{x})^{\wedge}\mathbf{y} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Considerando o problema inverso, isto é, determinar a direcção e o ângulo de rotação, a partir de uma matriz de rotação, através do desenvolvimento da expressão (2.3), obtém-se as seguintes relações:

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33}}{2}\right)$$

$${}^{A}\boldsymbol{\lambda}_B = \frac{1}{2\sin(\theta)}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}.$$

Esta notação tem a vantagem de ser mais compacta que a matriz de rotação. No entanto para pequenas rotações o cálculo do eixo torna-se mal condicionado e apresenta singularidades quando $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

2.2.4 Quaterniões

O formalismo de quaterniões, introduzido em 1843 por Sir William Hamilton [30], também pode ser utilizado para representar uma rotação.

Um quaternião, $\mathbf{q}$, é descrito por uma parte escalar, q_s, e por uma parte vectorial, $\mathbf{q}_v$, com três elementos, e apresenta sempre norma unitária. A partir do vector de rotação, ${}^{A}\boldsymbol{\lambda}_B$, e do ângulo da rotação, θ, o quaternião que representa a mesma rotação pode ser obtido através de

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_v^T\ q_s]^T$$

$$\mathbf{q}_v = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right){}^{A}\boldsymbol{\lambda}_B$$

$$q_s = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

A matriz de rotação correspondente ao quaternião pode ser obtida da seguinte expressão [31]

$$\mathcal{R}(\mathbf{q}) = (q_s^2 - \|\mathbf{q}_v\|^2)\mathbf{I} + 2\mathbf{q}_v\mathbf{q}_v^T + 2q_s(\mathbf{q})^\wedge.$$

A representação por quaterniões tem a vantagem de não sofrer de singularidades e ser possível realizar directamente rotações e mapeamentos de coordenadas sem necessidade de recorrer à matriz de rotação.

2.3 Cinemática do Corpo Rígido

Nesta secção considera-se a existência de dois referenciais, um referencial solidário com o corpo rígido, $\{\mathbf{B}\}$, no qual se pretende estudar o movimento, e um outro referencial de referência e que se assume inercial, $\{\mathbf{I}\}$.

2.3.1 Cinemática de Posição e Velocidade

A cinemática da parte linear do movimento descrito por um corpo rígido, quando expressa no referencial inercial $\{\mathbf{I}\}$, pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}{}^I\left({}^IP_{Borig}\right) = {}^I\left({}^IV_{Borig}\right)$$
$$\frac{d}{dt}{}^I\left({}^IV_{Borig}\right) = {}^I\left({}^IA_{Borig}\right).$$

Onde ${}^I\left({}^IP_{Borig}\right)$ representa a posição da origem do referencial $\{\mathbf{B}\}$ em relação ao referencial $\{\mathbf{I}\}$ e expressa em no referencial $\{\mathbf{I}\}$, ${}^I\left({}^IV_{Borig}\right)$ é a velocidade linear da origem do referencial $\{\mathbf{B}\}$ em relação a $\{\mathbf{I}\}$ e expressa em $\{\mathbf{I}\}$, e $\left({}^IA_{Borig}\right)$ a aceleração linear da origem do referencial $\{\mathbf{B}\}$ em relação a $\{\mathbf{I}\}$ e expressa no mesmo referencial. Os referenciais $\{\mathbf{I}\}$ e $\{\mathbf{B}\}$, e o ponto P encontram-se representados na Figura 2.2.

Por outro lado, quando a mesma cinemática é expressa no referencial do corpo $\{\mathbf{B}\}$, tem de ter em conta a velocidade angular do corpo em relação ao referencial inercial [1]

$$\frac{d}{dt}{}^B\left({}^IP_{Borig}\right) = {}^B\left({}^IV_{Borig}\right) - \left({}^B\left({}^I\omega_B\right)\right)^\wedge {}^B\left({}^IP_{Borig}\right)$$
$$\frac{d}{dt}{}^B\left({}^IV_{Borig}\right) = {}^B\left({}^IA_{Borig}\right) - \left({}^B\left({}^I\omega_B\right)\right)^\wedge {}^B\left({}^IV_{Borig}\right),$$

em que $\frac{d}{dt}{}^B\left({}^IV_{Borig}\right)$ é a aceleração tangencial e ${}^B\left({}^I\omega_B\right) = [\omega_x\ \omega_y\ \omega_z]^T$ é a velocidade angular do referencial $\{\mathbf{B}\}$ em relação ao referencial $\{\mathbf{I}\}$, expressa no referencial $\{\mathbf{B}\}$.

2.3.2 Cinemática de Atitude

A cinemática da rotação do referencial $\{\mathbf{B}\}$ em relação ao referencial $\{\mathbf{I}\}$, dada em termos da matriz de rotação e da velocidade angular entre os referenciais ${}^B\left({}^I\omega_B\right)$, pode ser expressa por [1]

$$\frac{d}{dt}\left({}^I_B\mathcal{R}\right) = {}^I_B\mathcal{R}\left({}^B\left({}^I\omega_B\right)\right)^\wedge. \tag{2.4}$$

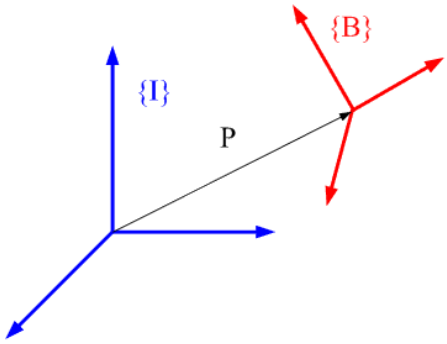


Figura 2.2: Referenciais inercial e do corpo e vector de posição.

2.4 Sensores

Para obter um algoritmo de navegação que estime a posição e atitude de um veículo em três dimensões, neste trabalho, têm-se à disposição as leituras de alguns sensores. Estes sensores estão divididos em duas categorias, sensores inerciais e sensores auxiliares. Os sensores inerciais realizam medidas de grandezas físicas relativamente a um referencial inercial. Desta categoria têm-se a disposição, giroscópios e acelerómetros. Por outro lado, as medidas fornecidas pelos sensores auxiliares não são relativas, mas sim directas. Dentro desta categoria, encontram-se instalados no veículo receptores acústicos que permitem medir as distâncias entre estes e emissores de ultra-sons externos ao veículo.

As medidas realizadas pelos sensores podem sofrer de várias não idealidades. Neste trabalho, considerou-se a possibilidade de existência de polarizações nos giroscópios.

Em seguida explica-se cada um dos sensores de forma sucinta.

2.4.1 Giroscópios

Os giroscópios disponíveis (*rate gyro* na literatura anglo-saxónica), medem a velocidade angular do veículo em relação ao referencial inercial $\{\mathbf{I}\}$, expressa no referencial próprio. Utilizando a notação de [1] tem-se

$$\boldsymbol{\omega}_{sensor} = {}^{B}\left({}^{I}\omega_{B}\right) = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T.$$

Existem vários princípios físicos nos quais se baseiam os giroscópios. Na Figura 2.3, encontra-se ilustrada a construção de um giroscópio mecânico clássico para medição de velocidade angular. Este giroscópio é constituído por uma massa cilíndrica com velocidade angular constante. A massa encontra-se numa estrutura fixa ao resto do giroscópio através de barras de torção. Entre a estrutura e o resto do giroscópio existe também um sistema de amortecimento.

Pela lei da conservação do momento angular ou lei Euler, sabe-se que o momento angular de um corpo rígido se manterá constante, excepto se sobre este for aplicado um binário. Se o binário for ortogonal à rotação do corpo, não altera a velocidade angular, mas sim a sua direcção. Voltando à

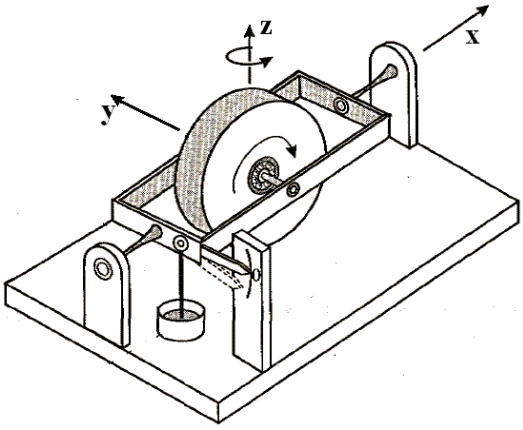


Figura 2.3: Esquema de um giroscópio mecânico (extraído de [2]).

Figura 2.3, isto significa que se o giroscópio estivar a rodar segundo $\mathbf{z}$, irá aparecer sobre as barras de torção, um binário segundo $\mathbf{x}$ proporcional à velocidade de rotação. Este binário fará inclinar a estrutura ligada à massa em rotação, e o ângulo de inclinação resultante é a grandeza física medida e convertida num sinal eléctrico. Quando a rotação sobre o eixo $\mathbf{z}$ desaparece, as barras de torção repõem a estrutura na posição inicial.

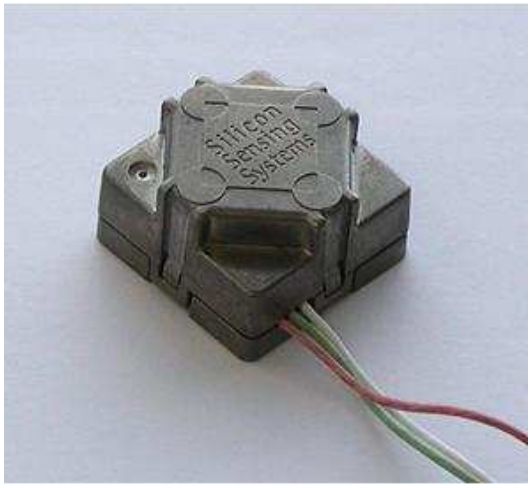


Figura 2.4: Giroscópio Silicon Sensing CRS03.

Na Figura 2.4, encontra-se uma fotografia de um giroscópio utilizado nas plataformas do DSOR (*Dynamic Systems and Ocean Robotics*) do ISR (Instituto de Sistemas e Robótica). Este giroscópio basea-se na vibração de um anel de silício e na geração de uma força de Coriolis através de um movimento de rotação.

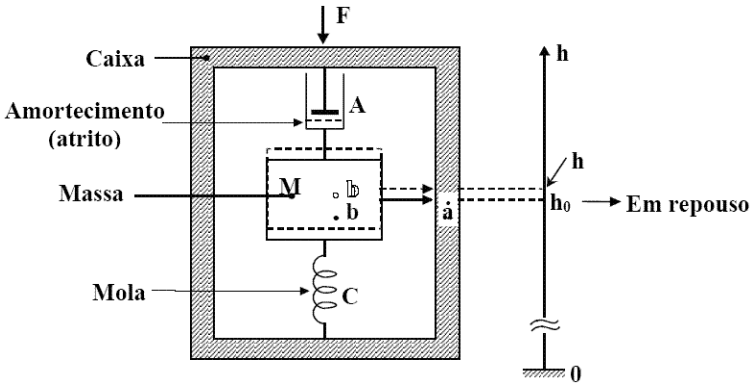


Figura 2.5: Esquema de um acelerómetro, baseado no deslocamento de uma massa de prova (extraído de [3]).

2.4.2 Acelerómetros

Os acelerómetros medem simultaneamente a aceleração linear do veículo relativamente ao referencial inercial $\{\mathbf{I}\}$ e a aceleração gravítica, ambas expressas em $\{\mathbf{B}\}$.

Na Figura 2.5, encontra-se esquematizado um acelerómetro elementar, baseado na variação de posição de uma massa de prova acoplada a uma mola e um dispositivo de amortecimento. Caso o corpo esteja sujeito a uma aceleração, esta massa deslocar-se-á no sentido contrário, esse deslocamento é medido e convertido num sinal eléctrico. Quando o acelerómetro está orientado verticalmente e se encontra em queda livre, a sua medição é nula. Este facto deve-se à acção da aceleração gravítica que anula o deslocamento da massa. Assim, a leitura de uma tríada de acelerómetros montados ao longo de cada um dos eixos do referencial $\{\mathbf{B}\}$, é composta pela aceleração sofrida pelo veículo, subtraída da aceleração gravítica expressa no referencial do corpo [32]

$$\mathbf{a}_{sensor} = {}^{B}\left({}^{E}A_{Borig}\right) - {}^{B}\,\bar{\mathbf{g}}. \tag{2.5}$$

A Figura 2.6, mostra um acelerómetro comercializado pela empresa *Crossbow Technology*, e que equipa alguns sistemas do DSOR. Este acelerómetro baseia-se num elemento sensível capacitivo diferencial de silício. Apresenta baixo ruído e grande estabilidade, e executa internamente o condicionamento de sinal, podendo ser facilmente ligado a um sistema de aquisição de sinal.

2.4.3 Emissores de Ultra-Sons e Receptores Acústicos

De modo evitar a degradação, ao longo do tempo, das integrações realizadas sobre as medidas dos sensores inerciais, neste trabalho, considera-se que o veículo se encontra equipado com receptores acústicos, que utilizam a diferença entre as velocidades de propagação de ondas electromagnéticas e acústicas, para medir distâncias entre cada receptor e os diferentes emissores de ultra-sons.

Os emissores encontram-se colocados em posições fixas no referencial inercial. Com este sistema

Figura 2.6: Acelerómetro Xbow CXL02TG3.

é possível obter a localização dos emissores no referencial do veículo, bem como a localização dos receptores no referencial em que os emissores estão fixos. Para esse fim, utiliza-se um método de interpolação esférica desenvolvido em [33], que será descrito na secção seguinte.

A distância entre os receptores acústicos e os emissores de ultra-sons, é determinada através do tempo que um sinal sonoro demora a propagar-se entre estes. Os emissores enviam de forma sequencial um sinal sonoro, e enviam simultaneamente um sinal electromagnético distinto para cada um deles. O sinal electromagnético é captado quase instantaneamente pelos receptores (com a velocidade da luz, aproximadamente $3 \times 10^8\ ms^{-1}$), e posteriormente é recebido o sinal sonoro. Com base na diferença de tempo de recepção dos dois sinais, cada receptor determina a que distância se encontra de determinado emissor.

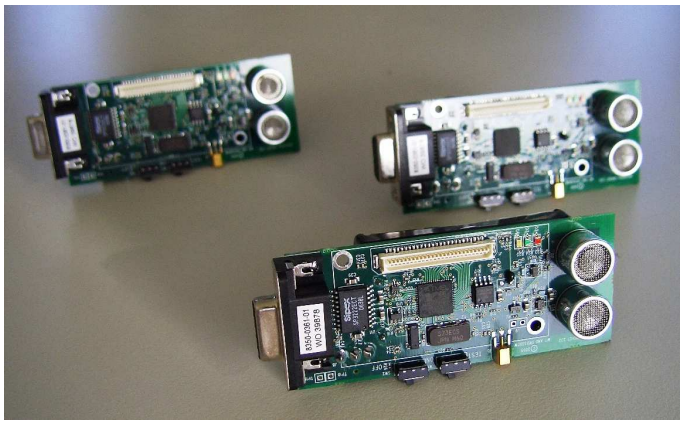


Figura 2.7: Elementos do sistema *Cricket*.

Um sistema baseado neste princípio é o *Cricket*, comercializado pela *Crossbow Technology*, e constituído por elementos semelhantes aos apresentados na Figura 2.7. Cada um destes elementos pode ser configurado como emissor ou como receptor, e possui uma interface por porta série para

ligação a um computador.

2.5 Determinação da Posição a partir dos Tempos de Propagação dos Sinais Sonoros

Uma vez conhecidas as distâncias entre os diversos receptores acústicos e os emissores, utilizando o método apresentado em [33], é possível determinar as posições dos emissores no referencial em que os receptores acústicos estão instalados ou a posição do receptores no referencial onde os emissores estão fixos. Este método, necessita no mínimo de quatro receptores acústicos não co-planares para determinar a posição de um emissor, e de quatro emissores não co-planares para determinar a posição de um receptor. Todavia, para diminuir a sensibilidade ao ruído nas medidas das distâncias e aumentar a robustez do algoritmo, convém utilizar um maior número de emissores e receptores [33]. O método consiste num algoritmo de localização em forma fechada, denominado por *interpolação esférica*.

2.5.1 Introdução do Problema

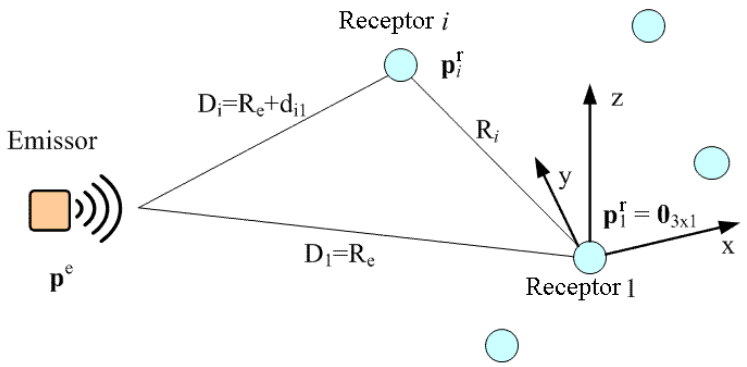


Figura 2.8: Ilustração do problema de localização de um emissor e algumas relações geométricas.

O método irá ser introduzido com o objectivo de resolver o problema do cálculo da posição de um emissor, sabendo a posição dos receptores. Contudo como já foi referido, também pode ser aplicado ao problema inverso.

Seja N o numero de receptores, as coordenadas espaciais do receptor i são denotadas pelo vector $\mathbf{p}_i^r$ $(i = 1, ..., N)$, e a posição do emissor é denotada pelo vector $\mathbf{p}^e$. A distância entre o emissor e o receptor i é dada por $D_i = \|\mathbf{p}_i^r - \mathbf{p}^e\|$, e d_{ij} é a diferença das distâncias do receptor i ao emissor e do receptor j ao emissor, tal que, $d_{ij} := D_i - D_j$ $(i, j = 1, ..., N,\ i \neq j)$. Sem perda de generalidade é considerado que a posição do receptor 1 é a origem do referencial. Defina-se ainda, $R_i := \|\mathbf{p}_i^r\|$ e $R_e = R_1 = D_1 = \|\mathbf{p}^e\|$. A Figura 2.8, ilustra a notação e algumas relações geométricas deste problema.

Pela geometria do problema é possível derivar a seguinte relação

$$\begin{aligned} D_i^2 &= \|\mathbf{p}_i^r\|^2 - 2(\mathbf{p}_i^r)^T\mathbf{p}^e + \|\mathbf{p}^e\|^2 \\ &= R_i^2 - 2(\mathbf{p}_i^r)^T\mathbf{p}^e + R_e^2,\ i = 2, ..., N. \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.5.2 Formulação da Equação de Erro

Tendo em conta as definições introduzidas pode-se reescrever a relação (2.6) obtendo

$$R_i^2 - d_{i1}^2 - 2R_e d_{i1} - 2(\mathbf{p}_i^r)^T\mathbf{p}^e = 0,\ i = 2, ..., N. \tag{2.7}$$

Como as distâncias, em geral, não são medidas de forma exacta, introduz-se uma medida do erro no lado direito da equação (2.7), e minimiza-se no sentido dos mínimos quadrados para obter uma estimativa da solução. Então a equação (2.7) fica

$$\epsilon_i = R_i^2 - d_{i1}^2 - 2R_e d_{i1} - 2(\mathbf{p}_i^r)^T\mathbf{p}^e,\ i = 2, ..., N. \tag{2.8}$$

O conjunto de $N-1$ equações (2.8), pode ser escrito em notação matricial como

$$\epsilon = \delta - 2R_e\mathbf{d} - 2\mathbf{S}\mathbf{p}^e, \tag{2.9}$$

onde

$$\boldsymbol{\delta} := \begin{bmatrix} R_2^2 - d_{21}^2 \\ R_3^2 - d_{31}^2 \\ \vdots \\ R_N^2 - d_{N1}^2 \end{bmatrix},\ \mathbf{d} := \begin{bmatrix} d_{21} \\ d_{31} \\ \vdots \\ d_{N1} \end{bmatrix},\ \mathbf{S} := \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_2^r)^T \\ (\mathbf{p}_3^r)^T \\ \vdots \\ (\mathbf{p}_N^r)^T \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\epsilon} := \begin{bmatrix} \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \vdots \\ \epsilon_N \end{bmatrix}.$$

A solução de mínimos quadrados da equação (2.9), para determinar $\mathbf{p}^e$ dado R_e é

$$\mathbf{p}^e = \frac{1}{2}\mathbf{S}^*(\boldsymbol{\delta} - 2R_e\mathbf{d}), \tag{2.10}$$

onde $\mathbf{S}^* := (\mathbf{S}^T\mathbf{S})^{-1}\mathbf{S}^T$, na solução não pesada, e $\mathbf{S}^* := (\mathbf{S}^T\mathbf{W}\mathbf{S})^{-1}\mathbf{S}^T\mathbf{W}$, na solução em que é minimizada a energia $\boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{W}\boldsymbol{\epsilon}$, sendo $\mathbf{W}$ uma matriz de pesos definida positiva. Para obter uma verdadeira solução de mínimos quadrados da função de custo $J = \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{W}\boldsymbol{\epsilon}$ relativamente a $\mathbf{p}^e$, é necessário permitir que R_e varie de acordo com a relação $R_e = \|\mathbf{p}^e\|$. Apesar desta minimização ser realizada sobre uma função de custo não convexa [33], ainda assim é possível encontrar uma solução que aproximadamente minimiza $J = \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{W}\boldsymbol{\epsilon}$.

2.5.3 O Método de Interpolação Esférica

Substituindo (2.10) na equação (2.9), e minimizando novamente o erro em relação a R_e, obtém-se um problema de mínimos quadrados linear, que pode ser resolvido eficientemente. Escrevendo a equação do erro de acordo com esta substituição obtém-se

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\delta} - 2R_e\mathbf{d} - \mathbf{S}\mathbf{S}^*(\boldsymbol{\delta} - 2R_e\mathbf{d}) = (\mathbf{I} - \mathbf{S}\mathbf{S}^*)(\boldsymbol{\delta} - 2R_e\mathbf{d}),$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade com dimensão $(N-1)\times(N-1)$.

No caso de $N=4$, $\mathbf{SS}^*=\mathbf{I}$, e o vector $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ é nulo. Caso $N>4$, a função de custo modificada é dada por

$$J=\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^T\mathbf{W}\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}=(\boldsymbol{\delta}-2R_e\mathbf{d})\mathbf{TWT}(\boldsymbol{\delta}-2R_e\mathbf{d}),$$

onde $\mathbf{T}=\mathbf{I}-\mathbf{SS}^*$. E a solução de mínimos quadrados resulta em

$$\tilde{R}_e=\frac{1}{2}\frac{\mathbf{d}^T\mathbf{T}\boldsymbol{\delta}}{\mathbf{d}^T\mathbf{Td}}.$$

Substituindo esta solução em (2.10) obtém-se as estimativa da posição do emissor

$$\hat{\mathbf{p}}^e=\frac{1}{2}\mathbf{S}^*(\boldsymbol{\delta}-2\tilde{R}_e\mathbf{d}).$$

A principal vantagem decorrente da aplicação deste método, é a sua reduzida complexidade computacional, visto que é uma solução em forma fechada. Este facto, torna o método ideal para aplicação em sistemas com limitações na capacidade de cálculo, ou sistemas em tempo real, cujo tempo de processamento tem de ser o mais reduzido possível.

Em [33], é ainda derivada uma aproximação para a variância da estimativa $\hat{\mathbf{p}}^e$ quando o ruído dos elementos de $\mathbf{d}$ tem média nula, que é aqui apresentada

$$\mathrm{Var}(\hat{\mathbf{p}}^e)\approx(\boldsymbol{\Delta}^T\boldsymbol{\Delta})\boldsymbol{\Delta}^T(\Lambda_d+R_e\mathbf{I})\mathbf{C}_d(\Lambda_d+R_e\mathbf{I})\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{\Delta}^T\boldsymbol{\Delta})^{-1}, \tag{2.11}$$

onde $\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{d}(\mathbf{p}^e/\|\mathbf{p}^e\|)^T+\mathbf{S}$, $\mathbf{C}_d$ é a matriz de covariância dos ruídos presentes em $\mathbf{d}$, e

$$\Lambda_d=\begin{bmatrix} d_{21} & & & \mathbf{0} \\ & d_{21} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & d_{N1} \end{bmatrix}.$$

2.5.4 Resultados de Simulação

A fim de verificar a influência do ruído nas medidas das distâncias e da geometria dos receptores, foram efectuadas algumas simulações recorrendo ao programa MATLAB. Estas simulações foram realizadas empregando de ruído com diferentes variâncias e diferentes configurações de receptores. Na Tabela 2.1, encontram-se as diferentes matrizes cujas colunas são as posições dos receptores, $P_{receptores}$, e os respectivos números de condição. O número de condição de uma matriz A não singular, $\mathrm{cond}(A)$, pode ser obtido através de

$$\mathrm{cond}(A)=\frac{\sigma_1}{\sigma_n},$$

em que σ_1 é o maior valor singular de A e σ_n o menor [34].

Nas simulações considerou-se que as medidas de distâncias estavam corrompidas com ruído branco Gaussiano com média nula. Considerou-se também que a posição do emissor que se pretendia estimar era dada por

$$\mathbf{p}_{emissor}=[5\ 5\ 5]^T.$$

Tabela 2.1: Configurações dos receptores.

Configuração	$P_{receptores}$ (m)	cond($P_{receptores}$)
1	$\begin{bmatrix} 0 & -10 & 10 & -10 & 10 \\ 0 & 10 & 10 & -10 & -10 \\ 0 & 10 & -10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$	1
2	$\begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$	1
3	$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$	1
4	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & -10 \\ 0 & -7 & 7 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -1 \end{bmatrix}$	2,65

Encontram-se na Tabela 2.2, as variâncias do ruído na medição das distâncias e a configuração dos receptores, para cada uma das seis simulações realizadas.

Tabela 2.2: Condições de ruído e geometria dos receptores para cada simulação.

Simulação	Variância do Ruído (m^2)	Configuração
1	$0,05^2$	1
2	$0,10^2$	1
3	$0,15^2$	1
4	$0,05^2$	2
5	$0,05^2$	3
6	$0,05^2$	4

A Tabela 2.3 contém os resultados das simulações, e nas Figuras 2.9(a), 2.9(b), 2.10(a), 2.10(b), 2.11(a), 2.11(b) mostra-se, para cada simulação, as posições dos receptores, a posição real do emissor e a sua posição calculada em cada uma das execuções do algoritmo de interpolação esférica.

Analisando os resultados obtidos para cada uma das simulações 1 a 3, verifica-se que a variância da posição obtida com o método de interpolação esférica descrito em [33], aumenta com o aumento da variância do ruído nas medidas de distância e que este aumento é não linear.

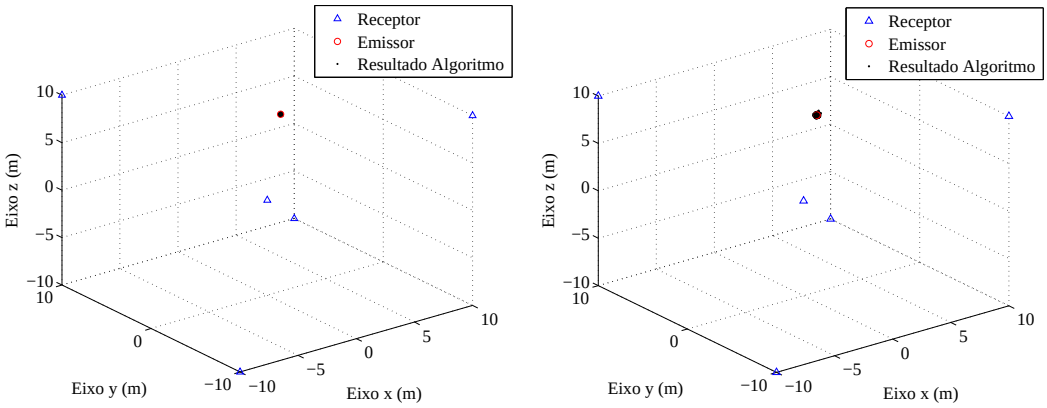
As simulações 1, 4 e 5, permitem concluir que as posições dos receptores também influenciam bastante os resultados do algoritmo. Verifica-se que quando os receptores se aproximam uns dos

Tabela 2.3: Resultados das simulações realizadas ao algoritmo de interpolação esférica.

Simulação	Média $[x\ y\ z]$ (m)	Variância $[x\ y\ z]$ (m^2)	Variância por (2.11) $[x\ y\ z]$ (m^2)
1	$[4,998\ 5,002\ 5,000]$	$[0,002\ 0,002\ 0,002]$	$[0,002\ 0,002\ 0,002]$
2	$[5,007\ 5,004\ 5,005]$	$[0,009\ 0,009\ 0,009]$	$[0,006\ 0,006\ 0,006]$
3	$[5,007\ 5,004\ 5,004]$	$[0,018\ 0,020\ 0,021]$	$[0,014\ 0,014\ 0,014]$
4	$[4,999\ 5,000\ 4,999]$	$[0,005\ 0,006\ 0,006]$	$[0,003\ 0,003\ 0,003]$
5	$[5,068\ 5,073\ 5,066]$	$[0,239\ 0,239\ 0,234]$	$[0,047\ 0,047\ 0,047]$
6	$[5,000\ 5,001\ 5,004]$	$[0,010\ 0,008\ 0,007]$	$[0,0060,007\ 0,007]$

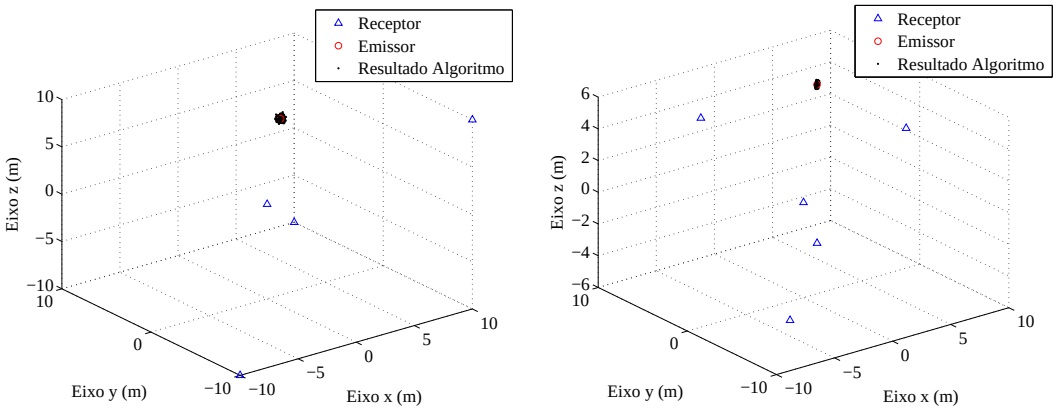
outros, o algoritmo perde sensibilidade numa direcção. Este facto é muito bem ilustrado pelas Figuras 2.10(a) e 2.10(b), onde se nota claramente, um aumento na incerteza da posição do emissor na direcção que passa pelo centróide definido pelos receptores e pelo emissor.

Comparando as simulações 1 e 6 constata-se que, mesmo não alterando significativamente a distância entre receptores, o resultado do algoritmo é prejudicado pelo facto da matriz cujas colunas são as posições dos receptores, possuir número de condição diferente da unidade. Conclui-se também que a aproximação da variância dada por (2.11) é demasiado optimista, sendo em geral, inferior ao valor real.



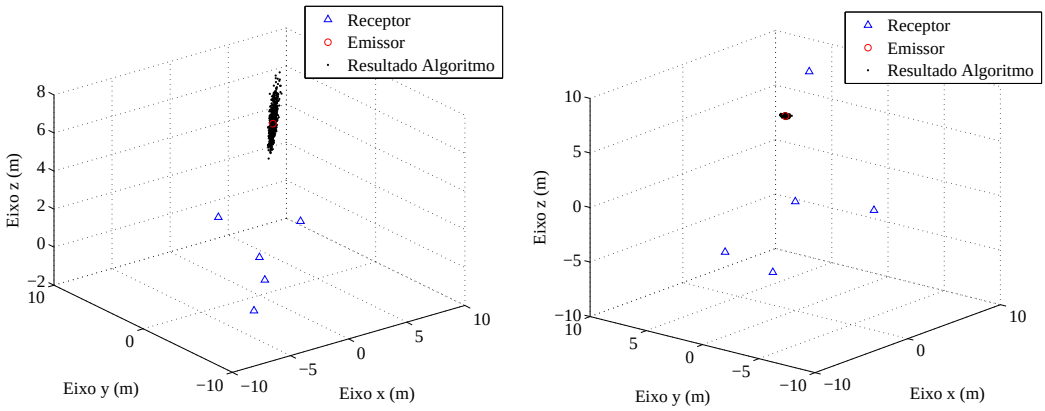
(a) (b)

Figura 2.9: Simulação 1 (a) e simulação 2 (b).



(a) (b)

Figura 2.10: Simulação 3 (a) e simulação 4 (b).



(a) (b)

Figura 2.11: Simulação 5 (a) e simulação 6 (b).

2.6 Sistemas Dinâmicos Não Lineares em Tempo Contínuo

Os sistemas não lineares em tempo contínuo que se pretendem analisar neste trabalho, podem ser descritos por uma equação diferencial na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

em que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o vector das variáveis de estado do sistema, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, o vector das entradas exógenas do sistema, t é a variável tempo, e $\dot{\mathbf{x}}$ representa a derivada em ordem ao tempo do vector $\mathbf{x}$. De notar que a dependência explícita do tempo dos vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$ foi retirada para simplificar a notação, esta dependência será incluída somente quando for estritamente necessária. No restante texto assume-se que f é uma função tal que é contínua e a solução com condição inicial fixada é única. Se f e $\mathbf{u}$, não dependerem explicitamente do tempo, o sistema denomina-se de sistema invariante no tempo. Um sistema invariante no tempo que não possui qualquer entrada designa-se por sistema autónomo [35].

Muitas das ferramentas desenvolvidas para a análise de sistemas dinâmicos lineares não podem, em geral, ser aplicadas a sistemas não lineares. Ainda assim existem algumas técnicas mais gerais aplicáveis a estes sistemas. Nesta secção serão introduzidos muito brevemente três métodos de análise de sistemas não lineares, nomeadamente, o segundo método Lyapunov, teoremas para a estabilidade de sistemas lineares e variantes no tempo parametrizados, e o conceito designado na literatura anglo-saxónica por *Input-to-State Stablility* (ISS). Não serão aqui apresentadas as demonstrações dos teoremas enunciados, mas serão indicadas as referências em que estas podem ser encontradas.

Definição 1. *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *da função* $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$ *é:*

- *estável se, para qualquer* $\varepsilon > 0$*, existir* $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *tal que*

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \forall_{t \geq t_0 \geq 0}. \tag{2.12}$$

- *uniformemente estável se, para qualquer* $\varepsilon > 0$*, existir* $\delta(\varepsilon) > 0$*, independente de* t_0*, tal que, a condição (2.12) é satisfeita.*

- *instável se não for estável.*

- *assimptoticamente estável se for estável e existir uma constante positiva* $c = c(t_0)$*, tal que*

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < c \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.$$

- *globalmente assimptoticamente estável se para qualquer* $\|\mathbf{x}(t_0)\|$*,*

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t) = 0.$$

Definição 2. *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *da função* $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$ *é exponencialmente estável se existem constantes positivas* c*,* k*, e* λ *tal que*

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq k\|\mathbf{x}(t_0)\|e^{-\lambda(t-t_0)}, \ \forall_{\|\mathbf{x}(t_0)\| < c}, \tag{2.13}$$

e globalmente exponencialmente estável se (2.13) se verificar para qualquer estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$*.*

2.6.1 Estabilidade de Lyapunov

O segundo método de Lyapunov, é uma das principais ferramentas de análise de sistemas não lineares. O principal obstáculo à sua aplicação prende-se com a dificuldade de encontrar uma função de Lyapunov $V(\mathbf{x})$, que verifique as condições do teorema, e a sua principal vantagem é a possibilidade de se poder inferir sobre a estabilidade e convergência de uma equação diferencial sem necessitar de a resolver explicitamente. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [36, pag. 115].

Teorema 1. *(Segundo Método de Lyapunov) Seja* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *um ponto de equilíbrio da função* $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$*, e* $D \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio contendo* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*. Seja* $V : D \to \mathbb{R}$*, uma função continuamente diferenciavel, tal que,*

$$V(\mathbf{0}) = 0$$

$$V(\mathbf{x}) > 0 \text{ em } D\backslash\{\mathbf{0}\}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ em } D,$$

então o ponto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *é estável, e* $V(\mathbf{x})$ *denomina-se função de Lyapunov. Se se verificar*

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \text{ em } D,$$

então o ponto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *é assimptoticamente estável em* D*. E se além disso*

$$\|\mathbf{x}\| \to \infty \Rightarrow V(\mathbf{x}) \to \infty,$$

então o ponto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *é globalmente assimpototicamente estável.*

Definição 3. *Seja* $V(\mathbf{x})$ *uma função de Lyapunov, a superfície* $V(\mathbf{x}) = c$*,* $c \in \mathbb{R}$*, designa-se superfície de Lyapunov ou superfície de nível.*

Definição 4. *[37, Definição 4.3] Uma matriz* $P(t)$ *é designada de transformação de Lyapunov se*

- *a matriz* $P(t)$ *for não singular;*
- *as matrizes* $P(t)$ *e* $\dot{P}(t)$ *forem contínuas;*
- *e as matrizes* $P(t)$ *e* $P^{-1}(t)$ *forem limitadas.*

Teorema 2. *[37, Teorema 5.7] A estabilidade assimptótica e a estabilidade marginal de sistemas* $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$*, são invariantes a qualquer transformação de Lyapunov.*

2.6.2 Estabilidade de Sistemas Lineares Variantes no Tempo Parametrizados

Um teorema que estabelece condições suficientes para a estabilidade exponencial uniforme de sistemas lineares e variantes no tempo parametrizados, foi publicado por António Loría e Elena Panteley em 2002 [38]. Admite-se que estes sistemas podem ser escritos na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t, \lambda)\mathbf{x}, \tag{2.14}$$

em que t é a variável tempo, e λ um parâmetro independente. Um sistema $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$ pode ser posto na forma (2.14) se todos os seus sinais forem limitados [39, pag. 626] e portanto $A(t, \lambda)$ for bem definida.

Definição 5. *Uma função* f *diz-se localmente Lipschitz se existir* $0 < L < \infty$ *tal que*

$$\|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

para qualquer $(t, \mathbf{x})$ *e* $(t, \mathbf{y})$ *numa vizinhança de* $(t_0, \mathbf{x}(t_0))$*.*

Definição 6. *Seja $\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^q$ subconjunto fechado, não necessariamente compacto e $f : \mathbb{R}_0^+ \times \mathfrak{D} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua, com $f(t, \lambda, .)$ localmente Lipschitz uniformemente em t e λ. A origem de um sistema $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \lambda, \mathbf{x})$ é dita λ-ULES se existir $r > 0$ e duas constantes $k_\lambda > 0$ e $\gamma_\lambda > 0$ tal que, para todo $t \geq t_0$, $\lambda \in \mathfrak{D}$,*

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < r \Rightarrow \|\mathbf{x}(t, \lambda, t_0, \mathbf{x}(t_0))\| \geq \|\mathbf{x}(t_0)\| e^{-\gamma_\lambda (t - t_0)}.$$

Adicionalmente, o sistema é dito λ-UGES se o limite exponencial for verificado para todo $(t_0, \mathbf{x}(t_0)) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n$.

Definição 7. *Seja uma função $\phi : \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}^{n \times m}$ continua. Diz-se que $\phi(.,.)$ é λ-uniformely percistently exciting (λ-uPE) se existirem dois parâmetros μ e $T > 0$, tal que, para qualquer $\lambda \in \mathcal{D}$*

$$\int_t^{t+T} \phi(\tau, \lambda)\phi(\tau, \lambda)^T d\tau, \ \forall_{t \geq 0}.$$

Teorema 3. *Considere-se o o sistema*

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\mathbf{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(t, \lambda) & -\mathcal{B}(t, \lambda) \\ -C(t, \lambda) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

sob os pressupostos

- *Existe ϕ_M tal que para qualquer $t \geq 0$ e para qualquer $\lambda \in \mathcal{D}$*

$$\max \left\{ \|\mathcal{B}(t, \lambda)\|, \left\| \frac{\partial \mathcal{B}(t, \lambda)}{\partial t} \right\| \right\} \leq \phi_M,$$

  em que $\|.\|$ representa a norma induzida de matrizes.

- *Existem matrizes simétricas $P(t, \lambda)$ e $Q(t, \lambda)$ tal que $P(t, \lambda)\mathcal{B}(t, \lambda)^T = C(t, \lambda)^T$ e $-Q(t, \lambda) := \mathcal{A}(t, \lambda)^T P(t, \lambda) + P(t, \lambda)\mathcal{A}(t, \lambda) + \dot{P}(t, \lambda)$. E também, existe p_m, p_M, q_m, $q_M > 0$ tal que, para quaisquer $(t, \lambda) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{D}$, $p_m \leq P(t, \lambda) \leq p_M$ e $q_m \leq P(t, \lambda) \leq q_M$.*

Então o sistema (3.28) é λ-UGES se e só se $\mathcal{B}(t, \lambda)$ é λ-uPE.

2.6.3 Input-to-State Stability

Esta ferramenta fornece as condições suficientes para a estabilidade de sistemas com entradas, i.e. condições para as quais o estado se mantém limitado quando a entrada é limitada.

Antes de enunciar o teorema é necessário introduzir alguns conceitos:

- Uma função $\alpha : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, diz-se de classe $\mathcal{K}_\infty$, se for contínua, estritamente crescente, não limitada e satisfizer $\alpha(0) = 0$.

- Uma função $\beta : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, diz-se de classe $\mathcal{KL}$, se $\beta(., t) \in \mathcal{K}_\infty$ para qualquer t, e $\beta(r, t) \to 0$ com $r \to \infty$.

- Um sistema definido pela equação diferencial $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ designa-se 0-GAS se for globalmente assimpototicamente estável quando $\mathbf{u} = 0$.

- Um sistema goza da propriedade de ganho assimptótico se

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \|\mathbf{x}(t)\| \leq \gamma(\|\mathbf{u}\|_\infty),$$

para qualquer $\mathbf{x}(t_0)$, $\mathbf{u}(\mathbf{t})$, $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$, em que $\|.\|$ designa a norma euclidiana de vectores, e $\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$.

Definição 8. *Um sistema é dito, em linguagem anglo-saxónica, input-to-state stable (ISS), se existe uma função β de classe $\mathcal{KL}$ e uma função γ de classe $\mathcal{K}_\infty$ tal que para qualquer estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ e qualquer entrada limitada $\mathbf{u}$, a solução $\mathbf{x}(t)$, e satisfaz*

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t - t_0) + \gamma(\|\mathbf{u}\|_\infty).$$

O conceito de ISS é muito importante para a classificação dos sistemas não lineares existindo na literatura especializada um corpo teorico de suporte bastante forte e completo. O teorema que seguidamente se apresenta foi estudado no âmbito do trabalho e pode ser encontrado em [40].

Teorema 4. *Um sistema $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ é ISS se e só se é 0-GAS e goza da propriedade de ganho assimptótico.*

2.7 Comentários Finais

No presente capítulo introduziram-se os conceitos fundamentais estudados no âmbito deste trabalho. Foram descritas várias alternativas para representar uma rotação. A matriz de rotação, que não apresenta singularidades, é definida por nove parâmetros. As representações por ângulos de Euler ou por vector de rotação que necessitam somente de três parâmetros, apresentam no entanto singularidades. Os quaterniões, que são definidos por quatro parâmetros, e não apresentam singularidades.

As cinemáticas de posição e velocidade, descritas num referencial inercial externo, são lineares e invariantes no tempo; o mesmo não acontece quando estas cinemáticas são descritas no referencial do corpo, ai obtém-se um sistema linear variante no tempo. A cinemática de atitude dada em termos da matriz de rotação é igualmente linear e variante no tempo.

Foram apresentados os princípios de funcionamento dos vários sensores que, neste trabalho, se consideram como parte integrante do sistema de navegação de um veículo autónomo. Os sensores inerciais fornecem medidas de aceleração e velocidade angular expressas no referencial do corpo. Estas são medidas indirectas das grandezas a estimar. As medidas destes sensores são afectadas por ruído e polarizações. Considera-se que o sistema de navegação também se encontra equipado com receptores que medem a distância a emissores estáticos, os quais são sensores auxiliares que fornecem medidas absolutas.

Foi estudado um algoritmo de interpolação esférica que, a partir das distâncias medidas aos emissores, permite calcular a posição dos emissores no referencial em os receptores são estáticos, e a

posição dos receptores no referencial em que os emissores são estáticos. Verificou-se que a geometria dos receptores e dos emissores influencia grandemente a qualidade dos resultados do algoritmo.

Introduziram-se ainda, algumas definições e teoremas relativos à análise de estabilidade de sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais não lineares. Estes teoremas serão utilizados no capítulo seguinte, no projecto dos observadores em tempo contínuo.

Capítulo 3

Projecto de Observadores em Tempo Contínuo

3.1 Descrição Geral

Neste capítulo, apresenta-se a síntese e análise de dois observadores em tempo contínuo com garantia de taxa de convergência exponencialmente rápida, que permitem estimar a posição e atitude de um veículo em três dimensões. O desenvolvimento destes observadores baseia-se na teoria de estabilidade de sistemas não lineares, nomeadamente em funções de *Lyapunov*, e sistemas lineares variantes no tempo parametrizados. Esta abordagem surge como alternativa às técnicas usuais de fusão sensorial que utilizam filtragem de *Wiener* e de *Kalman*, com as quais não é possível, em geral, obter garantias de estabilidade para sistemas não lineares.

Ao longo deste capítulo, assume-se que os observadores recebem leituras de giroscópios, acelerómetros e distâncias aos emissores de ultra-sons de forma contínua. O primeiro observador apresentado neste trabalho, admite que a leitura dos giroscópios é exacta, enquanto que o segundo observador já considera a existência de polarizações nas leituras dos giroscópios e utiliza a própria dinâmica para as estimar e compensar.

A derivação dos observadores de atitude e posição é realizada separadamente. O observador final é constituído por um observador de atitude e outro de posição organizados em cascata. É provada a convergência exponencialmente rápida do erro de atitude e posição, e indicados os pressupostos e condições em que isso acontece. Para cada um dos observadores é ainda apresentada uma simulação ilustrativa do seu funcionamento. Por fim, mostra-se que as leis de retroacção dependem apenas das leituras dos sensores e dos estados do observador.

A derivação destes observadores, apoia-se em teoria desenvolvida em [15] e [16]. O observador de atitude que não considera a existência de polarizações foi apresentado em [16], e o observador de atitude que estima as polarizações dos giroscópios é uma adaptação de um observador também de-

rivado em [16]. Ambos os observadores de posição constituem contribuições originais deste trabalho.

Neste capítulo, foi decidido apresentar os observadores de atitude com algum detalhe por questões pedagógicas e contextuais e também devido a serem resultados recentes. Estes resultados foram apresentados pelos autores recentemente em conferências, e por este motivo, é possível que à data da apresentação desta tese, o leitor não tenha acesso às publicações nas bases de dados electrónicas das respectivas organizações.

3.2 Referenciais de Interesse

Neste trabalho consideram-se três referenciais de interesse, ilustrados na Figura 3.1. O referencial $\{\mathbf{B}\}$, é o referencial solidário com o veículo; $\{\mathbf{E}\}$ é o referencial inercial Terra; e $\{\mathbf{L}\}$ o referencial inercial denominado local. O referencial $\{\mathbf{L}\}$ encontra-se no centróide dos emissores de ultra-sons que auxiliam o posicionamento do veículo, e a sua localização em relação ao referencial $\{\mathbf{E}\}$ mantém-se constante.

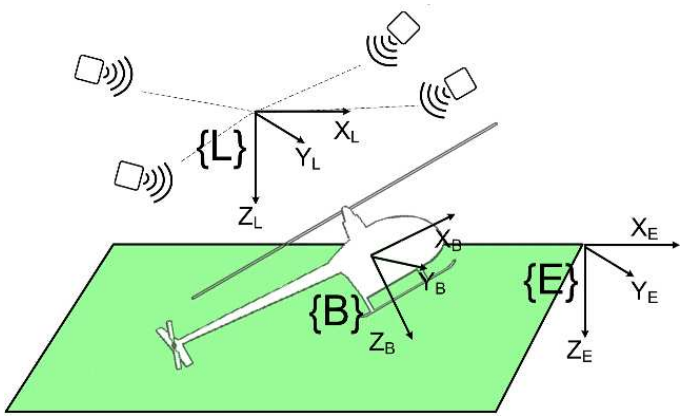


Figura 3.1: Referenciais de interesse.

Com os emissores e os receptores acústicos, utilizando um método de interpolação esférica, pode-se obter a posição dos receptores no referencial $\{\mathbf{L}\}$ ou a posição dos emissores no referencial $\{\mathbf{B}\}$. Serão utilizadas as posições dos emissores em $\{\mathbf{B}\}$, e a posição de um dos receptores acústicos em $\{\mathbf{L}\}$ que, sem perda de generalidade, será considerado a origem do referencial $\{\mathbf{B}\}$. Seja $\bar{\mathbf{b}}_i$ a posição do emissor i no referêncial $\{\mathbf{B}\}$, e ${}^{L}\bar{\mathbf{p}}$ a origem do referencial $\{\mathbf{B}\}$ expressa no referencial $\{\mathbf{L}\}$. Pode-se obter a posição da origem de $\{\mathbf{B}\}$ relativamente a $\{\mathbf{L}\}$ expresso em $\{\mathbf{B}\}$, $\bar{\mathbf{p}}$, através da matriz de rotação entre os dois referenciais

$$\bar{\mathbf{p}} := \bar{\mathcal{R}}^{T\,L}\bar{\mathbf{p}},$$

em que $\bar{\mathcal{R}}$ é a notação simplificada para a matriz ${}^{L}_{B}\mathcal{R}$. Os vectores $\bar{\mathbf{b}}_i$ e $\bar{\mathbf{p}}$ estão relacionados através da expressão

$$\bar{\mathbf{b}}_i = \bar{\mathcal{R}}^{T\ L}\bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{p}}, \tag{3.1}$$

em que ${}^{L}\bar{\mathbf{x}}_i$ é a posição do emissor de ultra-sons i no referencial $\{\mathbf{L}\}$, com $i = 1, \ldots, n$, em que n é o número de emissores. A relação (3.1) também pode ser expressa em forma matricial como

$$\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathcal{R}}^T \mathbf{X} - \bar{\mathbf{p}} \mathbf{1}_n^T,$$

onde $\bar{\mathbf{B}} := \left[\bar{\mathbf{b}}_1 \ldots \bar{\mathbf{b}}_n\right]$, $\mathbf{X} := \left[{}^{L}\bar{\mathbf{x}}_1 \ldots {}^{L}\bar{\mathbf{x}}_n\right]$, $\bar{\mathbf{B}}, \mathbf{X} \in \mathrm{M}(3,n)$ e $\mathbf{1}_n^T := [1 \ldots 1]^T$. Os vectores ${}^{L}\bar{\mathbf{x}}_i$, $\bar{\mathbf{b}}_i$ e $\bar{\mathbf{p}}$ encontram-se ilustrados na Figura 3.2. Por definição, o referencial $\{\mathbf{L}\}$ encontra-se no centroide dos emissores

$$\sum_{i=1}^{n} {}^{L}\bar{\mathbf{x}}_i = 0.$$

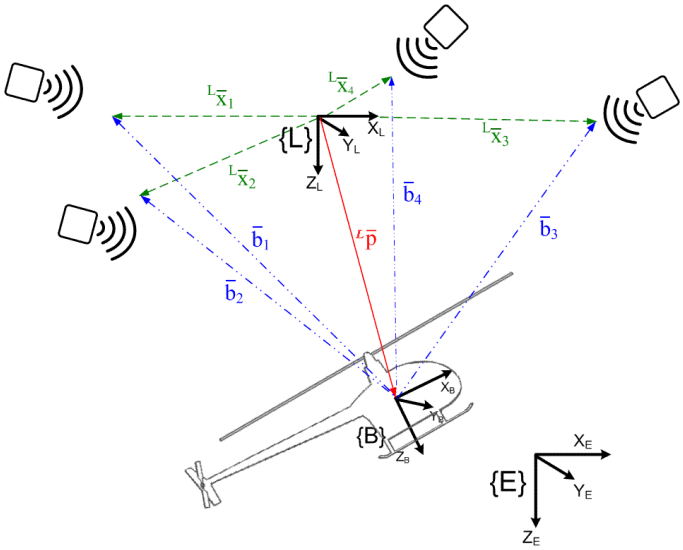


Figura 3.2: Posições dos emissores de ultra-sons relativas aos referenciais $\{\mathbf{B}\}$ e $\{\mathbf{L}\}$.

3.3 Síntese e Análise do Observador

Por razões de simplicidade, considere-se a seguinte notação

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= {}^{L}_{B}\mathcal{R} \\ \mathbf{p} &= {}^{B}\left({}^{L}P_{Borig}\right) \\ \mathbf{v} &= {}^{B}\left({}^{L}V_{Borig}\right) \\ \boldsymbol{\omega} &= {}^{B}\left({}^{L}\omega_{B}\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para ajudar na sua distinção, os valores reais, ou nominais, serão identificados como, $\bar{\mathbf{p}}$, $\bar{\mathbf{v}}$, $\bar{\boldsymbol{\omega}}$, $\bar{\mathcal{R}}$, enquanto os valores estimados serão identificados como $\hat{\mathbf{p}}$, $\hat{\mathbf{v}}$, $\hat{\mathcal{R}}$. Tendo em conta a notação introduzida em (3.2), a leitura do acelerómetro (2.5), e definindo $\bar{\mathbf{a}} := \mathbf{a}_{sensor}$, a cinemática do corpo rígido pode

ser escrita como

$$\dot{\bar{\mathcal{R}}} = \bar{\mathcal{R}}(\bar{\boldsymbol{\omega}})^{\wedge}$$

$$\dot{\bar{\mathbf{p}}} = \bar{\mathbf{v}} - (\bar{\omega})^{\wedge}\bar{\mathbf{p}}$$

$$\dot{\bar{\mathbf{v}}} = \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathcal{R}}^{TL}\bar{\mathbf{g}} - (\bar{\boldsymbol{\omega}})^{\wedge}\bar{\mathbf{v}}.$$

Pretende-se que os estados do observador sigam os do sistema real sempre que partilhem as mesmas condições iniciais, e quando não for o caso, que o estado estimado convirja para o estado do sistema real.

Os dois observadores propostos (sem estimação das polarizações nos giroscópios e com estimação desta grandeza) são baseados na cinemática do corpo rígido, e são descritos pelo seguinte sistema de equações diferenciais

$$\dot{\hat{\mathcal{R}}} = \hat{\mathcal{R}}(\hat{\boldsymbol{\omega}})^{\wedge}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}} = \hat{\mathbf{v}} - (\boldsymbol{\omega}^{*})^{\wedge}\hat{\mathbf{p}} + \mathbf{s}_{p}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}} = \bar{\mathbf{a}} + \hat{\mathcal{R}}^{TL}\bar{\mathbf{g}} - (\boldsymbol{\omega}^{*})^{\wedge}\hat{\mathbf{v}} + \mathbf{s}_{v},$$

em que $\hat{\boldsymbol{\omega}}$, $\mathbf{s}_p$ e $\mathbf{s}_v$ são termos de retroacção, com a função de compensar os erros de estimação, e $\boldsymbol{\omega}^*$ é uma estimativa da velocidade angular do veículo.

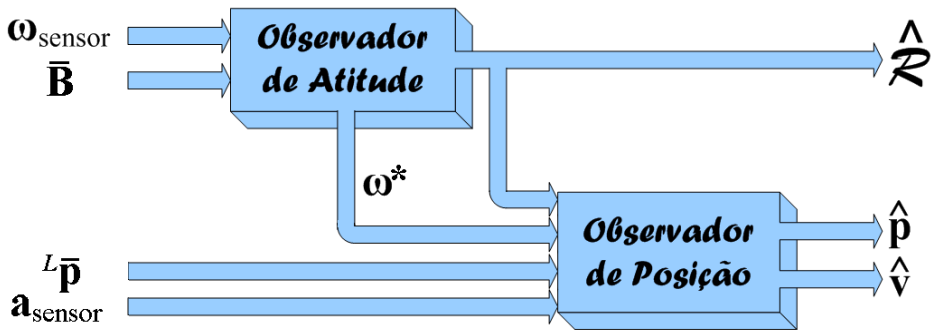


Figura 3.3: Representação em cascata dos observadores.

Os observadores totais são compostos por dois observadores, um de atitude e outro de posição linear, e possuem uma estrutura em cascata como ilustrado na Figura 3.3. O observador de atitude recebe como entrada a leitura dos giroscópios e a posição dos emissores de ultra-sons no referencial $\{\mathbf{B}\}$, e fornece ao observador de posição, uma estimativa da velocidade angular do veículo, e uma a estimativa da matriz de rotação que define a atitude do veículo em relação ao referencial $\{\mathbf{L}\}$. O observador de posição, por seu lado, além das grandezas recebidas do observador de atitude, recebe os dados do acelerómetro e a posição do veículo no referencial $\{\mathbf{L}\}$. Sempre que se referir *observador* significará todo o conjunto, observador de atitude e posição. Quando se pretender referir cada uma das

suas componentes, estas serão designadas respectivamente por, *observador de posição* e *observador de atitude*.

Além do sistema nominal e do sistema estimador, para realizar a análise da dinâmica do observador, é ainda útil considerar um terceiro sistema dinâmico que represente a evolução do erro de estimação ao longo do tempo. Para tal, começa-se por definir o erro como

$$\tilde{\mathcal{R}} := \hat{\mathcal{R}}\bar{\mathcal{R}}^T$$

$$\tilde{\mathbf{p}} := \hat{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}$$

$$\tilde{\mathbf{v}} := \hat{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}.$$

A dinâmica do erro de estimação é então dada por

$$\dot{\tilde{\mathcal{R}}} = \tilde{\mathcal{R}}(\bar{\mathcal{R}}(\hat{\boldsymbol{\omega}} - \bar{\boldsymbol{\omega}}))^\wedge \tag{3.3}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{p}}} = \tilde{\mathbf{v}} - (\boldsymbol{\omega}^*)^\wedge\tilde{\mathbf{p}} - (\tilde{\boldsymbol{\omega}})^\wedge\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{s}_p \tag{3.4}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = (\hat{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}})^T\, {}^L\bar{\mathbf{g}} - (\boldsymbol{\omega}^*)^\wedge\tilde{\mathbf{v}} - (\tilde{\boldsymbol{\omega}})^\wedge\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{s}_v. \tag{3.5}$$

3.3.1 Observador que não Considera Polarizações nos Giroscópios

Observador de Atitude

Para derivar o observador de atitude necessita-se de definir uma transformação linear da posição dos emissores de ultra-sons no referencial $\{\mathbf{B}\}$ $\bar{\mathbf{b}}_i$ [16]

$${}^B\bar{\mathbf{u}}_j := \sum_{i=1}^{n-1} a_{ij}\left(\bar{\mathbf{b}}_{i+1} - \bar{\mathbf{b}}_i\right),\ j = 1, ..., n-1,$$

em n é o número de emissores. Esta combinação linear pode ser expressa na forma matricial como

$${}^B\bar{\mathbf{U}} := \bar{\mathbf{B}}\mathbf{D}_X\mathbf{A}_X,\ \mathbf{D}_X := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1\times n-1} \\ \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-1} \\ \mathbf{0}_{1\times n-1} \end{bmatrix},\ \mathbf{A}_X := [a_{ij}].$$

É importante também definir

$$\mathbf{U}_X := \bar{\mathcal{R}}\, {}^B\bar{\mathbf{U}}_X = \left[{}^L\bar{\mathbf{u}}_1\ ...\ {}^L\bar{\mathbf{u}}_{n-1}\right]$$
$${}^B\hat{\mathbf{U}} := \hat{\mathcal{R}}^T\ \mathbf{U}_X = \left[{}^B\hat{\mathbf{u}}_1\ ...\ {}^B\hat{\mathbf{u}}_{n-1}\right].$$

Segundo [16] é ainda válida Proposição 1. Na notação empregue, $\mathrm{M(m,n)}$ representa o conjunto formado pelas matrizes com entradas reais e dimensão $m \times n$, $\mathrm{M(n)} := \mathrm{M(n,n)}$, $\mathrm{O(n)} \in \mathrm{M(n)}$ e representa o conjunto formado pelas matrizes ortogonais reais com dimensão $n \times n$, $\mathrm{diag(.)}$ representa a matriz diagonal formada pelos argumentos, e $\mathrm{blkdiag(.)}$ representa a matriz diagonal por blocos, cujos blocos são os argumentos.

Proposição 1. *(Proposição 3 de [16]) Se* $\mathbf{H} := \mathbf{X}\mathbf{D}_X$ *possuir característica completa, existe uma matriz não singular* $\mathbf{A}_X \in \mathrm{M}(n)$*, tal que,* $\mathbf{U}_X\mathbf{U}_X^T = \mathbf{I}$.

Demonstração. Faça-se a decomposição em valores singulares (SVD) de $\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$ onde $\mathbf{U} \in \mathrm{O}(3)$, $\mathbf{V} \in \mathrm{O}(3)$, $\mathbf{S} = [\mathrm{diag}(s_1, s_2, s_3)\ \mathbf{0}_{3\times(n-3)}] \in \mathrm{M}(3,n)$, e $s_1 > s_2 > s_3 > 0$ são os valores singulares de $\mathbf{H}$. Qualquer $\mathbf{A}_X$ dado por $\mathbf{A}_X = \mathbf{V}_A\,\mathrm{blkdiag}(s_1^{-1}, s_2^{-1}, s_3^{-1}, \mathbf{B})\mathbf{V}_A^T$, onde $\mathbf{B} \in \mathrm{M}(n-3)$ é não singular e $\mathbf{V}_A \in \mathrm{O}(n)$, origina $\mathbf{U}_X\mathbf{U}_X^T = \mathbf{H}\mathbf{A}_X\mathbf{A}_X^T\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{V}_A^T\mathbf{V}_A\mathbf{U}^T = \mathbf{I}$. □

Para auxiliar a derivação do observador de atitude, considere-se a função de Lyapunov candidata dada por [16]

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{R}} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} \|{}^B\hat{\mathbf{u}}_i - {}^B\bar{\mathbf{u}}_i\|^2 = \mathrm{tr}\left[(\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{R}})\mathbf{U}_X\mathbf{U}_X^T\right] = \\ &\frac{1}{4}\|\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{R}}\|^2\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{P}\boldsymbol{\lambda} = (1 - \cos(\theta))\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde $\mathbf{P} := \mathrm{tr}(\mathbf{U}_X\mathbf{U}_X^T)\mathbf{I} - \mathbf{U}_X\mathbf{U}_X^T \in \mathrm{M}(3)$ e $\mathrm{tr}(.)$ indica o traço da matriz, tal que $\mathrm{tr}(\mathbf{E}) := \sum_{k=1}^{n} e_{kk}$, $\mathbf{E} \in \mathrm{M}(n)$ e e_{ij} é o elemento da linha i e coluna j da matriz $\mathbf{E}$. Escolhendo $\mathbf{A}_X$, tal que, $\mathbf{U}_X\mathbf{U}_X^T = \mathbf{I}$ (Proposição 1), a função de Lyapunov (3.6) toma a forma

$$V_{\mathcal{R}} = \mathrm{tr}\left[(\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{R}})\right] = \frac{1}{2}\|\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{R}}\|^2 = 2(1 - \cos(\theta)). \tag{3.7}$$

A função de Lyapunov (3.7) tem como derivada [16]

$$\dot{V}_{\mathcal{R}} = \left(\left(\tilde{\mathcal{R}} - \tilde{\mathcal{R}}^T\right)^\vee\right)^T \bar{\mathcal{R}}\,(\hat{\boldsymbol{\omega}} - \bar{\boldsymbol{\omega}}) = 2\sin(\theta)\bar{\mathcal{R}}^T\boldsymbol{\lambda}, \tag{3.8}$$

onde $(.)^\vee$ é a operação que verifica $\left((\mathbf{a})^\wedge\right)^\vee = \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$.
Está-se agora em condições de derivar a lei de retroacção de atitude [16]

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \bar{\boldsymbol{\omega}} - K_\omega\mathbf{s}_\omega, \tag{3.9}$$

em que

$$\mathbf{s}_\omega := \bar{\mathcal{R}}^T(\tilde{\mathcal{R}} - \tilde{\mathcal{R}}^T)^\vee = 2\sin(\theta)\bar{\mathcal{R}}^T\boldsymbol{\lambda} \tag{3.10}$$

e $K_\omega \in \mathbb{R}^+$. Com esta lei de retroacção a derivada da função de Lyapunov (3.8) fica

$$\dot{V}_{\mathcal{R}} = -K_\omega\|\mathbf{s}_\omega\|^2 = -4K_\omega\sin^2(\theta), \tag{3.11}$$

que é negativa semi-definida, podendo-se concluir que a função de Lyapunov decresce ao longo das trajectórias do sistema. O conjunto invariante da função de Lyapunov é dado por

$$I_{\mathcal{R}} = \{\tilde{\mathcal{R}} \in \mathrm{SO}(3) : \tilde{\mathcal{R}} = \mathbf{I} \vee \tilde{\mathcal{R}} = \mathrm{rot}(\pi, \boldsymbol{\lambda}),\ \boldsymbol{\lambda} \in \mathrm{S}(2)\},$$

então para qualquer estado inicial com $\theta = \pi$, não é garantido que o sistema convirja para o estado pretendido, $\theta = 0$.

Seguidamente utilizar-se-á o operador $\mathrm{rank}(\mathbf{A})$ como operador que extrai a característica da matriz $\mathbf{A}$.

Pressuposto 1. *As posições dos emissores de ultra-sons não são todas colineares, ou seja,* $\mathrm{rank}(\mathbf{X}) \geq 2$.

Lema 1. *(Lema 2 de [16])*

A função de Lyapunov $V_{\mathcal{R}}$ tem um mínimo local único em $\tilde{\mathcal{R}} = \mathbf{I}$ se e só se o Pressuposto 1 for verificado.

Demonstração. Por [15, Lema 1] sabe-se que $V_{\mathcal{R}} > 0$ se e só se $\mathrm{rank}(\mathbf{U}_X) \geq 2$. E observando que $\mathbf{A}_X$ e $[\mathbf{D}_X\ \mathbf{1}_n]$ são não singulares, e que $\mathrm{rank}\,(\mathbf{U}_X) = \mathrm{rank}\,([\mathbf{U}_X\ 0]) = \mathrm{rank}\left(\mathbf{X}\,[\mathbf{D}_X\ \mathbf{1}_n]\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{A}_X & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right]\right) = \mathrm{rank}\,(\mathbf{X})$, completa-se a demonstração. □

Caso $\mathrm{rank}(\mathbf{X}) = 2$ as condições da Proposição 1 não são verificadas. Nesse caso é ainda possível obter uma matriz com característica completa através da geração de uma direcção ortogonal às colunas de $\mathbf{X}$ [16, Apêndice A].

Aplicando as equações (3.9) e (3.10) a (3.3), obtém-se a seguinte dinâmica para o erro da matriz de rotação

$$\dot{\tilde{\mathcal{R}}} = K_\omega \hat{\mathcal{R}}(\hat{\mathcal{R}}^T - \hat{\mathcal{R}}).$$

No Teorema 5 prova-se que o erro de atitude converge exponencialmente para a origem para as condições iniciais que verifiquem $\theta(t_0) \neq \pi$.

Teorema 5. *(Teorema 4. de [16]). O sistema em malha fechada (3.3) tem um ponto de equilíbrio exponencialmente estável em $\tilde{\mathcal{R}} = \mathbf{I}$, para qualquer condição inicial $\tilde{\mathcal{R}}(t_0)$ na região de atracção $R_A = \{\tilde{\mathcal{R}} \in \mathrm{SO}(3) : \tilde{\mathcal{R}} = \mathrm{rot}(\theta, \boldsymbol{\lambda}), |\theta| < \pi, \boldsymbol{\lambda} \in \mathrm{S}(2)\}$, e a trajectória do erro de observação satisfaz*

$$\|\tilde{\mathcal{R}}(t) - \mathbf{I}\| \ \leq\ k_{\mathcal{R}}\|\tilde{\mathcal{R}}(t_0) - \mathbf{I}\| e^{-\frac{1}{2}\gamma_{\mathcal{R}}(t-t_0)}, \tag{3.12}$$

onde $k_{\mathcal{R}} = 1$ e $\gamma_{\mathcal{R}} = 2K_\omega(1 + \cos(\theta(t_0)))$.

Demonstração. Considere-se a função de Lyapunov (3.7) e a sua derivada (3.11). O conjunto onde $\dot{V}_{\mathcal{R}} = 0$ é dado por $I_{\mathcal{R}}$. Como $\dot{V}_{\mathcal{R}} \leq 0$ o conjunto contido numa superfície de Lyapunov

$$\Omega_\rho := \{\tilde{\mathcal{R}} \in \mathrm{SO}(3) : V_{\mathcal{R}} \leq \rho\}$$

é positivamente invariante [36], ou seja, qualquer trajectória que se inicie em Ω_ρ irá permanecer em Ω_ρ.

Para qualquer $\rho < 4$ a função de Lyapunov é estritamente decrescente em Ω_ρ. Rescrevendo a derivada da função de Lyapunov como $\dot{V}_{\mathcal{R}} = -2K_\omega(1 + \cos(\theta))V_{\mathcal{R}}$ e aplicando Lema de comparação (Comparison Lema [36]) obtém-se

$$\dot{V}_{\mathcal{R}}(\tilde{\mathcal{R}}(t)) \leq -2K_\omega(1 + \cos(\theta))V_{\mathcal{R}}(\tilde{\mathcal{R}}(t)) \Rightarrow$$
$$V_{\mathcal{R}}(\tilde{\mathcal{R}}(t)) \leq V_{\mathcal{R}}(\tilde{\mathcal{R}}(t_0))e^{-2K_\omega(1+\cos(\theta(t)))(t-t_0)}.$$

Aplicando uma raiz quadrada em ambos os membros da equação, obtém-se o resultado (3.12). □

Observador de Posição

Como se assume que as leituras dos giroscópios não são afectadas por polarizações, a estimativa de velocidade angular é a própria leitura do sensor

$$\boldsymbol{\omega}^* := \bar{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}_{sensor}.$$

As leis de retroacção de posição e velocidade são obtidas definindo os termos $\mathbf{s}_p$ e $\mathbf{s}_v$ da seguinte forma

$$\mathbf{s}_p = -K_p\left(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathcal{R}}^{TL}\bar{\mathbf{p}}\right),\ K_p > 0 \tag{3.13}$$

$$\mathbf{s}_v = -K_v\left(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathcal{R}}^{TL}\bar{\mathbf{p}}\right),\ K_v > 0, \tag{3.14}$$

em que ${}^L\bar{\mathbf{p}}$ designa a posição da origem do referencial $\{\mathbf{B}\}$, em relação ao referencial $\{\mathbf{L}\}$, expressa no referencial $\{\mathbf{L}\}$.

Estas não são as únicas leis de retroacção possíveis. Uma outra possibilidade era defini-las como

$$\mathbf{s}_p = -K_p\left(\hat{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}\right),\ K_p > 0$$

$$\mathbf{s}_v = -K_v\left(\hat{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}\right),\ K_v > 0,$$

pois $\bar{\mathbf{p}}$ pode ser obtido através de $\bar{\mathbf{p}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{\mathbf{b}}_i$, sendo n o número de emissores de ultra-sons. Contudo estas leis de retroacção foram preteridas, por existir muito mais sensibilidade no cálculo de ${}^L\bar{\mathbf{p}}$, do que nos cálculos de $\bar{\mathbf{b}}_i$. Esta diferença de sensibilidade, tal como estudado na Secção 2.5, deve-se ao facto dos receptores acústicos estarem a bordo de uma plataforma, e por isso as distâncias entre eles serem, em geral, mais reduzidas que as distâncias entre os emissores de ultra-sons. A Figura 3.4 ilustra esta questão.

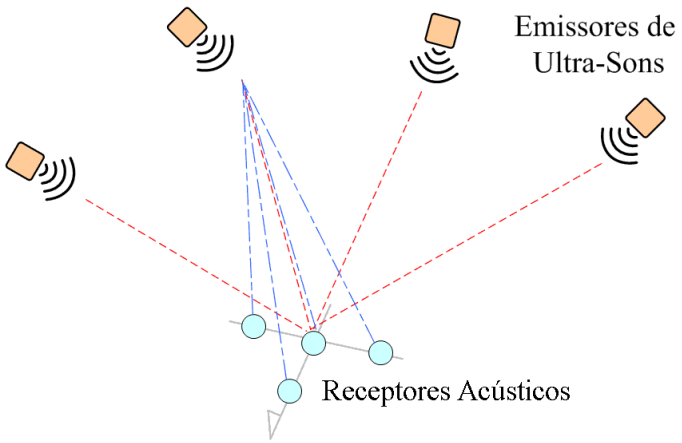


Figura 3.4: Ilustração dos emissores de ultra-sons e dos receptores acústicos.

Juntando as equações (3.4), (3.5), (3.13), (3.14), obtém-se a seguinte dinâmica para os erros de

posição e velocidade

$$\dot{\tilde{\mathbf{p}}} = \tilde{\mathbf{v}} - (\bar{\boldsymbol{\omega}})^{\wedge}\tilde{\mathbf{p}} - K_p\left(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathcal{R}}^{T\,L}\bar{\mathbf{p}}\right) \tag{3.15}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = (\hat{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}})^{T\;L}\bar{\mathbf{g}} - (\bar{\boldsymbol{\omega}})^{\wedge}\tilde{\mathbf{v}} - K_v\left(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathcal{R}}^{T\,L}\bar{\mathbf{p}}\right). \tag{3.16}$$

O Teorema 6 garante que o sistema formado pelas equações (3.15) e (3.16), é globalmente exponencialmente estável.

Pressuposto 2. *Para qualquer $\gamma_p > 0$, existe $k_p > 0$, tal que a posição do veículo satisfaz*

$$\|\mathbf{p}(t)\| \;\leq\; k_p e^{\gamma_p(t-t_0)}.$$

Este pressuposto, na prática, não constitui uma restrição, pois é verificado por limitações físicas, quer pela limitação física intrínseca imposta pela velocidade da luz, quer por limitação dos actuadores existentes nas plataformas móveis.

Teorema 6. *Assuma-se que não existem polarizações nas medidas fornecidas pelos giroscópios e que se verificam, o Pressuposto 2, e as condições do Teorema 5. Então, os erros de estimação convergem exponencialmente rápido para o ponto de equilíbrio $(\tilde{\mathcal{R}}, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{v}}) = (\mathbf{I}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ para qualquer condição inicial que satisfaça $(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{v}}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Ainda, se $\mathcal{R}$ for uma grandeza conhecida, a origem do sistema (3.15,3.16) é globalmente exponencialmente estável.*

Demonstração. Como $\tilde{\mathcal{R}} = \hat{\mathcal{R}}\bar{\mathcal{R}}^T$ e $\tilde{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}$, tem-se que

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathcal{R}}^{T\,L}\bar{\mathbf{p}} = \\
&\tilde{\mathbf{p}} + \bar{\mathcal{R}}^{T\,L}\bar{\mathbf{p}} - \hat{\mathcal{R}}^{T\,L}\bar{\mathbf{p}} = \\
&\tilde{\mathbf{p}} + \left(\bar{\mathcal{R}}^T - \bar{\mathcal{R}}^T\tilde{\mathcal{R}}^T\right)^L\bar{\mathbf{p}} = \\
&\tilde{\mathbf{p}} + \bar{\mathcal{R}}^T\left(\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{R}}^T\right)\bar{\mathcal{R}}\bar{\mathbf{p}}.
\end{aligned}$$

Considere-se a transformação linear $\bar{\mathcal{R}}$ realizada sobre os vectores $\tilde{\mathbf{p}}$ e $\tilde{\mathbf{v}}$. Esta é uma transformação de Lyapunov. Como $\det(\bar{\mathcal{R}}) = 1$ a transformação é não singular, $\bar{\mathcal{R}}$ e $\dot{\bar{\mathcal{R}}}$ são contínuas, e qualquer matriz de rotação é limitada. Então, pelo Teorema 2, as conclusões de estabilidade acerca do sistema transformado, são igualmente válidas para o sistema original. Pode verificar-se que qualquer matriz de rotação $\mathcal{R}$, é efectivamente limitada, observado que para qualquer $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^T\mathcal{R}\mathbf{x} = \cos(\theta)\|\mathbf{x}\|^2$, $\{\theta \in [0\ \pi] : \mathcal{R} = \mathrm{rot}(\theta, \boldsymbol{\lambda}),\ \boldsymbol{\lambda} \in \mathrm{S}(2)\}$.

A dinâmica do sistema transformado é dada por

$$\frac{d}{dt}(\bar{\mathcal{R}}\tilde{\mathbf{p}}) = \bar{\mathcal{R}}\tilde{\mathbf{v}} - K_p\bar{\mathcal{R}}\tilde{\mathbf{p}} - K_p\left(\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{R}}\right)\bar{\mathcal{R}}\bar{\mathbf{p}} \tag{3.17}$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{\mathcal{R}}\tilde{\mathbf{v}}) = \left(\tilde{\mathcal{R}}^T - \mathbf{I}\right)^L\bar{\mathbf{g}} - K_v\tilde{\mathbf{p}} - K_v\left(\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{R}}\right)\bar{\mathcal{R}}\bar{\mathbf{p}} \tag{3.18}$$

que pode ser reescrita na forma matricial como

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = A\boldsymbol{\xi} + \mathbf{u}, \tag{3.19}$$

onde $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{R}} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \bar{\mathcal{R}} \end{bmatrix} \mathbf{x}$, $A = \begin{bmatrix} -K_p\mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} \\ -K_v\mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix}$, e $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -K_p(\mathbf{I}-\tilde{\mathcal{R}})\bar{\mathcal{R}}\bar{\mathbf{p}} \\ -K_v(\mathbf{I}-\tilde{\mathcal{R}})\bar{\mathcal{R}}\bar{\mathbf{p}}+(\tilde{\mathcal{R}}^T-\mathbf{I})^T{}^L\bar{\mathbf{g}} \end{bmatrix}$.

O sistema (3.19) é linear e invariante no tempo. Os valores próprios da matriz A são dados por

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{K_p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{K_p^2 - 4K_v} \\ \lambda_2 &= -\frac{K_p}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{K_p^2 - 4K_v}, \end{aligned}$$

cada um deles com multiplicidade 3, o que corresponde a três sistemas de segunda ordem, desacoplados, o que permite concluir que para quaisquer $K_p > 0$, $K_v > 0$, $\mathfrak{Re}(\lambda_1) < 0$ e $\mathfrak{Re}(\lambda_2) < 0$. Então A é *Hurwitz*, e portanto o sistema (3.19) é estável.

Pelo Teorema 5 sabe-se que existe $k_{\mathcal{R}}, \gamma_{\mathcal{R}} > 0$ tal que

$$\left\|\tilde{\mathcal{R}}(t) - \mathbf{I}\right\| \leq k_{\mathcal{R}} \left\|\tilde{\mathcal{R}}(t_0) - \mathbf{I}\right\| e^{-\gamma_{\mathcal{R}}(t-t_0)}.$$

O vector de entrada $\|\mathbf{u}\|$ verifica a seguinte inequação

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| &\leq K_p \left\|\left(\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{R}}\right)\bar{\mathcal{R}}\bar{\mathbf{p}}\right\| + K_v \left\|\left(\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{R}}\right)\bar{\mathcal{R}}\bar{\mathbf{p}}\right\| + \left\|\left(\hat{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}\right)^T {}^L\bar{\mathbf{g}}\right\| \\ &\leq \left\|\tilde{\mathcal{R}} - \mathbf{I}\right\| \left((K_p + K_v)\|\bar{\mathbf{p}}\| + \|{}^L\bar{\mathbf{g}}\|\right). \end{aligned}$$

Tirando partido do facto que $\|\bar{\mathbf{p}}(t)\|$ verifica o Pressuposto 2, tem-se que

$$\|\mathbf{u}(t)\| \leq k_u e^{-\gamma_u(t-t_0)},$$

onde $k_u = 2k_{\mathcal{R}} \max\left\{(K_p + K_v)k_p, \|{}^L\bar{\mathbf{g}}\|\right\} \left\|\tilde{\mathcal{R}}(t_0) - \mathbf{I}\right\|$ e $\gamma_u = \gamma_{\mathcal{R}} - \gamma_p$.

O estado transformado $\boldsymbol{\xi}(t)$ verifica

$$\|\boldsymbol{\xi}(t)\| = e^{A(t-t_0)}\|\boldsymbol{\xi}(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

e por [36] a estabilidade da origem implica que existem $k_a, \gamma_a > 0$ tal que $\|e^{At}\| \leq k_a e^{-\gamma_a t}$, e por conseguinte a seguinte inequação é verificada

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\xi}(t)\| &\leq k_a e^{-\gamma_a(t-t_0)}\|\boldsymbol{\xi}(t_0)\| + k_a k_u \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma_a(t-\tau)-\gamma_u(\tau-t_0)}d\tau \\ &= k_a e^{-\gamma_a(t-t_0)}\|\boldsymbol{\xi}(t_0)\| + k_a k_u \frac{e^{-\gamma_u(t-t_0)} - e^{-\gamma_a(t-t_0)}}{\gamma_a - \gamma_u} \\ &\leq k_a e^{-\gamma_a(t-t_0)}\|\boldsymbol{\xi}(t_0)\| + \frac{k_a k_u}{|\gamma_a - \gamma_u|} e^{-\min\{\gamma_u,\gamma_a\}(t-t_0)} \\ &\leq 2\max\left\{k_a\|\boldsymbol{\xi}(t_0)\|, \frac{k_a k_u}{|\gamma_a - \gamma_u|}\right\} e^{-\min\{\gamma_u,\gamma_a\}(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Concatenando o erro de atitude e o estado transformado como $\mathbf{x}_f := \left(\tilde{\mathcal{R}} - \mathbf{I}, \boldsymbol{\xi}\right)$ e aplicando as desigualdades $\|\mathbf{x}_f\| \leq \|\tilde{\mathcal{R}} - \mathbf{I}\| + \|\boldsymbol{\xi}\|$ e $\max\left\{\|\tilde{\mathcal{R}} - \mathbf{I}\|, \|\boldsymbol{\xi}\|\right\} \leq \|\mathbf{x}_f\|$, obtém-se um limite superior exponencial dado por

$$\|\mathbf{x}_f(t)\| \leq k_{\max}\|\mathbf{x}_f(t_0)\|e^{-\gamma_{\min}(t-t_0)},$$

onde $k_{\max} = 2\max\left\{k_{\mathcal{R}}, 2k_a, \frac{4k_a k_{\mathcal{R}}}{|\gamma_a - \gamma_u|}\max\left\{\left(K_p + K_v\right)k_p, \|{}^L\bar{\mathbf{g}}\|\right\}\right\}$, e $\gamma_{\min} = \min\left\{\gamma_a, \gamma_{\mathcal{R}} - \gamma_p\right\}$. Então, as trajectórias do sistema $(\mathcal{R}(t), \boldsymbol{\xi}(t))$ convergem exponencialmente rápido para a origem. O facto que

$\|\xi(t)\| = \|\mathbf{x}(t)\|$ implica a convergência exponencial do observador em cascata. Se $\bar{\mathcal{R}}$ for conhecidos, então $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ e a origem de (3.19) é globalmente exponencialmente estável pelas propriedades dos sistemas lineares e invariantes no tempo. □

Resultados de Simulação

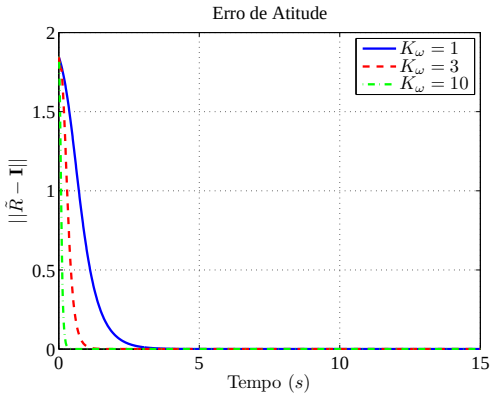


Figura 3.5: Simulação da evolução do erro de atitude do observador que não considera a existência de polarizações nos giroscópios.

Para ilustrar o funcionamento do observador foram realizadas algumas simulações recorrendo ao programa *MATLAB*. Nestas simulações o veículo descreve uma trajectória em hélice e o observador não tem qualquer conhecimento do estado inicial do veículo. Os erro iniciais para cada grandeza são apresentados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Erros inicias das simulações.

Grandeza	Erros Iniciais
$\theta(t_0)$	$\frac{\pi}{180}135\ (rad)$
$\tilde{\mathbf{p}}(t_0)$	$[-1\ 1\ 1]^T\ (m)$
$\tilde{\mathbf{v}}(t_0)$	$[-0,5\ 0\ 0,1]^T\ (ms^{-1})$

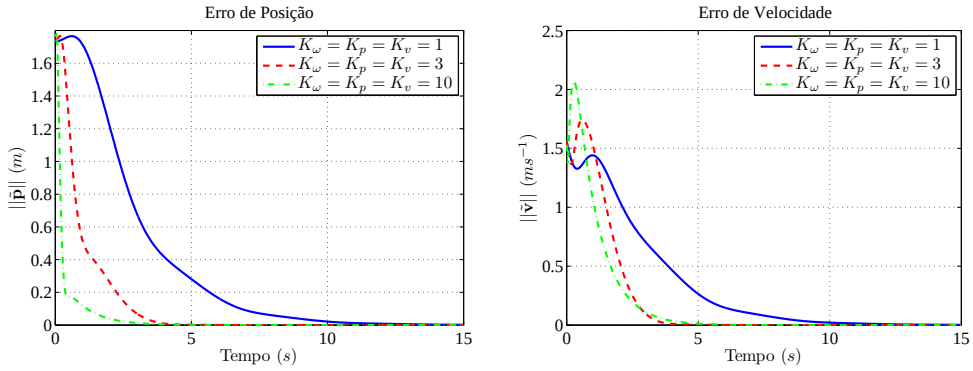
Além dos erros considera-se que os giroscópios não possuem polarizações, ou que estas foram compensadas à priori, e que as posições dos emissores de ultra-sons no referencial $\{\mathbf{L}\}$ são dadas por

$$
\begin{aligned}
{}^L\bar{\mathbf{x}}_1 &= [-5\ \ -5\ \ -5]^T \\
{}^L\bar{\mathbf{x}}_2 &= [5\ 5\ \ -5]^T \\
{}^L\bar{\mathbf{x}}_3 &= [5\ \ -5\ 5]^T \\
{}^L\bar{\mathbf{x}}_4 &= [-5\ 5\ 5]^T \\
{}^L\bar{\mathbf{x}}_5 &= [0\ 0\ 0]^T.
\end{aligned}
$$

Repare-se que estas posições respeitam a definição

$$\sum_{i=1}^{n} {}^{L}\bar{\mathbf{x}}_i = 0,$$

e $\bar{\mathbf{p}}(t)$ respeita o Pressuposto 2. Foram realizadas simulações para os ganhos: $K_p = K_v = K_\omega = 1$, $K_p = K_v = K_\omega = 3$ e $K_p = K_v = K_\omega = 10$.



(a) Erro de Posição

(b) Erro de Velocidade

Figura 3.6: Simulação da evolução do erro de posição e de velocidade do observador que não considera a existência de polarizações nos giroscópios.

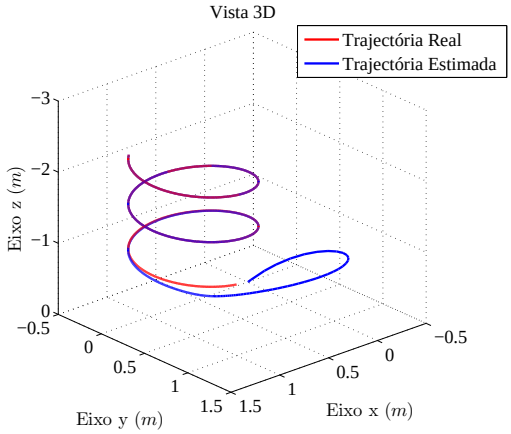


Figura 3.7: Trajectórias real e estimada quando os ganhos do observador são: $K_\omega = K_p = K_v = 10$.

Na Figura 3.5 observa-se a evolução no tempo do erro de atitude. As Figuras 3.6(a) e 3.6(b) ilustram, respectivamente, os erros de posição e velocidade. É facilmente identificável a convergência exponencial dos vários erros. Na Figura 3.7 são apresentadas as trajectórias real e estimada para a simulação de com ganhos mais elevados. É visível que a posição inicial é distinta da real assim como a orientação.

É de notar que o aumento dos ganhos conduz a observadores mais rápidos, podendo desta forma serem utilizados como parâmetros de ajuste para condicionar, de uma forma simples, a dinâmica do observador.

3.3.2 Observador que Considera Polarizações nos Giroscópios

Observador de Atitude

A existência de polarizações nos giroscópios, implica que

$$\boldsymbol{\omega}_{sensor} = \bar{\boldsymbol{\omega}} + \bar{\mathbf{b}}_\omega,$$

onde o valor nominal das polarizações $\bar{\mathbf{b}}_\omega$ é considerado constante, ou seja, $\dot{\bar{\mathbf{b}}}_\omega = 0$. O erro na estimação das polarizações nos giroscópios é definido como $\tilde{\mathbf{b}}_\omega := \hat{\mathbf{b}}_\omega - \bar{\mathbf{b}}_\omega$, onde $\hat{\mathbf{b}}_\omega$ é o vector de polarizações estimadas $\hat{\mathbf{b}}_\omega$.

Alterando a função de Lyapunov (3.7) de forma a ter em consideração a existência destas polarizações obtém-se

$$\begin{aligned} V_b &= \mathrm{tr}\left[(\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{R}})\right] + \frac{1}{2K_{b_\omega}}\|\tilde{\mathbf{b}}_\omega\|^2 = \frac{1}{2}\|\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{R}}\|^2 + \frac{1}{2K_{b_\omega}}\|\tilde{\mathbf{b}}_\omega\|^2 \\ &= 2(1 - \cos(\theta)) + \frac{1}{2K_{b_\omega}}\|\tilde{\mathbf{b}}_\omega\|^2, \end{aligned} \tag{3.20}$$

e a sua derivada é dada por

$$\dot{V}_b = \mathbf{s}_\omega^T(\hat{\boldsymbol{\omega}} - \bar{\boldsymbol{\omega}}) + \frac{1}{K_{b_\omega}}\dot{\tilde{\mathbf{b}}}_\omega^T\tilde{\mathbf{b}}_\omega. \tag{3.21}$$

Neste observador a lei de retroacção de atitude é dada por

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}_{sensor} - \hat{\mathbf{b}}_\omega - K_\omega\mathbf{s}_\omega = \bar{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\mathbf{b}}_\omega - K_\omega\mathbf{s}_\omega, \tag{3.22}$$

em que $K_\omega \in \mathbb{R}$, e tal como em (3.10),

$$\mathbf{s}_\omega := \bar{\mathcal{R}}^T(\tilde{\mathcal{R}} - \tilde{\mathcal{R}}^T)^\vee = 2\sin(\theta)\bar{\mathcal{R}}^T\boldsymbol{\lambda}.$$

Aplicando a lei de retroacção (3.22) à de derivada da função de Lyapunov (3.21) obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_b &= \mathbf{s}_\omega^T(\hat{\boldsymbol{\omega}} - \bar{\boldsymbol{\omega}}) + \frac{1}{K_{b_\omega}}\dot{\tilde{\mathbf{b}}}_\omega^T\tilde{\mathbf{b}}_\omega \\ &= -\mathbf{s}_\omega^T(\tilde{\mathbf{b}}_\omega + K_\omega\mathbf{s}_\omega) + \frac{1}{K_{b_\omega}}\dot{\tilde{\mathbf{b}}}_\omega^T\tilde{\mathbf{b}}_\omega \\ &= -K_\omega\|\mathbf{s}_\omega\|^2 + (-\mathbf{s}_\omega^T + \frac{1}{K_{b_\omega}}\dot{\tilde{\mathbf{b}}}_\omega^T)\tilde{\mathbf{b}}_\omega, \end{aligned}$$

sabendo que $\dot{\bar{\mathbf{b}}} = 0$ e definindo $\dot{\tilde{\mathbf{b}}}_\omega = \dot{\hat{\mathbf{b}}}_\omega = K_{b_\omega}\mathbf{s}_\omega$ fica-se com

$$\dot{V}_b = -K_\omega\|\mathbf{s}_\omega\|^2. \tag{3.23}$$

O observador de atitude é portanto constituído por mais uma equação diferencial, para lidar com a existência de polarizações nos giroscópios, dada por

$$\dot{\tilde{\mathbf{b}}}_\omega = \dot{\hat{\mathbf{b}}}_\omega = K_{b_\omega}\mathbf{s}_\omega. \tag{3.24}$$

Tendo em conta a lei de retroacção (3.22) e a equação diferencial (3.24), a dinâmica dos erros de estimação do observador de atitude pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathcal{R}}} &= -K_\omega\tilde{\mathcal{R}}(\mathcal{R} - \mathcal{R}^T) - \tilde{\mathcal{R}}(\bar{\mathcal{R}}\tilde{\mathbf{b}}_\omega)^\wedge \\ \dot{\tilde{\mathbf{b}}}_\omega &= K_{b_\omega}\bar{\mathcal{R}}(\tilde{\mathcal{R}} - \tilde{\mathcal{R}}^T)^\vee \end{aligned} \tag{3.25}$$

O Lema 2 introduz condições suficientes para que os erros de estimação sejam limitados.

Lema 2. *(Adaptação do Lema 6 de [16]) Os erros de estimação* $\tilde{\mathbf{x}}_b = (\tilde{\mathcal{R}}, \tilde{\mathbf{b}}_\omega)$ *são limitados para qualquer condição inicial que respeite*

$$\frac{\frac{1}{K_{b_\omega}}\|\tilde{\mathbf{b}}_\omega(t_0)\|^2}{4(1+\cos(\theta(t_0)))} < 1 \tag{3.26}$$

Demonstração. Seja $\Omega_\rho = \{\tilde{\mathbf{x}}_b \in D_b : V_b \leq \rho\}$. Como a função de Lyapunov (3.7) é uma distância pesada à origem, existe γ tal que $\|\tilde{\mathbf{x}}_b\|^2 \leq \gamma V_b$ e Ω_ρ é um conjunto compacto. $\dot{V}_b \leq 0$ implica que qualquer trajectória que tenha início em Ω_ρ se mantém em Ω_ρ. Então, para qualquer $t \geq t_0$ têm-se que $\|\tilde{\mathbf{x}}_b(t)\|^2 \leq \gamma V_b(\tilde{\mathbf{x}}_b(t_0))$ e o estado é limitado.

A condição de ganho (3.26) é equivalente a $V_b(\tilde{\mathbf{x}}_b(t_0)) < 4$. A invariância de Ω_ρ implica que $V_b(\tilde{\mathbf{x}}_b(t)) \leq V_b(\tilde{\mathbf{x}}_b(t_0))$, e então $2(1+\cos(\theta)) \leq V_b(\tilde{\mathbf{x}}_b(t_0)) < 4$ e consequentemente $\exists_{\theta_{max}} : \theta(t) \leq \theta(t_0) < \theta_{max} \forall_{t \geq t_0}$. □

O Teorema 7 garante a convergência exponencial do estado estimado de atitude e polarizações, para o estado nominal.

Teorema 7. *(Adaptação do Teorema 7 de [16]) Assumindo* $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ *limitado e para qualquer condição inicial que satisfaça (3.26), o erro de atitude e de polarizações nos giroscópios converge exponencialmente para o ponto de equilíbrio* $(\tilde{\mathcal{R}}, \tilde{\mathbf{b}}_\omega) = (\mathbf{I}, 0)$.

Demonstração. Utilizando a ferramenta de análise para sistemas lineares variantes no tempo parametrizados [38], o sistema (3.25) na forma $\dot{\mathbf{x}}_b = f(t, \mathbf{x}_b)\mathbf{x}_b$ é rescrito como $\dot{\mathbf{x}}_\star = A(\lambda, t)\mathbf{x}_\star$. Onde o parâmetro λ está relacionado com as condições iniciais do sistema (3.25). As soluções dos sistemas $\dot{\mathbf{x}}_b = f(t, \mathbf{x}_b)\mathbf{x}_b$ e $\dot{\mathbf{x}}_\star = A(\lambda, t)\mathbf{x}_\star$ são idênticas se tiverem o mesmo estado inicial, i.e. $\mathbf{x}_\star(t_0) = \mathbf{x}_b(t_0)$.

Irá ser utilizada a transformação de coordenadas proposta em [20]. Considere o erro de atitude expresso na forma de quaterniões, em que a parte vectorial é dada por $\bar{\mathbf{q}}_q = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{\lambda}$, então a dinâmica em malha fechada é

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_q &= \frac{1}{2}\mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{q}})(-\bar{\mathcal{R}}\tilde{\mathbf{b}}_\omega - 4K_\omega \tilde{\mathbf{q}}_q \tilde{q}_s) \\ \dot{\tilde{\mathbf{b}}}_\omega &= 4Kb_\omega \bar{\mathcal{R}}^T \mathbf{Q}^T(\tilde{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{q}}_q, \end{aligned} \tag{3.27}$$

onde $\mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{q}}) := \tilde{q}_s\mathbf{I} + (\tilde{\mathbf{q}}_q)^\wedge$, $\tilde{\mathbf{q}} = [\tilde{\mathbf{q}}_q^T \ \tilde{q}_s]^T$, $\tilde{q}_s = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, e $\dot{\tilde{q}}_s = -2K_\omega \tilde{\mathbf{q}}_q^T \tilde{\mathbf{q}}_q \tilde{q}_s - \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}_q^T \tilde{\mathbf{b}}_\omega$.

Seja $\mathbf{x}_q := (\tilde{\mathbf{q}}_q, \tilde{\mathbf{b}}_\omega)$, $\mathbf{x}_q \in D_q$, e $D_q := \mathrm{B}(3) \times \mathbb{R}^3$, com $\mathrm{B}(n) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^T\mathbf{x} \leq 1\}$, e defina-se o sistema (3.27) no domínio $\mathcal{D}_q = \{\mathbf{x}_q \in D_q : V_b < 4\}$. o conjunto $\mathcal{D}_q$ é dado pelo interior da superfície de Lyapunov $V_b = 4$, e portanto é bem definido e é positivamente invariante. A condição (3.26) garante que o estado inicial está contido em $\mathcal{D}_q$.

Seja $\mathbf{x}_\star := (\tilde{\mathbf{q}}_{q\star}, \tilde{\mathbf{b}}_{\omega\star})$ e $D_q := \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, e defina-se o sistema linear variante no tempo parametrizado

$$\dot{\mathbf{x}}_\star = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(t,\lambda) & \mathcal{B}^T(t,\lambda) \\ -C(t,\lambda) & 0_{3\times3} \end{bmatrix} \mathbf{x}_\star, \tag{3.28}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{D}_q$, e as sub-matrizes são definidas como

$$\mathcal{A}(t,\lambda) = \left[-2K_\omega \tilde{q}_s(t,\lambda)\mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{q}}(t,\lambda))\right],$$
$$\mathcal{B}(t,\lambda) = \left[-\frac{1}{2}\bar{\mathcal{R}}^T\mathbf{Q}^T(\tilde{\mathbf{q}}(t,\lambda))\right],$$
$$C(t,\lambda) = \left[-4\bar{\mathcal{R}}^T\mathbf{Q}^T(\tilde{\mathbf{q}}(t,\lambda))\right],$$

e $\tilde{\mathbf{q}}(t,\lambda)$ representa a solução de (3.27) com condições iniciais $\lambda = (t_0, \tilde{\mathbf{q}}(t_0), \tilde{\mathbf{b}}_\omega(t_0))$.

As matrizes $\mathcal{A}(t,\lambda)$, $\mathcal{B}(t,\lambda)$, e $C(t,\lambda)$, são limitadas e o sistema é bem definido [36, pag. 626].

Se o sistema parametrizado for λ-UGES, então o sistema (3.27) é uniformemente exponencialmente estável em $\mathcal{D}_q$ [38, pag.14-15]. O sistema parametrizado verifica os pressupostos de [38]:

1. Como $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ é limitado, os elementos de $\mathcal{B}(t,\lambda)$, e
$$\frac{\partial\mathcal{B}(t,\lambda)}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2}(\dot{\bar{\mathcal{R}}}^T\mathbf{Q}^T(\tilde{\mathbf{q}}(t,\lambda)) + \bar{\mathcal{R}}^T\mathbf{Q}^T(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t,\lambda)))\right],$$
são limitados, e então existe b_M, tal que
$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}_0^+\times\mathcal{D}_q, t\geq 0}\left\{\|\mathcal{B}(t,\lambda)\|, \left\|\frac{\partial\mathcal{B}(t,\lambda)}{\partial t}\right\|\right\} \leq b_M,$$
onde $\|.\|$ é a norma euclidiana de matrizes.

2. As matrizes
$$P(t,\lambda) = 8K_{b_\omega}\mathbf{I},\ Q(t,\lambda) = 32K_{b_\omega}\tilde{q}_s^2(t,\lambda)K_\omega\mathbf{I},$$
são positivas definidas e satisfazem
$$P(t,\lambda)\mathcal{B}^T(t,\lambda) = C^T(t,\lambda)$$
$$-Q(t,\lambda) = \mathcal{A}^T(t,\lambda)P(t,\lambda) + P(t,\lambda)\mathcal{A}(t,\lambda) + \dot{P}(t,\lambda)$$
e também são satisfeitas as condições de simetria e existência de q_m, q_M , p_m e p_M, tal que,
$$q_m\mathbf{I} \leq Q(t,\lambda) \leq q_M\mathbf{I},$$
$$p_m\mathbf{I} \leq P(t,\lambda) \leq p_M\mathbf{I},$$
com $q_m = 32K_\omega K_{b_\omega}\cos^2\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right)$, $q_M = 32K_\omega K_{b_\omega}$, $p_m = p_M = 8K_{b_\omega}$.

O sistema (3.28) is λ-UGES se e só se $\mathcal{B}(t,\lambda)$ é λ-uPE [38]. Para tal, a condição suficiente $\mathcal{B}(\tau,\lambda)\mathcal{B}^T(\tau,\lambda) \geq \alpha_B\mathbf{I}$ é mostrada para $\alpha_B > 0$ independente de τ e λ.

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\tau,\lambda)\mathcal{B}^T(\tau,\lambda) &= \left(-\frac{1}{2}\bar{\mathcal{R}}^T\mathbf{Q}^T(\tilde{\mathbf{q}})\right)\left(-\frac{1}{2}\bar{\mathcal{R}}^T\mathbf{Q}^T(\tilde{\mathbf{q}})\right)^T \\ &= \frac{1}{4}\bar{\mathcal{R}}^T\mathbf{Q}^T(\tilde{\mathbf{q}})\mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{q}})\bar{\mathcal{R}}\end{aligned}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\mathbf{y}^T\bar{\mathcal{R}}^T\mathbf{Q}^T(\tilde{\mathbf{q}})\mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{q}})\bar{\mathcal{R}}\mathbf{y} &= \frac{1}{4}(\|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{y}^T\bar{\mathcal{R}}\tilde{\mathbf{q}}_q)^2) \\ &\geq \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{4}(1 - \|\tilde{\mathbf{q}}_q\|^2) \\ &= \|\mathbf{y}\|^2 c_\theta,\end{aligned}$$

onde $c_\theta := \frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{1}{2}\theta_{max}\right)$. Então $\mathcal{B}(\tau,\lambda)\mathcal{B}^T(\tau,\lambda) \geq c_\theta \mathbf{I}$ e a condição de persistência de excitação é satisfeita. Desta forma, o sistema parametrizado (3.28) é λ-UGES, e o correspondente sistema não linear (3.27) é exponencialmente estável no domínio $\mathcal{D}_q$. □

Observador de Posição

Neste observador a utilização da medida directa da velocidade angular não é possível devido à presença de polarizações na leitura dos giroscópios. Por conseguinte, é necessário utilizar uma estimativa de $\bar{\boldsymbol{\omega}}$, definida como

$$\boldsymbol{\omega}^* := \boldsymbol{\omega}_{sensor} - \hat{\mathbf{b}}_\omega = \bar{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\mathbf{b}}_\omega. \tag{3.29}$$

Embora a dinâmica de atitude se tenha alterado devido à introdução da polarização nos giroscópios, as leis de retroacção de posição e velocidade podem ser idênticas

$$\mathbf{s}_p = -K_p\left(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathcal{R}}^{TL}\bar{\mathbf{p}}\right),\ K_p > 0 \tag{3.30}$$

$$\mathbf{s}_v = -K_v\left(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathcal{R}}^{TL}\bar{\mathbf{p}}\right),\ K_v > 0, \tag{3.31}$$

Utilizando as equações (3.4), (3.5), (3.30), (3.31), e a definição (3.29), obtém-se a seguinte dinâmica para os erros de estimação de posição e velocidade

$$\dot{\tilde{\mathbf{p}}} = \tilde{\mathbf{v}} - (\boldsymbol{\omega}^*)^\wedge\tilde{\mathbf{p}} + (\tilde{\mathbf{b}}_\omega)^\wedge\bar{\mathbf{p}} - K_p\left(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathcal{R}}^{TL}\bar{\mathbf{p}}\right) \tag{3.32}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = (\hat{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}})^{T\ L}\bar{\mathbf{g}} - (\boldsymbol{\omega}^*)^\wedge\tilde{\mathbf{v}} + (\tilde{\mathbf{b}}_\omega)^\wedge\bar{\mathbf{v}} - K_v\left(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathcal{R}}^{TL}\bar{\mathbf{p}}\right). \tag{3.33}$$

De seguida considera-se a versão do Teorema 6 para o caso com polarizações nos giroscópios, Teorema 8, o qual vai permitir concluir acerca da estabilidade exponencial dos erros de posição e velocidade.

Pressuposto 3. *Para qualquer $\gamma_v > 0$, existe $k_v > 0$, tal que a velocidade do veículo satisfaz*

$$\|\mathbf{v}(t)\| \leq k_v e^{\gamma_v(t-t_0)}.$$

À semelhança do Pressuposto 2, este pressuposto, na prática, também não é limitativo por razões semelhantes.

Teorema 8. *Assuma-se que se verificam o Pressuposto 2, o Pressuposto 3, e as condições do Teorema 7. Então os erros de estimação convergem exponencialmente rápido para o ponto de equilíbrio $(\tilde{\mathcal{R}}, \tilde{\mathbf{b}}_\omega, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{v}}) = (\mathbf{I}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ para qualquer condição inicial que satisfaça (3.26) e $(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{v}}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Ainda, se $\mathcal{R}$ e $\mathbf{b}_\omega$ forem grandezas conhecidas, a origem de (3.32,3.33) é globalmente exponencialmente estável.*

Demonstração. Note-se que $\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathcal{R}}^{TL}\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{p}} + \mathcal{R}^T\left(\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{R}}^T\right)\mathcal{R}\mathbf{p}$, e considere-se a transformação de Lyapunov $\mathcal{R}^*$ aplicada às grandezas $\tilde{\mathbf{p}}$, e $\tilde{\mathbf{v}}$, onde $\dot{\mathcal{R}}^* = \mathcal{R}^*(\boldsymbol{\omega}^*)^\wedge$. A dinâmica do sistema transformado é dada por

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{R}^*\tilde{\mathbf{p}}) = \mathcal{R}^*\tilde{\mathbf{v}} - K_p\mathcal{R}^*\tilde{\mathbf{p}} + \mathcal{R}^*\tilde{\mathbf{b}}_\omega\mathbf{p} - K_p\mathcal{R}^*\mathcal{R}^T\left(\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{R}}\right)\mathcal{R}\mathbf{p} \tag{3.34}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{R}^*\tilde{\mathbf{v}}) = \mathcal{R}^*\left(\tilde{\mathcal{R}}^T - \mathbf{I}\right)^L\tilde{\mathbf{g}} - K_v\mathcal{R}^*\tilde{\mathbf{p}} + \mathcal{R}^*\tilde{\mathbf{b}}_\omega\mathbf{v} - K_v\mathcal{R}^*\mathcal{R}^T\left(\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{R}}\right)\mathcal{R}\mathbf{p}, \tag{3.35}$$

que pode ser rescrito em forma matricial como

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = A\boldsymbol{\xi} + \mathbf{u} \tag{3.36}$$

onde $\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{R}^* \end{bmatrix}\mathbf{x}$, with $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}^T & \tilde{\mathbf{v}}^T \end{bmatrix}^T$, $A = \begin{bmatrix} -K_p\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -K_v\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, e $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}^*\tilde{\mathbf{b}}_\omega\mathbf{p} - K_p\mathcal{R}^*\mathcal{R}^T(\mathbf{I}-\tilde{\mathcal{R}})\mathcal{R}\mathbf{p} \\ \mathcal{R}^*\tilde{\mathbf{b}}_\omega\mathbf{v} - K_v\mathcal{R}^*\mathcal{R}^T(\mathbf{I}-\tilde{\mathcal{R}})\mathcal{R}\mathbf{p} + \mathcal{R}^*(\hat{\mathcal{R}}-\mathcal{R})^T{}^L\bar{\mathbf{g}} \end{bmatrix}$. O sistema (3.36) é linear e invariante no tempo e para $K_p > 0$ e $K_v > 0$ a matriz A é Hurwitz, e portanto o sistema é estável.

Pelo Teorema 7 sabe-se que para K_{b_ω} suficientemente elevado, existem $k_\mathcal{R}, k_b, \gamma_\mathcal{R}, \gamma_b > 0$ tal que

$$\left\|\tilde{\mathcal{R}}(t) - \mathbf{I}\right\| \leq k_\mathcal{R}\left\|\tilde{\mathcal{R}}(t_0) - \mathbf{I}\right\| e^{-\gamma_\mathcal{R}(t-t_0)}$$
$$\left\|\tilde{\mathbf{b}}_\omega(t)\right\| \leq k_b\left\|\tilde{\mathbf{b}_\omega}(t_0)\right\| e^{-\gamma_b(t-t_0)}.$$

O vector de entrada $\|\mathbf{u}\|$ verifica a seguinte inequação

$$\|\mathbf{u}\| \leq \|\tilde{\mathbf{b}}_\omega\|\left(\|\mathbf{p}\| + \|\mathbf{v}\|\right) + \left\|\tilde{\mathcal{R}} - \mathbf{I}\right\|\left((K_p + K_v)\|\mathbf{p}\| + \|{}^L\bar{\mathbf{g}}\|\right).$$

Tirando partido do facto que $\|\bar{\mathbf{p}}(t)\|$ e $\|\bar{\mathbf{v}}(t)\|$ verificam respectivamente o Pressuposto 2 e o Pressuposto 3, mostra-se que

$$\|\mathbf{u}(t)\| \leq k_u e^{-\gamma_u(t-t_0)},$$

onde

$$\begin{aligned} k_u &= 2\max\left\{k_b\max\{k_p, k_v\}\|\tilde{\mathbf{b}}_\omega(t_0)\|, k_\mathcal{R}\max\{(K_p + K_v)k_p, \|{}^L\bar{\mathbf{g}}\|\}\|\tilde{\mathcal{R}} - \mathbf{I}(t_0)\|\right\} \\ \gamma_u &= \min\left\{\gamma_b - \max\left\{\gamma_p, \gamma_v\right\}, \gamma_\mathcal{R} - \gamma_p\right\}, \end{aligned}$$

que é positivo porque os valores de γ_p e de γ_v podem ser tão reduzidos quanto se queira pelo Pressuposto 2 e pelo Pressuposto 3. O estado transformado $\boldsymbol{\xi}(t)$ verifica

$$\|\boldsymbol{\xi}(t)\| = e^{A(t-t_0)}\|\boldsymbol{\xi}(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

e por [36] a estabilidade da origem implica que existem $k_a, \gamma_a > 0$ tal que $\|e^{At}\| \leq k_a e^{-\gamma_a t}$, e por conseguinte a seguinte inequação é verificada

$$\|\boldsymbol{\xi}(t)\| \leq 2\max\left\{k_a\|\boldsymbol{\xi}(t_0)\|, \frac{k_a k_u}{|\gamma_a - \gamma_u|}\right\} e^{-\min\{\gamma_u, \gamma_a\}(t-t_0)}.$$

Concatenando o erro de atitude e o estado transformado como $\mathbf{x}_f := \left(\tilde{\mathcal{R}} - \mathbf{I}, \tilde{\mathbf{b}}_\omega, \boldsymbol{\xi}\right)$ e aplicando as desigualdades $\|\mathbf{x}_f\| \leq \|\tilde{\mathcal{R}} - \mathbf{I}\| + \|\tilde{\mathbf{b}}_\omega\| + \|\boldsymbol{\xi}\|$ e $\max\{\|\tilde{\mathcal{R}} - \mathbf{I}\|, \|\tilde{\mathbf{b}}_\omega\|, \|\boldsymbol{\xi}\|\} \leq \|\mathbf{x}_f\|$, um limite superior exponencial é dado por

$$\|\mathbf{x}_f(t)\| \leq k_{\max}\|\mathbf{x}_f(t_0)\| e^{-\gamma_{\min}(t-t_0)},$$

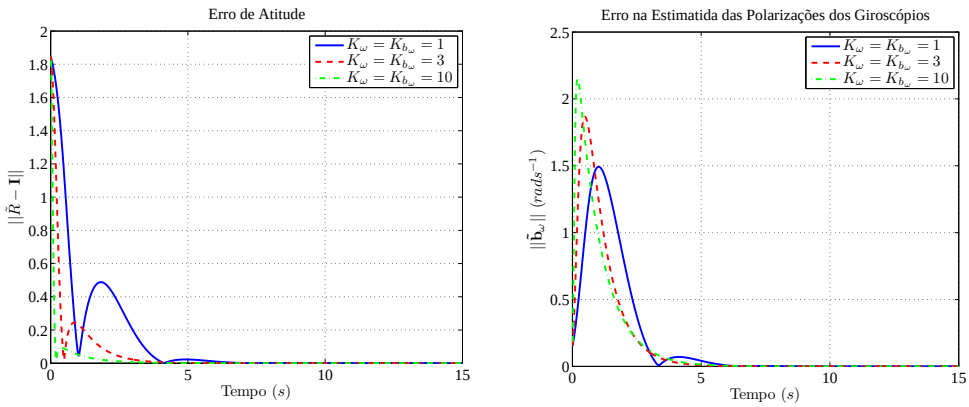
onde

$$\begin{aligned} k_{\max} &= 3\max\left\{k_\mathcal{R}, k_b, 2k_a, \frac{8k_a k_b\max\left\{k_p, k_v\right\}}{|\gamma_a - \gamma_u|}, \frac{8k_a k_\mathcal{R}\max\left\{(K_p, K_v)k_p, \|{}^L\bar{\mathbf{g}}\|\right\}}{|\gamma_a - \gamma_u|}\right\} \\ \gamma_{min} &= \min\left\{\gamma_a, \gamma_b - \max\left\{\gamma_p, \gamma_v\right\}, \gamma_\mathcal{R} - \gamma_p\right\} \end{aligned}$$

Então, as trajectórias do sistema (3.25,3.36) convergem exponencialmente rápido para a origem. O facto que $\|\boldsymbol{\xi}(t)\| = \|\mathbf{x}(t)\|$ implica a convergência exponencial do observador em cascata (3.25,3.36).

Se $\mathcal{R}$ e $\mathbf{b}_\omega$ forem conhecidos, então $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ e a origem de (3.36) é globalmente exponencialmente estável pelas propriedades dos sistemas lineares e invariantes no tempo. □

Simulações



(a) Erro de Atitude

(b) Estimativa de polarizações

Figura 3.8: Simulação da evolução do erro de atitude e estimativa das polarizações nos giroscópios.

À semelhança do que foi efectuado para o observador que não considera polarizações nos giroscópios, também para este observador foi realizada uma simulação do seu funcionamento. As condições iniciais podem ser encontradas na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Erros inicias das simulações.

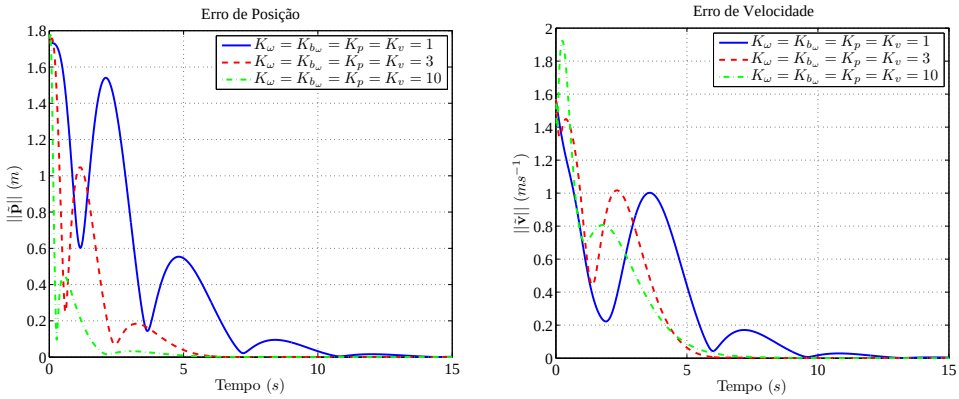
Grandeza	Erros Iniciais
$\theta(t_0)$	$\frac{\pi}{180}135\ (rad)$
$\tilde{\mathbf{b}}_\omega(t_0)$	$\frac{\pi}{180}[-5\ \ -5\ \ -5]^T\ (rads^{-1})$
$\tilde{\mathbf{p}}(t_0)$	$[-1\ 1\ 1]^T\ (m)$
$\tilde{\mathbf{v}}(t_0)$	$[-0,5\ 0\ 0,1]^T\ (ms^{-1})$

As posições dos emissores de ultra-sons também são iguais. Os ganhos do observador utilizados nesta simulação são também: $K_p = K_v = K_\omega = K_{b_\omega} = 1$, $K_p = K_v = K_\omega = K_{b_\omega} = 3$ e $K_p = K_v = K_\omega =$

$K_{b_\omega} = 10$. É de notar que estes ganhos satisfazem a condição de convergência (3.26)

$$\frac{\frac{1}{K_{b_\omega}}\|\tilde{\mathbf{b}}_\omega(t_0)\|^2}{4(1+\cos(\theta(t_0)))} \approx 0.0195 < 1,\ K_{b_\omega} = 1$$
$$\frac{\frac{1}{K_{b_\omega}}\|\tilde{\mathbf{b}}_\omega(t_0)\|^2}{4(1+\cos(\theta(t_0)))} \approx 0.0065 < 1,\ K_{b_\omega} = 3$$
$$\frac{\frac{1}{K_{b_\omega}}\|\tilde{\mathbf{b}}_\omega(t_0)\|^2}{4(1+\cos(\theta(t_0)))} \approx 0.0020 < 1,\ K_{b_\omega} = 10,$$

e que $\bar{\mathbf{p}}(t)$ e $\bar{\mathbf{v}}(t)$ respeitam o Pressuposto 2 e o Pressuposto 3, respectivamente.



(a) Erro de Posição

(b) Erro de Velocidade

Figura 3.9: Simulação da evolução do erro de posição e de velocidade do observador que considera polarizações nos giroscópios.

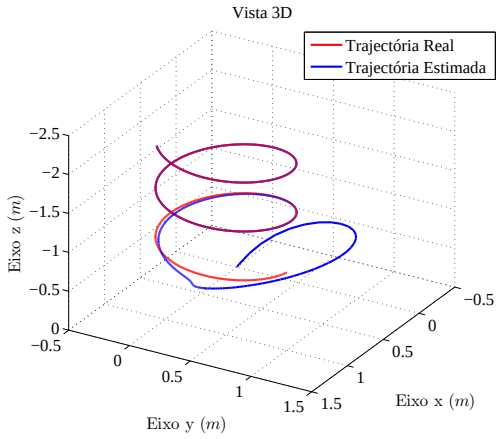


Figura 3.10: Trajectórias real e estimada quando os ganhos do observador são: $K_\omega = K_p = K_v = 10$.

Nos gráficos das Figuras 3.8(a), 3.9(a), 3.9(a) constata-se a convergência dos erros para a origem. O gráfico da Figura 3.8(b) mostra a evolução da estimativa das polarizações dos giroscópios para os valores reais. Por existir mais um estado desconhecido, verifica-se que a convergência dos erros de atitude é mais lenta do que nas simulações do observador que não considera polarizações nos

giroscópios. As trajectórias real e estimada para os ganhos mais elevados em três dimensões, são apresentadas na Figura 3.10.

3.4 A Lei de Retroacção e as Leituras dos Sensores

Uma grande virtude dos dois observadores derivados, é o facto dos termos de retroacção poderem ser escritos como funções explicitas das leituras dos sensores. Para ambos os observadores de posição os termos de retroacção são dados por

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_p &= -K_p\left(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathcal{R}}^{TL}\bar{\mathbf{p}}\right)\\ \mathbf{s}_v &= -K_v\left(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathcal{R}}^{TL}\bar{\mathbf{p}}\right).\end{aligned}$$

No observador de atitude, que não considera a existência de polarizações nas leituras dos giroscópios, o termo de retroacção é dado por

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}_{sensor} - K_\omega \mathbf{s}_\omega,$$

e para o observador que considera as polarizações é dado por

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}_{sensor} - \hat{\mathbf{b}}_\omega - K_\omega \mathbf{s}_\omega.$$

O vector ${}^L\bar{\mathbf{p}}$ é obtido directamente pelo método de interpolação esférica, considerando o problema inverso de obter a posição dos receptores no referencial $\{\mathbf{L}\}$ a partir da medida das distâncias aos emissores de ultra-sons.

A dependência de $\mathbf{s}_\omega$, das leituras dos sensores, foi derivada em [16]. Caso $\mathrm{rank}(\mathbf{X}) \geq 3$

$$\mathbf{s}_\omega = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\mathcal{R}}^T\mathbf{X}\mathbf{D}_X\mathbf{A}_X\mathbf{e}_i\right)\times\left(\bar{\mathbf{B}}\mathbf{D}_X\mathbf{A}_X\mathbf{e}_i\right), \tag{3.37}$$

com $\mathbf{A}_X$ tal que $\mathbf{U}_X\mathbf{U}_X^T = \mathbf{I}$, $\mathbf{U}_X = \bar{\mathcal{R}}\bar{\mathbf{U}}\mathbf{D}_X\mathbf{A}_X$. E caso $\mathrm{rank}(\mathbf{X}) = 2$

$$\mathbf{s}_\omega = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\mathcal{R}}^T\mathbf{H}_a\mathbf{A}_{Xa}\mathbf{e}_i\right)\times\left(\bar{\mathbf{B}}_a\mathbf{A}_{Xa}\mathbf{e}_i\right), \tag{3.38}$$

em que $\mathbf{e}_i$ é o vector unitário de cada eixo, e

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_a &= \left[\mathbf{X}\mathbf{D}_X\ \mathbf{X}\mathbf{D}_X\mathbf{e}_i \times \mathbf{X}\mathbf{D}_X\mathbf{e}_j\right],\ i \neq j\\ \bar{\mathbf{B}}_a &= \left[\bar{\mathbf{B}}\mathbf{D}_X\ \bar{\mathbf{B}}\mathbf{D}_X\mathbf{e}_i \times \bar{\mathbf{B}}\mathbf{D}_X\mathbf{e}_j\right],\ i \neq j,\end{aligned}$$

e $\mathbf{A}_{Xa}$ é tal que $\mathbf{U}_{Xa}\mathbf{U}_{Xa}^T = \mathbf{I}$, com

$$\mathbf{U}_{Xa} := \mathbf{H}_a\mathbf{A}_{Xa}.$$

3.5 Comentários Finais

Neste capítulo foram apresentados dois observadores não lineares para a estimação de atitude, posição linear, velocidade angular e velocidade linear a partir de medidas de atitude, posição linear,

velocidade angular e aceleração, com aplicação a veículos que se movem em três dimensões. A principal diferença entre as soluções apresentadas consiste na estimação da polarização nos giroscópios realizada pelo segundo observador. Embora os giroscópios possam ser calibrados, a calibração pode deixar de ser válida em utilizações posteriores, para além de poder variar muito lentamente durante a operação. Com efeito, as polarizações nos giroscópios dependem das condições envolventes, nomeadamente da temperatura. O segundo observador não sofre destes problemas pois foi projectado para rejeitar esta perturbação, assumida constante durante a fase de projecto.

Além da dedução e demonstração formal das propriedades das soluções apresentadas, foram também realizadas simulações que permitem ilustrar o funcionamento dos observadores.

Outra grande virtude destes observadores decorre do facto das leis de retroacção serem funções explicitas apenas dos estados do observador e das leituras dos sensores. Evita-se assim aproximações e estimativas feitas em paralelo, não contabilizadas no projecto dos observadores e que podendo degradar o seu desempenho, comprometeriam as provas formais das propriedades das soluções apresentadas.

Capítulo 4

Aproximação em Tempo Discreto de Sistemas Dinâmicos em Tempo Contínuo

4.1 Descrição Geral

Neste capítulo apresentam-se sucintamente alguns métodos para discretizar sistemas lineares e invariantes no tempo (SLITs) e a aplicação de resultados recentes da teoria da análise numérica para obter aproximações em tempo discreto de sistemas não lineares em $\mathbb{R}^3$ e $\mathrm{SO}(3)$.

Um sistema dinâmico é um modelo matemático, ou abstracção da realidade, que descreve de forma determinística, a evolução de uma ou mais variáveis ao longo do tempo. Os sistemas dinâmicos podem ser ainda, em tempo contínuo, quando a evolução do estado se dá continuamente ao longo do tempo; ou em tempo discreto, quando a evolução se dá em instantes espaçados temporalmente, usualmente equi-espaçados.

Uma grande parte dos sistemas dinâmicos em tempo contínuo são descritos por equações diferenciais. Fazem parte deste grande grupo, entre outros, sistemas eléctricos, mecânicos, da meteorologia, e até biológicos. Estes sistemas, regidos por equações diferenciais, não são susceptíveis de serem implementados computacionalmente de forma exacta. Surge então a questão de saber qual será o sistema em tempo discreto que possui características mais próximas das do sistema em tempo contínuo nos instantes de amostragem. Se por um lado, para a discretização dos SLITs existe um corpo teórico bastante sólido, para os sistemas não lineares o mesmo já não acontece. Os sistemas não lineares apresentam neste domínio, uma imensidão de questões em aberto, como seja, o facto do seu espaço de estados poder estar contido em variedades (*manifolds* na literatura anglo-saxónica) diferentes de $\mathbb{R}^n$, como por exemplo em $\mathrm{SO}(3)$, não podendo nas suas aproximações ser utilizados os métodos clássicos desenvolvidos para a integração de equações diferenciais.

4.2 Discretização de SLITs Contínuos

Um SLIT é um sistema que possui as propriedades da linearidade e da invariância temporal. Chama-se *linear* a um sistema em que é válido o princípio da sobreposição. Isto é, se y_1 e y_2 forem a resposta dos sistema às entradas x_1 e x_2, respectivamente, então a saída do sistema quando a entrada for x_1+x_2, será y_1+y_2, e quando a entrada for αx_1 a saída será αy_1, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Um sistema é invariante no tempo quando a uma translação no tempo do sinal de entrada, corresponde uma translação no tempo do sinal de saída.

Quando estes sistemas em tempo contínuo são de Entrada-Única Saída-Única (*Single-Input Single-Output* na literatura anglo-saxónica (SISO)) podem ser escritos na forma geral

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + ... + a_0 y(t) \;=\; b_m\frac{d^m}{dt^m}r(t) + b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}r(t) + ... + b_0 r(t). \tag{4.1}$$

Uma das principais ferramentas na representação de SLITs contínuos é a *função de transferência*, que recorre à teoria das Transformadas de Laplace para sistemas causais (isto é quando a sua saída só depende do estado inicial e das entradas passadas). Realizando o quociente da Transformada de Laplace da saída (considerando condições iniciais nulas), $Y(s)$, pela a Transformada de Laplace da entrada, $U(s)$, obtém-se então a função de transferência do SLIT, $G(s)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + ... + a_1 s + a_0}.$$

Um sistema dinâmico representado por $G(s)$, é estável quando os seus pólos (raízes do denominador) se localizam no semiplano complexo esquerdo, e é criticamente estável quando se localizam sobre o eixo $Re\{s\} = 0$ e são simples.

À semelhança dos SLITs SISO contínuos, também os SLITs SISO discretos, que podem ser descritos de forma geral recorrendo a uma equação às diferenças

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + ... + a_n y_{k-n} = b_0 r_k + b_1 r_{k-1} + ... + b_m r_{k-m},$$

a qual pode representada por uma *função de transferência* obtida pela aplicação da Transformada-*z*. Para $n \geq m$, realizando mais uma vez o quociente da transformada da saída sobre a transformada da entrada (considerando entrada iniciais nulas), obtém-se a função de transferência

$$G_d(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + ... + b_m z^{n-m}}{z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1}z + a_0}.$$

Um sistema $G_d(z)$ é estável quando os seus pólos se localizam no interior do círculo unitário e criticamente estável quando estes correspondem a raízes simples e se encontram sobre o círculo unitário.

Mais detalhes sobre sistemas lineares podem sem encontrados em [35], [41] e [42]. Em seguida apresentam-se brevemente algumas técnicas de discretização destes sistemas

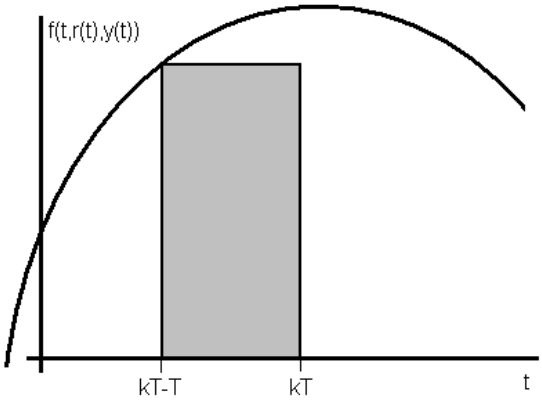


Figura 4.1: Método *Euler Explícito*

4.2.1 Integração Numérica

A análise numérica fornece várias técnicas alternativas de realizar a discretização de sistemas dinâmicos em tempo contínuo permitindo alguns deles dar origem a formas fechadas em tempo discreto. Alguns métodos mais simples são o *Euler Explícito*, *Euler Implícito*, e a *Regra Trapezoidal*.

O método de *Euler Explícito* consiste em transformar o integral em tempo contínuo num somatório de rectângulos, com o período de amostragem como largura, e o valor da derivada no instante anterior como altura.

Considerando o sistema

$$\frac{d}{dt}y(t) = \dot{y}(t) = f(t, r(t), y(t)), \tag{4.2}$$

e aplicando este método obtém-se

$$y(kT) \approx y(kT - T) + T f(kT - T, r(kT - T), y(kT - T)),$$

em que T é o período de amostragem. A Figura 4.1 ilustra graficamente este método. O método de *Euler Implícito* surge da utilização do valor da derivada em kT em vez de ser em $kT - T$. Este método é mais estável que o anterior [43, pag. 490], e aplicando-o ao sistema (4.2), obtém-se

$$y(kT) \approx y(kT - T) + T f(kT, r(kT), y(kT)).$$

Note-se que esta equação, é em geral implícita, e necessita ser resolvida com recurso a métodos iterativos. Um caso importante em que a equação não é implícita, é quando o sistema em tempo contínuo é linear. Este método é ilustrado na Figura 4.2.

O terceiro método é a *Regra Trapezoidal* e consiste na média dos dois métodos anteriores. Neste método o integral é substituído pelo somatório dos trapézios com o período de amostragem como largura e com o lado superior definido pela recta que une o valor da derivada em $kT - T$ com o da derivada em kT, tal como ilustrado na Figura 4.3. O sistema contínuo (4.2) após a discretização pela

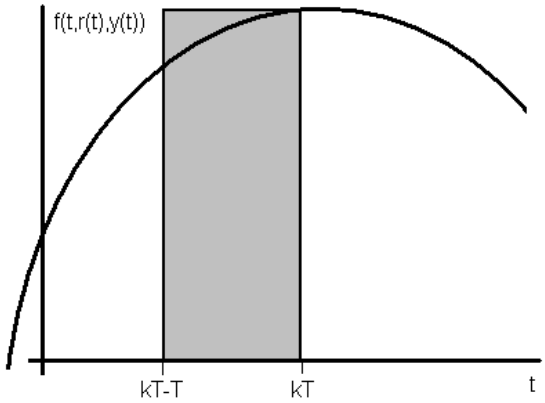


Figura 4.2: Método *Euler Implícito*

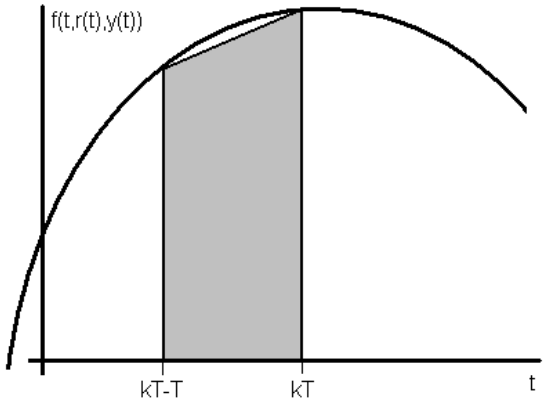


Figura 4.3: *Regra Trapezoidal*

Regra Trapezoidal fica

$$y(kT) \approx y(kT-T) + \frac{T}{2}[f(kT-T, r(kT-T), y(kT-T)) + f(kT, r(kT), y(kT))].$$

Este método também é conhecido por *Método Bilinear ou de Tustin*.

Existe uma relação explicita entre a função de transferência contínua e discreta para cada uma destas técnicas de discretização. Para obter a função de transferência $G_d(z)$ através da função de transferência *G(s)*, substitui-se a variável *s*, pelas transformações apresentadas na Tabela 4.1.

É ainda interessante observar com o semiplano complexo esquerdo da variável da transformada de Laplace, *s*, é mapeado para o plano-*z*, quando se realiza a discretização aplicando cada um dos métodos anteriormente apresentados. A Figura 4.4 mostra que a discretização *Euler Explícito* pode conduzir um sistema que em tempo contínuo é estável, a ser instável após a discretização, isto já não acontece com as duas outras técnicas. É também importante notar que a *Regra Trapezoidal* mapeia exactamente a metade estável do plano-*s* no interior do círculo unitário no plano-*z*

Tabela 4.1: Mapeamento $s \rightarrow z$

Método	Transformação
Euler Explícito	$s = \frac{z-1}{T}$
Euler Implícito	$s = \frac{z-1}{Tz}$
Regra Trapezoidal	$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$

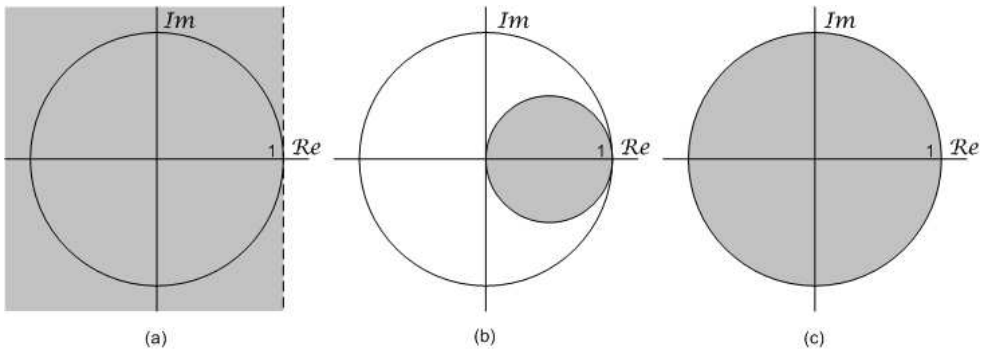


Figura 4.4: Mapeamento da metade estável do plano-*s* (cor cinzento) para o plano-*z* realizado por cada um dos métodos de integração. (a) *Euler Explícito*. (b) *Euler Implícito*. (c) *Regra Trapezoidal.*

4.2.2 Mapeamento Pólos-Zeros

Uma técnica alternativa para determinar um equivalente discreto de um sistema contínuo trata-se do mapeamento pólos-zeros. Esta técnica baseia-se no facto dos pólos da Transformada-*z* de um sinal amostrado, estarem relacionados com os pólos da Transformada-*s*, de acordo com $z = e^{sT}$, e assume que este mapeamento, pode ser aplicado também aos zeros, aproximadamente. A sua principal vantagem consiste na simplicidade. O mapeamento Pólos-Zeros consiste num conjunto de regras para calcular a localização dos pólos e dos zeros e determinar o ganho da função de transferência discreta $G_d(z)$.

As regras são as seguintes [44, pag. 620]:

1. Os pólos de *G(s)* são mapeados de acordo com $z = e^{sT}$.

2. Os zeros são mapeados respeitando $z = e^{sT}$.

3. Se o numerador de *G(s)*, for de ordem superior ao denominador, adicionar potências de $(1 + z^{-1})$ ao numerador, até o numerador e denominador possuírem igual ordem.

4. Tipicamente escolhe-se o *ganho* tal que

$$G(s)|_{s=0} = G_d(z)|_{z=1}.$$

4.2.3 Retentores

A ideia por detrás desta técnica é começar por amostrar o sinal de entrada $u(t)$, usando em seguida sobre o sinal amostrado um retentor de ordem zero (ZOH), e fazer do sinal resultante entrada do sistema $G(s)$. A Figura 4.5 esquematiza este processo.
O equivalente discreto $G(z)$ é dado por

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\},$$

em que $\mathcal{Z}\{F(s)\}$ representa a Transformada-*z* da *Transformada de Laplace Inversa* do sistema $F(s)$. Mais informações sobre esta e outras técnicas envolvendo retentores poderão ser encontradas em [45].

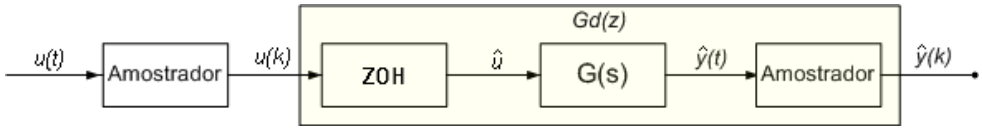


Figura 4.5: Diagrama de blocos que mostra a construção realizada para obter um sistema discreto a partir de retentores de ordem zero

Todas as técnicas apresentadas, excepto o *Método Euler Explícito*, dão origem a sistemas estáveis quando são aplicadas a sistemas contínuos estáveis [45]. Para o leitor interessado, as técnicas de discretização para sistemas lineares em tempo contínuo encontram-se mais desenvolvidas em [44] e [45].

4.3 Aproximações em Tempo Discreto de Sistemas Não-Lineares

Os sistemas não-lineares apresentam, em geral, uma maior complexidade e comportamentos mais ricos quando comparados com os sistemas lineares. Muitas das ferramentas utilizadas na análise de sistemas lineares, quer em tempo contínuo, quer em tempo discreto, não são válidas para os sistemas não-lineares. Exemplo disso são as *Transformada de Laplace* e *Transformada-z* que são de grande utilidade na análise das diferentes técnicas de discretização. Por estas razões a teoria da discretização de sistemas não lineares encontra-se numa fase mais prematura de desenvolvimento, não existindo na maior parte dos casos equivalentes explícitos discretos de sistemas contínuos.

À semelhança do que acontece com os sistemas lineares, uma técnica possível para obter uma aproximação em tempo discreto para os sistemas não lineares, é a integração numérica, para a qual existe uma teoria sólida que tem vindo a ser desenvolvida pelo ramo da matemática da análise numérica. É no entanto importante referir que devido à sua riqueza de comportamentos, em geral, para estes sistemas, é necessário utilizar métodos de ordem superior para obter resultados satisfatórios.

Outra questão relacionada com a integração numérica de sistemas não lineares, é quando as suas variáveis de estado estão contidas noutras variedades que não $\mathbb{R}^n$, exemplo disso é a equação que

rege a dinâmica de atitude do corpo rígido, cuja variável derivada, pertence ao grupo $\mathrm{SO}(3)$. Para estes sistemas é necessário encontrar métodos que preservem as características deste grupo, isto é que garantam que as variáveis não saem da variedade por aplicação do método de integração.

4.3.1 Integração Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias em $\mathbb{R}^3$

Como se viu as equações diferenciais ordinárias possuem grande importância pois modelam grande número de eventos e fenómenos. Muitas vezes não é possível obter uma solução analítica, e então a integração numérica preocupa-se com a obtenção de soluções numéricas para estas equações. Uma equação diferencial ordinária pode ser posta na forma

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \tag{4.3}$$

em que a quantidade x pode ser um escalar ou um vector. Em geral, esta equação pode não ter solução única, sendo necessário conhecer mais uma condição para poder obter uma solução singular, geralmente o valor inicial,

$$x(t_0) = x_0. \tag{4.4}$$

O problema formado por (4.3) e (4.4) é conhecido como *problema do valor inicial*.

Existem vários métodos que permitem obter soluções aproximadas de equações diferenciais ordinárias (EDOs). Alguns dos mais comuns são o *Euler Explícito*, o *Euler Implícito*, *Runge-Kutta Explícitos*, *Runge-Kutta Implícitos*, *Adams-Bashford* e *Adams-Moulton*. Os métodos *Euler Explícito e Implícito*, já foram abordados a propósito da integração numérica de sistemas dinâmicos lineares. Quando estes métodos são aplicados a sistemas não lineares já não se pode realizar a análise do resultado destes métodos recorrendo a técnicas simples como as transformadas de Laplace e *z*. Note-se que o método *Euler Implícito*, no caso de $f(t, x(t))$ ser não linear, dá origem a uma equação implícita, que terá de ser resolvida iterativamente, recorrendo por exemplo, ao método do *ponto fixo*.

A família de métodos de *Runge-Kutta* surge com o objectivo de utilizar as derivadas de *f* para obter uma melhor aproximação. Mas como o cálculo destas derivadas pode ser computacionalmente complexo, estas são aproximadas por diferenças finitas como,

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{kT} \approx \frac{f_{kT} - f_{kT+T}}{T}, \qquad f_{kT} = f(kT, x(kT)),$$

onde T é o período de amostragem. Os métodos de *Runge-Kutta* são designados métodos de *passo-simples* e realizam em cada passo, dependendo da sua ordem, uma ou mais avaliações da função

$f(t, x(t))$. Esta família contém métodos de várias ordens, sendo a sua forma geral dada por [4]

$$x(kT) = x(kT - T) + T \sum_{j=1}^{s} b_j F_j,$$

$$T_j = kT - T + c_j T,$$

$$U_j = x(kT - T) + T \sum_{m=1}^{s} \alpha_{jm} F_m,$$

$$F_j = f(T_j, U_j).$$

O *Quadro de Butcher*

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1s} \\ c_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & \alpha_{s1} & \alpha_{s2} & \cdots & \alpha_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array}$$

mostra uma forma útil de organizar os coeficientes c_i, α_{ij} e b_j, sendo que os métodos são explícitos se a matriz formada pelos coeficientes α_{ij} for estritamente triangular inferior, e implícitos caso contrário. O método *Runge-Kutta* de primeira ordem apresenta todos os coeficientes nulos excepto b_1 que é igual à unidade, este método não é mais do que o método *Euler Explícito*.

Nos métodos de passo simples $x(kT)$, é calculado a partir de valores de $f(t, x(t))$ apenas no intervalo $[kT - T\ kT]$, contudo é possível que já tenham sido calculados vários valores de $f(t, x(t))$ para instantes anteriores. Os métodos seguintes designam-se de *multi-passo*, a ideia do seu desenvolvimento consiste em aproveitar estes valores já calculados para obter um polinómio interpolador de $f(t, x(t))$ e assim obter uma melhor aproximação.

Os métodos *Adams-Bashford* utilizam um polinómio interpolador de grau m, com os nós $kT - T - mT$, ..., $kT - T$ para integrar $f(t, x(t))$ entre $kT - T$ e kT. Estes métodos são explícitos e têm a forma geral [4]

$$x(kT) = x(kT - T) + \frac{T}{\beta_m} \sum_{j=0}^{m} (\alpha_{mj} f_{kT-T-jT}).$$

A Tabela 4.2 sintetiza alguns coeficientes relativos a este método.

Como referido em [4], o erro da interpolação polinomial aumenta muito rapidamente fora do intervalo de interpolação, e é de esperar que este facto prejudique os métodos *Adams-Bashford*. A ideia dos métodos *Adams-Moulton* consiste em utilizar para além dos valores de $f(t, x(t))$ nos instantes anteriores a kT utilizar também o seu valor em kT. Os métodos *Adams-Moulton* são portanto implícitos. A forma geral destes métodos é [4]

$$x(kT) = x(kT - T) + \frac{T}{\beta_m} \sum_{j=0}^{m} (\alpha_{mj} f_{kT-jT}).$$

A Tabela 4.3 resume algum valores relacionados com este método.

Tabela 4.2: Quadro com vários coeficientes dos métodos *Adams-Bashford* (adaptada de [4]).

m	β_m	α_{m0}	α_{m1}	α_{m2}	α_{m3}	α_{m4}	α_{m5}
0	1	1					
1	2	3	-1				
2	12	23	-16	5			
3	24	55	-54	37	-9		
4	720	1901	-2774	2616	-1274	251	
5	1440	4277	-7923	9982	-7298	2877	-475

Tabela 4.3: Quadro com vários coeficientes dos métodos *Adams-Mouton* (adaptada de [4]).

m	β_m	α_{m0}	α_{m1}	α_{m2}	α_{m3}	α_{m4}	α_{m5}
0	1	1					
1	2	1	1				
2	12	5	8	-1			
3	24	9	19	-5	1		
4	720	251	646	-264	106	-19	
5	1440	475	1427	-798	482	-173	27

Os métodos multi-passo necessitam dos valores de $f_{kT-T-mT}$, $f_{kT-T-(m-1)T}$, $f_{kT-T-(m-2)T}$,... . Como no início da integração estes valores não estão disponíveis, eles terão de ser fornecidos por algum método auxiliar que deverá ser de passo simples, como um método de Runge-Kutta. Neste sentido, é usual dizer que os métodos de passo múltiplo não são auto-iniciáveis. Esta desvantagem é compensada pelo facto de apenas necessitarem de um cálculo de f por passo, pois os restantes valores são aproveitados dos passos anteriores.

4.3.2 Integração Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias no Grupo $\mathbf{SO(3)}$

As soluções de muitos sistemas regidos por equações diferenciais ordinárias possuem determinadas características, ou propriedades que são constantes no tempo. Exemplo disso são sistemas mecânicos conservativos que preservam a energia, sistemas que preservam o momento angular e linear ou até mesmo o movimento do pêndulo gravítico, que está restringido a um círculo. Os algoritmos gerais de integração numérica não foram desenhados para ter em conta estas restrições, e portanto em geral não as preservam. Por exemplo, ao aplicarmos um destes algoritmos ao movimento do pêndulo, pode acontecer que a distância ao centro de rotação varie, o que não é fisicamente possível.

Não é possível um método *Runge-Kutta*, integrar numericamente a equação da dinâmica de atitude (2.4), preservando as propriedades (2.1) e (2.2). De facto, mostra-se que nenhum destes métodos

pode conservar invariantes polinomiais, como no caso do determinante, com grau n, com $n \geq 3$ [46, Teorema IV.3.3].

Para contornar esta questão existe a possibilidade de parametrizar a matriz de rotação. As duas parametrizações mais comuns são a representação por *ângulos de Euler* e representação por *quaterniões*. A representação por *ângulos de Euler* é constituída apenas por três parâmetros independentes, mas sofre de singularidades. A representação por *quaterniões* já não sofre de singularidades, mas à custa de um parâmetro extra e de uma restrição na norma do quaternião. Integrações numéricas realizadas sobre a representação em *quaterniões*, necessitam de efectuar em cada passo a normalização do quaternião.

De forma a obviar estes inconvenientes foram desenvolvidos recentemente um conjunto de métodos que permitem preservar algumas das propriedades das funções a integrar. Em seguida, apresentam-se três algoritmos desenvolvidos para grupos de Lie e equações diferenciais com forma geral $\dot{Y} = A(t, Y)Y$, nomeadamente, o *Método de Crouch-Grossman* [21], o *Método Munthe-Kass* [26] e o *Método Livre de Comutadores* [28]. Estes métodos podem ser aplicados ao grupo $\mathrm{SO}(3)$, sendo Y uma matriz de rotação, e preservam as propriedades (2.1) e (2.2). Uma aplicação destes métodos a sistemas multi-corpo em $\mathrm{SE}(3)$[1] pode ser encontrada em [47].

O *Método de Crouch-Grossman* é constituído pelo seguinte algoritmo genérico

$$\begin{aligned} Y^{(i)} &= \mathrm{Exp}(Ta_{i,i-1}K^{(i-1)})\ldots\mathrm{Exp}(Ta_{i,1}K^{(1)})Y_{k-1} \\ K^{(i)} &= A\left(t_{k-1} + Tc_i, Y^{(i)}\right) \\ Y_k &= \mathrm{Exp}(Tb_sK^{(s)})\ldots\mathrm{Exp}(Tb_1K^{(1)})Y_{k-1}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde T denota o período de integração e $\mathrm{Exp}(.)$ o mapa exponencial em $\mathrm{SO}(3)$, que pode ser eficientemente calculado através da formula de Rodrigues (Apêndice A)

$$\mathrm{Exp}((\boldsymbol{\omega})^\wedge) = \begin{cases} \mathbf{I}, & \text{se } \|\boldsymbol{\omega}\| = 0, \\ \mathbf{I} + \frac{\sin(\|\boldsymbol{\omega}\|)}{\|\boldsymbol{\omega}\|}(\boldsymbol{\omega})^\wedge + \frac{\sin^2\left(\frac{\|\boldsymbol{\omega}\|}{2}\right)}{\frac{\|\boldsymbol{\omega}\|^2}{2}}\left((\boldsymbol{\omega})^\wedge\right)^2, & \text{se } \|\boldsymbol{\omega}\| \neq 0, \end{cases} \tag{4.6}$$

em que $\boldsymbol{\omega}$ é um vector com dimensão 3×1. O mapa exponencial é a função matemática que permite passar de uma álgebra de Lie para um grupo de Lie, e o seu estudo extravasa o âmbito deste trabalho. Mais definições e propriedades destas entidades matemáticas poderão ser encontradas em [48].

A exactidão dos *Métodos de Crouch-Grossman* está relacionada com a sua ordem [46]. O cálculo dos coeficientes até à sexta ordem podem ser encontrados em [46], [49] e [50]. As Tabelas 4.4 [46], 4.5 e 4.6 [47] mostram os coeficientes para os métodos de segunda, terceira e quarta ordem, respectivamente.

Um outro método alternativo para efectuar integrações numéricas em $\mathrm{SO}(3)$é o *Método de Munthe-Kaas*. A ideia deste método é resolver a equação diferencial na álgebra de Lie e não no grupo de Lie, podendo assim utilizar métodos de *Runge-Kutta* convencionais [47]. Este método é implementado

[1] Na literatura anglo-saxónica *Special Euclidean Group*. Produto semi-directo do grupo $\mathrm{SO}(3)$e do espaço $\mathbb{R}^3$.

Tabela 4.4: Tabela de coeficientes do *Método Crouch-Grossman* de segunda ordem.

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Tabela 4.5: Tabela de coeficientes do *Método Crouch-Grossman* de terceira ordem.

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{17}{24} & \frac{119}{216} & \frac{17}{108} & 0 \\ \hline & \frac{13}{51} & -\frac{2}{3} & \frac{24}{17} \end{array}$$

Tabela 4.6: Tabela de coeficientes do *Método Crouch-Grossman* de quarta ordem.

$$\begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1458}{1783} & \frac{1458}{1783} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{743}{1925} & \frac{1039}{3247} & \frac{97}{1470} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{368}{1135} & \frac{997}{1082} & \frac{1167}{2335} & -\frac{475}{433} & 0 & 0 \\ \frac{406}{463} & \frac{173}{487} & \frac{751}{3141} & \frac{547}{393} & -\frac{680}{613} & 0 \\ \hline & \frac{407}{2969} & -\frac{135}{7349} & \frac{543}{734} & -\frac{267}{1400} & \frac{696}{2095} \end{array}$$

pelo seguinte algoritmo

$$\begin{aligned} \Theta^{(i)} &= T \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} F^{(j)} \\ Y^{(i)} &= \mathrm{Exp}(\Theta^{(i)}) Y_{k-1} \\ F^{(i)} &= \mathrm{Dexp}^{-1}(\Theta^{(i)}) A\left(t_{k-1} + T c_i, Y^{(i)}\right) \\ \Theta &= T \sum_{i=1}^{s} b_i F^{(i)} \\ Y_k &= \mathrm{Exp}(\Theta) Y_{k-1}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

em que $\mathrm{Dexp}^{-1}(.)$ é o inverso do diferencial do mapa exponencial. Também o inverso do diferencial do mapa exponencial $\mathrm{Dexp}^{-1}(.)$ pode ser calculado com recurso a uma forma fechada dada por [47]

$$\mathrm{Dexp}^{-1}((\boldsymbol{\omega})^\wedge) = \begin{cases} \mathbf{I}, & \text{se } \|\boldsymbol{\omega}\| = 0, \\ \mathbf{I} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega})^\wedge - \frac{\|\boldsymbol{\omega}\| \cot\left(\frac{\|\boldsymbol{\omega}\|}{2}\right) - 2}{2\|\boldsymbol{\omega}\|^2} \left((\boldsymbol{\omega})^\wedge\right)^2, & \text{se } \|\boldsymbol{\omega}\| \neq 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Com este método podem ser utilizados os coeficientes usuais dos métodos *Runge-Kutta*. As Tabelas 4.7, 4.8 e 4.9 [47] mostram os coeficientes para os métodos de segunda, terceira e quarta ordem, respectivamente.

Tabela 4.7: Tabela de coeficientes do *Método Munthe-Kaas* de segunda ordem.

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Tabela 4.8: Tabela de coeficientes do *Método Munthe-Kaas* de terceira ordem.

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

Tabela 4.9: Tabela de coeficientes do *Método Munthe-Kaas* de quarta ordem.

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Por fim, o algoritmo de integração obtido pela aplicação do *Método Livre de Comutadores* é dado por

$$\begin{aligned} Y^{(i)} &= \mathrm{Exp}\left(\sum_j^s T a_{ij}^{[k]} K^{(j)}\right) \ldots \mathrm{Exp}\left(\sum_j^s T a_{ij}^{[1]} K^{(j)}\right) Y_{k-1} \\ K^{(i)} &= A\left(t_{k-1} + T c_i, Y^{(i)}\right) \\ Y_k &= \mathrm{Exp}\left(\sum_j^s T b_j^{[k]} K^{(j)}\right) \ldots \mathrm{Exp}\left(\sum_j^s T b_j^{[1]} K^{(j)}\right) Y_{k-1}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

As Tabelas 4.10 e 4.11 obtidas em [47], mostram coeficientes deste método para as ordens três e quatro, respectivamente. Ambas as tabelas apresentam dois vectores de coeficientes b_j, estes correspondem a respectivamente $b_j^{[1]}$ e $b_j^{[2]}$. Na Tabela 4.11 aparecem dois vectores linha de coeficientes a_{sj}, estes coeficientes correspondem a $a_{ij}^{[1]}$ e $a_{ij}^{[2]}$. Não foram encontrados na literatura coeficientes para a segunda ordem.

Tabela 4.10: Tabela de coeficientes do *Método Livre de Comutadores* de terceira ordem.

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{3}{4}
\end{array}
$$

Tabela 4.11: Tabela de coeficientes do *Método Livre de Comutadores* de quarta ordem.

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \\
 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4}
\end{array}
$$

A Tabela 4.10, que contém os coeficientes para a terceira ordem conduz a

$$
\begin{aligned}
Y^{(1)} = Y_{k-1},\ K^{(1)} &= A\left(t_{k-1}, Y^{(1)}\right) \\
Y^{(2)} = \operatorname{Exp}\left(\frac{T}{3}K^{(1)}\right)Y_{k-1},\ K^{(2)} &= A\left(t_{k-1} + \frac{T}{3}, Y^{(2)}\right) \\
Y^{(3)} = \operatorname{Exp}\left(\frac{2T}{3}K^{(2)}\right)Y_{k-1},\ K^{(3)} &= A\left(t_{k-1} + \frac{2T}{3}, Y^{(3)}\right) \\
Y_k = \operatorname{Exp}\left(-\frac{T}{12}K^{(1)} + \frac{3T}{4}K^{(3)}\right)&\operatorname{Exp}\left(\frac{T}{3}K^{(1)}\right)Y_{k-1}.
\end{aligned}
$$

É possível evitar o cálculo de exponenciais, reutilizando as já calculadas. Assim, no método de terceira ordem pode-se fazer

$$
Y_k = \operatorname{Exp}\left(-\frac{T}{12}K^{(1)} + \frac{3T}{4}K^{(3)}\right)Y^{(2)}.
$$

Também no método de quarta ordem é possível evitar o cálculo de exponenciais. Pode-se imple-

mentar este método utilizando os coeficientes da Tabela 4.11

$$
\begin{aligned}
Y^{(1)} &= Y_{k-1},\ K^{(1)} = A\left(t_{k-1}, Y^{(1)}\right) \\
Y^{(2)} &= \mathrm{Exp}\left(\frac{T}{2}K^{(1)}\right)Y_{k-1},\ K^{(2)} = A\left(t_{k-1} + \frac{T}{2}, Y^{(2)}\right) \\
Y^{(3)} &= \mathrm{Exp}\left(\frac{T}{2}K^{(2)}\right)Y_{k-1},\ K^{(3)} = A\left(t_{k-1} + \frac{T}{2}, Y^{(3)}\right) \\
Y^{(4)} &= \mathrm{Exp}\left(-\frac{T}{2}K^{(1)} + K^{(3)}\right)Y^{(2)},\ K^{(4)} = A\left(t_{k-1} + T, Y^{(4)}\right) \\
Y_k &= \mathrm{Exp}\left(-\frac{T}{12}K^{(1)} + \frac{T}{6}K^{(2)} + \frac{T}{6}K^{(3)} + \frac{T}{4}K^{(4)}\right) \\
&\quad \mathrm{Exp}\left(\frac{T}{4}K^{(1)} + \frac{T}{6}K^{(2)} + \frac{T}{6}K^{(3)} - \frac{T}{12}K^{(4)}\right)Y_{k-1}.
\end{aligned}
$$

Analisando a complexidade dos métodos em cada passo, para a segunda, terceira e quarta ordem, chega-se à Tabela 4.12.

Tabela 4.12: Complexidade por passo dos algoritmos CG^a, MK^b e LC^c de segunda, terceira e quarta ordens.

operação	Exp^d	$\mathrm{Dexp}^{-1\,e}$	multm^f
CG 2ª ordem	3	0	3
MK 2ª ordem	2	1	3
CG 3ª ordem	6	0	6
MK 3ª ordem	3	2	5
LC 3ª ordem	3	0	3
CG 4ª ordem	15	0	15
MK 4ª ordem	4	3	7
LC 4ª ordem	5	0	5

[a] *Método Crouch-Grossman*

[b] *Método Munthe-Kaas*

[c] *Método Livre de Comutadores*

[d] mapa exponencial

[e] inverso do diferencial do mapa exponencial

[f] multiplicação de matrizes 3×3

Verifica-se que para a segunda ordem o *Método Crouch-Grossman*, e o *Método Munthe-Kaas*, têm complexidades muito semelhantes. Para a terceira e quarta ordem, o *Método Livre de Comutadores* apresenta-se como o menos exigente computacionalmente, e o *Método Crouch-Grossman* como o mais exigente.

4.4 Comentários Finais

Neste capítulo foram apresentadas algumas das técnicas para obter aproximações em tempo discreto de sistemas dinâmicos, lineares e não-lineares.

Para os sistemas lineares, foram descritos os métodos *Euler Explícito*, *Euler Implícito*, *Mapeamento Pólos-Zeros*, e utilizando *Retentores*. Além das técnicas de discretização, foram também introduzidos alguns conceitos e ferramentas úteis na análise dos processos de discretização. Todas as técnicas apresentadas, excepto o *Método Euler Explícito* dão origem a sistemas estáveis quando são aplicadas a sistemas contínuos estáveis.

Muitas das ferramentas de análise de sistemas lineares não são válidas para os sistemas não-lineares. Para estes sistemas foram descritas técnicas baseadas em integração numérica. A teoria associada, indica que em geral, os métodos implícitos são mais estáveis numéricamente que os explícitos [4] e que a noção de ordem está associada à exactidão do método. Para equações diferenciais em $\mathbb{R}^n$, foram apresentados os métodos da família *Runge-Kutta*, da qual fazem parte os *Métodos de Euler*, e os métodos das famílias *Adams-Bashford* (Explícito) e *Adams-Moulton* (Implícito).

Os algoritmos desenvolvidos para $\mathbb{R}^n$ podem não conduzir a bons resultados se aplicados a equações diferenciais em variedades como $\mathrm{SO}(3)$. Verifica-se que, mesmo se $\mathcal{R}_{k-1}$ for uma matriz de rotação, a aplicação de um método *Runge-Kutta* clássico, conduz a uma matriz $\mathcal{R}_k$ que, em geral, não é uma matriz de rotação. Tendo consciência desta questão, pesquisaram-se métodos cujas variáveis de integração se mantivessem em $\mathrm{SO}(3)$ em cada iteração. Neste capítulo descreveram-se três métodos podem ser aplicados ao grupo $\mathrm{SO}(3)$ e a equações com a forma geral $\dot{Y} = A(t, Y)Y$. São eles o *Método Crouch-Grossman*, o *Método Munthe-Kaas*, e o *Método Livre de Comutadores*. Estes métodos foram desenvolvidos nas duas últimas décadas e fazem uso da teoria de grupos de Lie e álgebras de Lie.

Após uma análise da complexidade de cada passo, concluiu-se que para a segunda ordem o *Método Crouch-Grossman* e *Método Munthe-Kaas* apresentam uma complexidade muito semelhante. Não tendo sido encontrados na literatura, coeficientes para o *Método Livre de Comutadores*, de segunda ordem este não pode ser comparado. Para as ordens 3 e 4, o *Método Livre de Comutadores* é o menos exigente computacionalmente, sendo o *Método Crouch-Grossman* o mais exigente.

Capítulo 5

Implementação do Observador em Tempo Discreto

5.1 Descrição Geral

Neste capítulo, vão ser utilizadas as técnicas apresentadas no Capítulo 4, com o objectivo de obter um algoritmo que permita implementar em computador digital, os observadores em tempo contínuo projectados no Capítulo 3.

A elevada capacidade de cálculo existente hoje em dia nos computadores residentes a bordo dos veículos autónomos, permite recorrer a soluções sofisticadas para a determinação em tempo real da atitude e posição dessas plataformas. A existência de estimativas de atitude e posição com regularidade e qualidade elevadas, é um passo fundamental para a estabilização dos veículos autónomos, e consequentemente para viabilizar a sua utilização prática. Uma vez que os observadores desenvolvidos no Capítulo 3 correspondem a soluções em tempo contínuo, é necessário providenciar técnicas para a sua implementação em tempo discreto, que permitam preservar a qualidade das soluções propostas de forma eficiente.

Os métodos de implementação em tempo discreto, devem ser os mais adequados, de modo que a aproximação resultante, esteja o mais próximo possível do sistema em tempo contínuo que lhe deu origem, e que restrições ao espaço ou ao grupo a que pertencem as variáveis, sejam respeitadas. Também muito importante é o estudo da complexidade de cada uma das soluções propostas, de forma a permitir fazer um balanço de custo-beneficio aquando da sua escolha, pois embora o poder de cálculo a bordo das plataformas seja elevado, este tem de ser partilhado pelas diversas tarefas.

5.2 Integração Numérica do Observador de Atitude

Recordando o Capítulo 3, o observador de atitude que considera a existência de polarizações nos giroscópios é composto pela equação algébrica

$$\hat{\omega} = \omega_{sensor} - \hat{\mathbf{b}}_{\omega} - K_{\omega}\mathbf{s}_{\omega}, \tag{5.1}$$

e pelas equações diferenciais

$$\dot{\hat{\mathcal{R}}} = \hat{\mathcal{R}}(\hat{\omega})^{\wedge} \tag{5.2}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{b}}}_{\omega} = K_{b_{\omega}}\mathbf{s}_{\omega}, \tag{5.3}$$

com $\mathbf{s}_{\omega}$ dado por (3.37) ou (3.38).

Analisando a equação (5.2), verifica-se que $\hat{\mathcal{R}}$ pertence ao grupo $\mathrm{SO}(3)$. Por forma a implementar um método de integração numérica para este sistema dinâmico, é necessário utilizar um dos métodos de preservem as propriedades do grupo, como os métodos estudados no Capítulo 4, nomeadamente, o *Método de Crouch-Grossman*, o *Método Munthe-Kass*, ou o *Método Livre de Comutadores*.

A equação (5.2) não está na forma geral utilizada nos algoritmos estudados $\dot{Y} = A(t, Y)Y$. No entanto é possível ser obter uma equação equivalente com essa forma, através da transposição de ambos os membros da equação (5.2)

$$\left(\dot{\hat{\mathcal{R}}}\right)^{T} = \left(\hat{\mathcal{R}}(\hat{\boldsymbol{\omega}})^{\wedge}\right)^{T} \Leftrightarrow \dot{\hat{\mathcal{R}}}^{T} = -(\hat{\boldsymbol{\omega}})^{\wedge}\hat{\mathcal{R}}^{T}.$$

Como se observa em (4.5), (4.7) e (4.9), os três métodos necessitam de conhecer a função $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t, \hat{\mathcal{R}})$ entre o instante de integração $kT - T$ e o instante de integração kT. Contudo, esta função é desconhecida, pois depende da leitura dos sensores que é realizada de acordo com uma determinada estratégia de amostragem. Ou seja, apenas se conhece $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ nos instantes kT, $kT - T$, $kT - 2T$, ..., 0. Estratégias possíveis para obter uma aproximação de $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t, \mathcal{R})$, são a realização de uma interpolação polinomial, com dois ou mais pontos, ou uma minimização dos erros quadráticos de uma função pré-definida em relação aos pontos conhecidos. Dado que se pretende uma solução que possa funcionar em tempo real nos computadores das plataformas, sem comprometer recursos necessários aos restantes sistemas, foi adoptada uma interpolação linear entre o valor de $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ no instante actual kT, e no instante anterior $kT - T$. Note-se porém, que esta escolha não coloca uma limitação intrínseca na solução proposta, pois caso seja necessário outra qualquer função poderá ser considerada. Desta forma, para cada $t \in [kT - T,\ kT]$ tem-se

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}(t, \hat{\mathcal{R}}) \approx \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\omega}}(kT) - \hat{\boldsymbol{\omega}}(kT - T)}{T}\right)(t - (kT - T)) + \hat{\boldsymbol{\omega}}(kT - T). \tag{5.4}$$

Verifica-se em (5.1) e (5.4), que $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ não depende de $\hat{\mathcal{R}}$, como admitem os algoritmos de integração geométrica estudados, e este facto vai permitir simplificá-los. O facto da interpolação em $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ ser linear, faz com que não se aumente a precisão da solução ao usar métodos com ordem superior à segunda.

Assim para este problema, só faz sentido considerar o *Método Crouch-Grossman* e o *Método Munthe-Kaas* de segunda ordem, e o *Método Livre de Comutadores* de terceira ordem. A Tabela 5.1 mostra o número de operações por passo, de cada um destes métodos, quando $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ não depende de $\hat{\mathcal{R}}$.

Tabela 5.1: Complexidade por passo dos algoritmos CG^a, MK^b e LC^c quando $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ não depende de $\hat{\mathcal{R}}$.

operação	Exp ^{d}	Dexp^{-1} ^{e}	multm^f
CG 2ª ordem	2	0	2
MK 2ª ordem	1	1	2
LC 3ª ordem	2	0	2

^{a} *Método Crouch-Grossman*

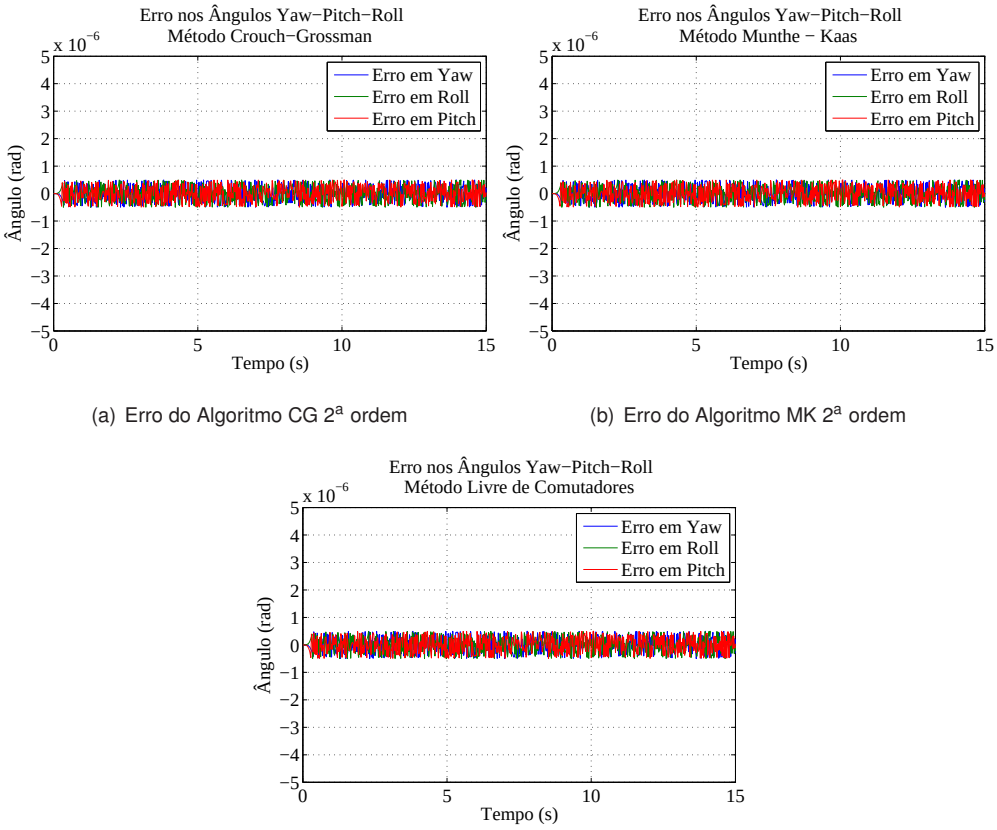
^{b} *Método Munthe-Kaas*

^{c} *Método Livre de Comutadores*

^{d} mapa exponencial

^{e} inverso do diferencial do mapa exponencial

^{f} multiplicação de matrizes 3×3



(a) Erro do Algoritmo CG 2ª ordem

(b) Erro do Algoritmo MK 2ª ordem

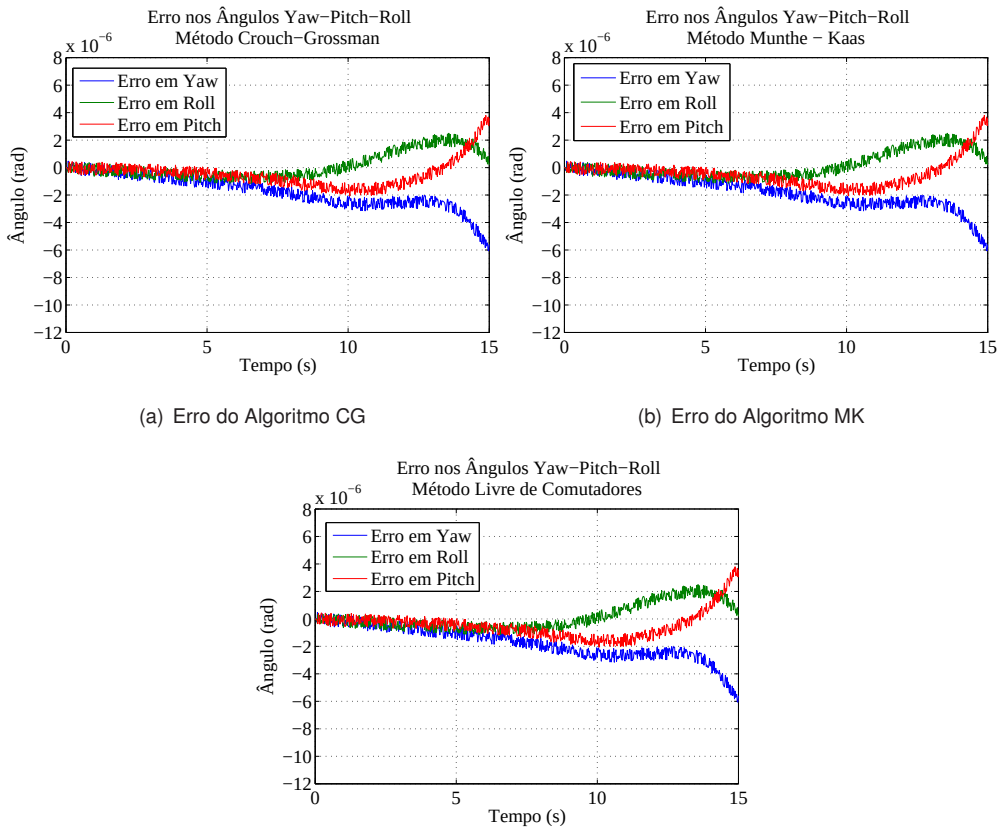
(c) Erro do Algoritmo LC 3ª ordem

Figura 5.1: Erro dos algoritmos CG, MK de segunda e LC de terceira ordem, quando são utilizados para integrar a equação (5.2) e $\hat{\omega}$ tem um crescimento linear.

As Figuras 5.1(a), 5.1(b) e 5.1(c) mostram respectivamente, a evolução temporal do erro gerado pela aplicação do *Método Crouch-Grossman* e do *Método Munthe-Kaas*, ambos de segunda ordem, e do *Método Livre de Comutadores* de terceira ordem, na integração numérica da equação (5.2), quando

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}(t) = [0.1\ 0.2\ 0.3]^T t\ (rad s^{-1}),$$

e considerando um período de amostragem $T = 0.02\ s$. Repare-se que a aproximação (5.4) é neste caso exacta, pois $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t)$ tem um crescimento linear. Verifica-se que o erro se mantém constante para os três métodos, com ordem de grandeza de $10^{-7}\ rad$.



(a) Erro do Algoritmo CG

(b) Erro do Algoritmo MK

(c) Erro do Algoritmo LC

Figura 5.2: Erro dos algoritmos CG, MK de segunda ordem e LC de terceira ordem, quando são utilizados para integrar a equação (5.2) e $\hat{\omega}$ tem uma evolução quadrática.

Por seu lado nas Figuras 5.2(a), 5.2(b) e 5.2(c), encontra-se a evolução do erro para os três métodos de integração considerados para a equação (5.2), quando $\hat{\omega}(t)$ tem um crescimento quadrático dado por

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}(t) = [0.001\ 0.002\ 0.003]^T t^2\ (rad s^{-1}).$$

Tal como era previsto os três métodos divergem. Isto acontece porque esta é uma integração em malha aberta e portanto os erros cometidos em cada passo adicionam-se, não havendo forma de os compensar. De notar que, mesmo em malha aberta, neste exemplo, o erro cometido pelo *Método*

Munthe-Kass e *Método Crouch-Grossman* de segunda ordem e pelo *Método Livre de Comutadores* de terceira ordem, ao final de $15\ s$ é da ordem de $10^{-6}\ rad$.

Considerando idênticas as complexidades das funções Exp e Dexp^{-1}, os três métodos considerados, apresentam custos computacionais semelhantes. Podendo optar por qualquer algoritmo para implementar numericamente a equação (5.2), a escolha recaiu sobre o *Método Munthe-Kaas*. Aplicando este método, o algoritmo de integração de (5.2) resultante é, para cada instante kT,

$$\begin{aligned}
F^{(1)} &= -\hat{\boldsymbol{\omega}}(kT-T)^{\wedge} \\
\Theta^{(2)} &= \frac{T}{2}F^{(1)} \\
F^{(2)} &= -\,\mathrm{Dexp}^{-1}\left(\Theta^{(2)}\right)\hat{\boldsymbol{\omega}}\left(kT-T-\frac{T}{2}\right)^{\wedge} \\
\hat{\mathcal{R}}_k^T &= \mathrm{Exp}\left(TF^{(2)}\right)\hat{\mathcal{R}}_{k-1}^T,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

em que o vector $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t)$ é dado pela aproximação (5.4).

A equação diferencial (5.3) pode ser implementada computacionalmente recorrendo a um dos métodos de integração numérica em $\mathbb{R}^3$ estudados no Capítulo 4. Optou-se pelo método *Adams-Moulton* de segunda ordem, que também pode ser considerado um método *Runge-Kutta* implícito. Este é um método implícito, por isso mais estável que um explícito, e como o algoritmo (5.5) também é de segunda ordem, considerou-se que para ordens superiores à segunda, o ganho de precisão não justifica o aumento da complexidade computacional. É de realçar que no caso dos observadores, está-se na presença de ruído nos sensores de velocidade angular e aceleração, existindo um termo de retroacção das posições angulares e lineares o qual irá compensar a eventual divergência do método numérico. A implementação numérica da equação (5.3) através deste método conduz a

$$\hat{\mathbf{b}}_{\omega\ k} = \hat{\mathbf{b}}_{\omega\ k-1} + \frac{T}{2}\left(K_{b_\omega}\mathbf{s}_{\omega\ k} + K_{b_\omega}\mathbf{s}_{\omega\ k-1}\right). \tag{5.6}$$

De notar que, caso se pretenda utilizar um método de ordem superior, a escolha deve recair sobre um método *Adams-Moulton*, visto que apenas recorre a valores de $f(t, x(t))$ em $kT, kT-T, kT-2T, \ldots$. Os métodos *Runge-Kutta* necessitam dos valores de $f(t, x(t))$ em instantes dentro do intervalo $[kT - T\ T]$, o que não é possível obter devido $\mathbf{s}_\omega$ depender de valores amostrados.

Utilizando a retroacção (5.1), em conjunto com (5.5) e (5.6), obtém-se o seguinte algoritmo para o observador de atitude

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{b}}_{\omega\ k} &= \hat{\mathbf{b}}_{\omega\ k-1} + \frac{T}{2}\left(K_{b_\omega}\mathbf{s}_{\omega\ k} + K_{b_\omega}\mathbf{s}_{\omega\ k-1}\right) \\
F^{(1)} &= -\hat{\boldsymbol{\omega}}(kT-T)^{\wedge} \\
\Theta^{(2)} &= \frac{T}{2}F^{(1)} \\
F^{(2)} &= -\,\mathrm{Dexp}^{-1}\left(\Theta^{(2)}\right)\hat{\boldsymbol{\omega}}\left(kT-T-\frac{T}{2}\right)^{\wedge} \\
\hat{\mathcal{R}}_k^T &= \mathrm{Exp}\left(TF^{(2)}\right)\hat{\mathcal{R}}_{k-1}^T.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Devido ao algoritmo que integra numericamente a equação (5.3) ser implícito, e $\mathbf{s}_{\omega\ k}$ depender de $\hat{\mathcal{R}}_k$, o que só por si também torna o algoritmo implícito, é necessário aplicar um método de resolução

de equações implícitas, tal como o do *Ponto-Fixo* [4]. O algoritmo final é então

$$
\begin{aligned}
&fazer \\
&\quad i = i + 1 \\
&\quad \mathbf{s}_{\omega\ k}^{[i]} = \mathbf{s}_{\omega\ k}\left(\hat{\mathcal{R}}_k^{[i-1]}\right) \\
&\quad \hat{\mathbf{b}}_{\omega\ k}^{[i]} = \hat{\mathbf{b}}_{\omega\ k-1} + \frac{T}{2}\left(K_{b_\omega}\mathbf{s}_{\omega\ k}^{[i]} + K_{b_\omega}\mathbf{s}_{\omega\ k-1}\right) \\
&\quad \hat{\boldsymbol{\omega}}_k^{[i]} = \boldsymbol{\omega}_{sensor} - \hat{\mathbf{b}}_{\omega\ k}^{[i]} - K_\omega \mathbf{s}_{\omega\ k}^{[i]} \\
&\quad F^{(1)} = -\hat{\boldsymbol{\omega}}^{[i]}(kT - T)^\wedge \\
&\quad \Theta^{(2)} = \frac{T}{2}F^{(1)} \\
&\quad F^{(2)} = -\operatorname{Dexp}^{-1}\left(\Theta^{(2)}\right)\hat{\boldsymbol{\omega}}^{[i]}\left(kT - T + \frac{T}{2}\right)^\wedge \\
&\quad \hat{\mathcal{R}}_k^{T[i]} = \operatorname{Exp}\left(TF^{(2)}\right)\hat{\mathcal{R}}_{k-1}. \\
&enquanto\ \left\|\hat{\mathcal{R}}_k^{[i]} - \hat{\mathcal{R}}_k^{[i-1]}\right\| + \left\|\hat{\mathbf{b}}_k^{[i]} - \hat{\mathbf{b}}_k^{[i-1]}\right\| \geq 10^{-12}
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Para provar a convergência do método do *Ponto-Fixo* para uma equação do género $x = g(x)$, é necessário mostrar que existe um intervalo $I = [a\ b]$, no qual $g(I) \subset I$, i.e. $a \leq g(x) \leq b$, e que existe $0 < L < 1$ tal que, $\|g(y) - g(x)\| \leq L\|y - x\|$, com $x \neq y$ [4]. Este aspecto deverá ser objecto de trabalho futuro.

5.3 Integração Numérica do Observador de Posição

A dinâmica do observador de posição com polarizações nos giroscópios desenvolvido no Capítulo 3, é dada pelo seguinte sistema de equações diferenciais

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}} = \hat{\mathbf{v}} - (\hat{\boldsymbol{\omega}})^\wedge\hat{\mathbf{p}} - K_p(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathcal{R}}^{TL}\bar{\mathbf{p}}) \tag{5.9}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}} = \bar{\mathbf{a}} + \hat{\mathcal{R}}^{TL}\bar{\mathbf{g}} - (\hat{\omega})^\wedge\hat{\mathbf{v}} - K_v(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathcal{R}}^{TL}\bar{\mathbf{p}}). \tag{5.10}$$

Tal como o vector $\hat{\mathbf{b}}_\omega$, os vectores $\hat{\mathbf{p}}$ e $\hat{\mathbf{v}}$ pertencem a $\mathbb{R}^3$, portanto na sua implementação em tempo discreto podem ser utilizados os métodos de integração numérica estudados na Sub-secção 4.3.1. Por razões semelhantes às apontadas na implementação em tempo discreto de (5.3), optou-se pelo *Método Adams-Moulton* de segunda ordem. O algoritmo de integração numérica obtido após a aplicação deste método a (5.9) e (5.10) é em cada instante de amostragem dado por

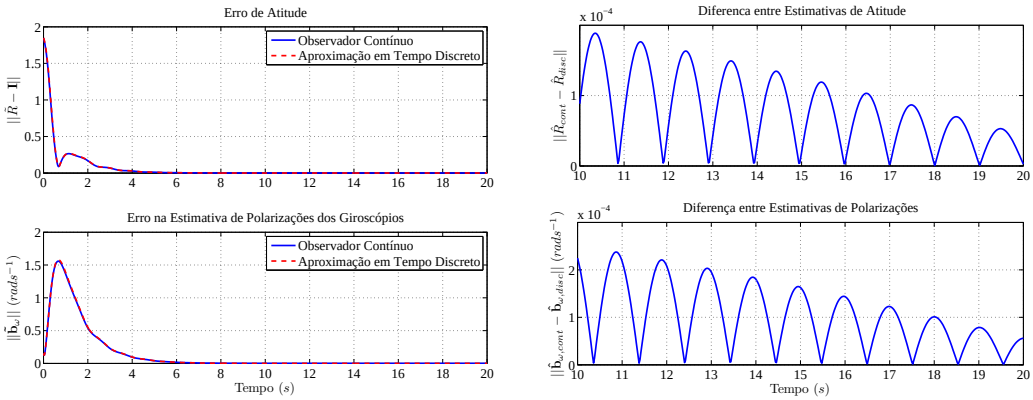
$$
\begin{aligned}
g_{p\ k} &= \hat{\mathbf{v}}_k - (\hat{\boldsymbol{\omega}}_k)^\wedge\hat{\mathbf{p}}_k - K_p(\hat{\mathbf{p}}_k - \hat{\mathcal{R}}^{TL}\bar{\mathbf{p}}_k) \\
\hat{\mathbf{p}}_k &= \hat{\mathbf{p}}_{k-1} + \frac{T}{2}(g_{p\ k} + g_{p\ k-1}) \\
g_{v\ k} &= \bar{\mathbf{a}}_k + \hat{\mathcal{R}}_k^{TL}\bar{\mathbf{g}} - (\hat{\boldsymbol{\omega}}_k)^\wedge\hat{\mathbf{v}}_k e - K_v(\hat{\mathbf{p}}_k - \hat{\mathcal{R}}^{TL}\bar{\mathbf{p}}_k) \\
\hat{\mathbf{v}}_k &= \hat{\mathbf{v}}_{k-1} + \frac{T}{2}(g_{v\ k} + g_{v\ k-1})
\end{aligned}
$$

À semelhança do algoritmo de atitude, as equações em tempo discreto obtidas são implícitas, e necessitam de ser resolvidas através de métodos iterativos. A aplicação do *Ponto-Fixo* conduz ao

algoritmo

$$
\begin{aligned}
&fazer \\
&\quad g_{p\,k}^{[i]} = \hat{\mathbf{v}}_k^{[i-1]} - (\hat{\boldsymbol{\omega}}_k)^{\wedge}\hat{\mathbf{p}}_k^{[i-1]} - K_p\left(\hat{\mathbf{p}}_k^{[i-1]} - \hat{\mathcal{R}}^{TL}\bar{\mathbf{p}}_k\right) \\
&\quad \hat{\mathbf{p}}_k^{[i]} = \hat{\mathbf{p}}_{k-1} + \frac{T}{2}\left(g_{p\,k}^{[i]} + g_{p\,k-1}\right) \\
&\quad g_{v\,k}^{[i]} = \bar{\mathbf{a}}_k - \hat{\mathcal{R}}_k^{TL}\bar{\mathbf{g}} - (\hat{\boldsymbol{\omega}}_k)^{\wedge}\hat{\mathbf{v}}_k^{[i-1]} - K_v\left(\hat{\mathbf{p}}_k^{[i]} - \hat{\mathcal{R}}^{TL}\bar{\mathbf{p}}_k\right) \\
&\quad \hat{\mathbf{v}}_k^{[i]} = \hat{\mathbf{v}}_{k-1} + \frac{T}{2}\left(g_{v\,k}^{[i]} + g_{v\,k-1}\right) \\
&enquanto\ \left\|\hat{\mathbf{p}}_k^{[i]} - \hat{\mathbf{p}}_k^{[i-1]}\right\| + \left\|\hat{\mathbf{v}}_k^{[i]} - \hat{\mathbf{v}}_k^{[i-1]}\right\| \geq 10^{-12}
\end{aligned}
$$

5.4 Simulações



(a) Erro das estimativas do observador de atitude em tempo contínuo e da aproximação em tempo discreto.

(b) Pormenor da diferença entre estimativas.

Figura 5.3: Comparação entre as estimativas do observador de atitude em tempo contínuo e da aproximação em tempo discreto.

Para ilustrar o desempenho dos algoritmos de integração numérica utilizados neste trabalho, realizou-se uma simulação comparando a aproximação em tempo discreto com o observador em tempo contínuo. Nesta simulação, admite-se a existência de cinco emissores de ultra-sons, cujas localizações são

$$
\begin{aligned}
{}^{L}\bar{\mathbf{x}}_1 &= [20\ 20\ 20]^T, \\
{}^{L}\bar{\mathbf{x}}_2 &= [-20\ \ -20\ 20]^T, \\
{}^{L}\bar{\mathbf{x}}_3 &= [20\ \ -20\ \ -20]^T, \\
{}^{L}\bar{\mathbf{x}}_4 &= [-20\ 20\ \ -20]^T, \\
{}^{L}\bar{\mathbf{x}}_5 &= [0\ 0\ 0]^T.
\end{aligned}
$$

Os receptores acústicos no referencial do veículo estão posicionados em

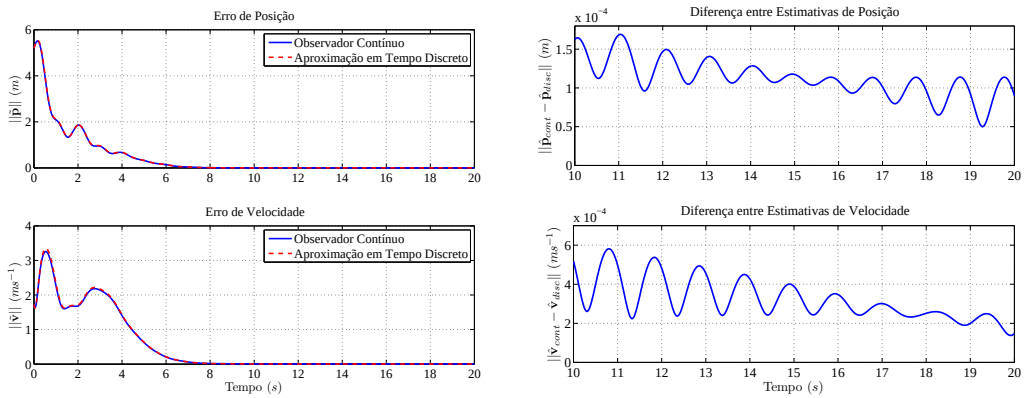
$$
\begin{aligned}
{}^{B}\mathbf{ac}_{receptor,1} &= [0\ 0\ 0]^T, \\
{}^{B}\mathbf{ac}_{receptor,2} &= [0,5\ 0\ 0]^T, \\
{}^{B}\mathbf{ac}_{receptor,3} &= [0\ 0,5\ 0]^T, \\
{}^{B}\mathbf{ac}_{receptor,4} &= [0\ 0\ 0,5]^T.
\end{aligned}
$$

A trajectória do veículo é definida por aceleração linear e velocidade angular sinusoidais com frequência de 1/2 Hz. Os ganhos de ambos os observadores são $K_\omega = 2$, $K_{b_\omega} = 2$, $K_p = 2$, e $K_v = 2$. Os erros iniciais são indicados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Erros inicias das simulações.

Grandeza	Erros Iniciais
$\theta(t_0)$	$\frac{\pi}{180}135\ (rad)$
$\tilde{\mathbf{b}}_\omega(t_0)$	$\frac{\pi}{180}[5\ 5\ 5]^T\ (rads^{-1})$
$\tilde{\mathbf{p}}(t_0)$	$[3\ 3\ 3]^T\ (m)$
$\tilde{\mathbf{v}}(t_0)$	$[1\ 1\ 1]^T\ (ms^{-1})$

O ganho K_{b_ω} verifica a condição (3.26) , $\frac{\frac{1}{K_{b_\omega}}\|\tilde{\mathbf{b}}_\omega(t_0)\|^2}{4(1+\cos(\theta(t_0)))} \approx 0,065 < 1$.



(a) Erro das estimativas do observador de atitude em tempo contínuo e da aproximação em tempo discreto.

(b) Pormenor da diferença entre as estimativas.

Figura 5.4: Comparação entre as estimativas do observador de atitude em tempo contínuo e da aproximação em tempo discreto.

Na Figura 5.3(a) apresentam-se os erros das estimativas de atitude e das polarizações dos giroscópios, onde se observa que ambas as estimativas, do observadores em tempo contínuo e da sua aproximação em tempo discreto são praticamente coincidentes. A Figura 5.3(b) mostra um pormenor da diferença entre as estimativas de ambos os observadores nos últimos $10\ s$ de simulação. Pode

observar-se que as estimativas fornecidas pelo observador em tempo discreto não são exactamente coincidentes com as do observador em tempo contínuo, mas que a diferença entre elas vai diminuindo com o tempo.

Relativamente às estimativas de posição e velocidade, ambos os sistemas de estimação se mostram capazes de corrigir os erros iniciais, como ilustra a Figura 5.4(a). É também possível observar que os dois estimadores têm resultados semelhantes, o que vem atestar qualitativamente a validade da aproximação realizada. Mostra-se na Figura 5.4(b) que as estimativas nos últimos $10\ s$ são quase coincidentes.

5.5 Diferentes Ritmos de Amostragem

Devido à relativamente baixa velocidade do som no ar ($343,1\ ms^{-1}$ à temperatura de $20°\ C$ e pressão de $1\ bar$) existe um limite prático para a frequência a que se podem amostrar as distâncias entre os receptores acústicos e os emissores de ultra-sons. Sempre que um emissor envia um sinal de som mais nenhum outro pode emitir até que esse sinal seja recebido pelo receptor, por forma ser possível identificar a fonte do sinal. É então necessário reservar intervalos de tempo para cada emissor. A duração mínima de cada intervalo é dada por

$$T_{slot\ emissor} = \frac{\text{distância máxima entre emissores e receptores acústicos}}{\text{velocidade do som no ar}}$$

Por outro lado, como foi visto no Capítulo 2, é necessário que existam no mínimo quatro emissores e todos eles necessitam de enviar seu o sinal sonoro. Por este motivo o período máximo de amostragem das distâncias entre os receptores acústicos e os emissores é dado por

$$T_{amostragem\ máximo\ distâncias} = T_{slot\ emissores} \times \text{número de emissores}$$

Como exemplo, considere-se que existem quatro emissores e que a distância entre eles e os receptores acústicos não é superior a $10\ m$, cada intervalo de tempo necessita de ter a duração mínima de $29,15 \times 10^{-3}\ s$, e o período máximo de amostragem das distâncias resultante, será de $116,58 \times 10^{-3}\ s$.

Contudo, em geral, para os acelerómetros e giroscópios, conseguem-se períodos de amostragem bastante inferiores. Uma forma de lidar com este facto, é utilizar o maior ritmo de amostragem para estes sensores integrando em malha aberta as suas leituras (ou seja, considerar nulos os vectores $\mathbf{s}_\omega$, $\mathbf{s}_p$ e $\mathbf{s}_v$), e fechar a malha quando estiverem disponíveis as leituras das distâncias entre os emissores e receptores acústicos.

5.6 Comentários Finais

No presente capítulo foi obtida uma implementação em tempo discreto do observador que considera a existência de polarizações nos giroscópios, projectado no Capítulo 3. Para tal, aplicaram-se

as técnicas estudadas no Capítulo 4. Esta aproximação em tempo discreto, com recurso a algoritmos de integração de equações diferenciais, é essencial para a implementação em computador do observador.

Para integrar em tempo discreto a equação (5.2) do observador de atitude é necessário recorrer a um algoritmo de integração numérica que preserve as propriedades da matriz de rotação ao longo do tempo. Foram estudados três métodos com estas características, podendo ter cada um deles diferentes ordens de convergência. Pela natureza do problema que se pretende resolver não foi considerado vantajoso considerar ordens superiores à segunda, então as opções consideradas foram *Método Crouch-Grossman* de segunda ordem, *Método Munthe-Kaas* de segunda ordem, e o *Método Livre de Comutadores* de terceira ordem, pois não foram encontrados na literatura os coeficientes de segunda ordem para este método. Estes métodos apresentam complexidades semelhantes. Sendo equivalente implementar qualquer um deles, optou-se pelo *Método Munthe-Kaas* de segunda ordem. A questão da complexidade é relevante porque muitas vezes os sistemas de navegação tem de correr a bordo de veículos com recursos computacionais limitados.

A equação diferencial (5.3) foi integrada em tempo discreto recorrendo ao *Método Adams-Moulton* de segunda ordem, pois este é um método implícito, e oferece uma boa relação entre o custo computacional e a convergência. Além disso, o algoritmo escolhido para integrar a dinâmica de atitude também é de segunda ordem apresentando propriedades de convergência semelhantes. O algoritmo de integração obtido é implícito, sendo por isso necessário resolve-lo de forma iterativa, utilizando por exemplo, o *Método do Ponto- Fixo*.

Na integração numérica do observador de posição, o *Método Adams-Moulton* foi aplicado às duas equações diferenciais que o constituem. À semelhança do observador de atitude, o algoritmo obtido para o observador de posição é implícito, necessitando de ser resolvido iterativamente em cada instante de amostragem.

Foram ainda apresentados resultados de simulação que permitem comparar o desempenho do observador em tempo contínuo com a sua aproximação em tempo discreto, e uma forma de lidar com o facto dos acelerómetros e giroscópios permitirem em geral, ritmos de amostragem superiores aos disponibilizados pelo sistema de posicionamento acústico.

Capítulo 6

Determinação dos Ganhos dos Observadores

6.1 Descrição Geral

No presente capítulo pretende-se obter valores razoáveis para os ganhos K_ω, K_{b_ω}, K_p e K_v para a implementação em tempo discreto do observador, com objectivo de compensar adequadamente a existência de polarizações nos giroscópios, diminuindo tanto quanto possível o impacto do ruído presente nas leituras dos sensores nas estimativas produzidas.

Aquando do desenvolvimento de qualquer sistema de estimação ou controlo, é necessário encontrar quais os ganhos que permitem que o sistema apresente características tão próximas das desejadas quanto possível. Uma característica fundamental é a estabilidade. Todavia, existem outras associadas ao desempenho, que são extremamente relevantes para o bom funcionamento da solução proposta, dessas são de destacar, a rapidez de convergência, a existência de oscilações e a imunidade ao ruído.

Embora normalmente, para os sistemas lineares, seja possível encontrar teoricamente os melhores ganhos para as características desejadas através da resolução de um problema de optimização convexa, em geral para os sistemas não lineares isso não é verdade. O comportamento dos sistemas não lineares pode ser muito complexo e a influência dos ganhos em determinada característica, pode ter mais do que um máximo ou mínimo local.

Encontrar os melhores ganhos para um sistema não linear, é geralmente uma tarefa complexa e com reduzida teoria de suporte. Muitas vezes os ganhos são ajustados manualmente ate se obter o desempenho desejado.

Neste trabalho, a estratégia utilizada para obter os ganhos K_ω e K_{b_ω}, consiste em assumir valores padrão para o ruído nos sensores, e calcular os ganhos que minimizam o erro quadrático médio de atitude. Para encontrar esses ganhos realiza-se uma simulação para cada uma das diferentes

combinações de valores para os ganhos. Este processo, na literatura anglo-saxónica, é designado por *griding*. Cada simulação tem a duração de $1000\ s$, por forma a minimizar o efeito do transitório inicial na resposta do observador.

A estratégia adoptada para obter os ganhos K_p e K_v é distinta. Verifica-se que, a estrutura da dinâmica do erro de posição e velocidade do observador em tempo contínuo, sob uma transformação conveniente, é semelhante à estrutura do erro de um filtro de Kalman-Bucy. Tirando partido desta característica, os ganhos são projectados com recurso à teoria destes filtros.

6.2 Não Idealidades das Medidas

As medidas efectuadas por sensores possuem, em geral, não idealidades como ruído e polarizações. Neste capítulo considera-se que o ruído nas medidas de velocidade angular, das distâncias emissor-receptor, da aceleração, e da posição expressa no referencial $\{\mathbf{L}\}$, ${}^{L}\mathbf{p}_{medido}$, são modelados por processos estocásticos gaussianos independentes em cada canal, e que as medidas de velocidade angular possuem polarizações constantes.

A variância considerada para ${}^{L}\mathbf{p}_{medido}$, é a obtida para a situação mais favorável das simulações realizadas na Secção 2.5. As variâncias da aceleração e velocidade angular e as polarizações presentes nas medidas de velocidade angular, correspondem a valores típicos para este tipo de sensores, e são semelhantes às utilizadas em [32]. A variância das medidas de distância depende consideravelmente do sistema utilizado, contudo, sendo que os fabricantes do sistema *Cricket* (subsecção 2.4.3) indicam um erro relativo entre $1\ cm$ e $5\ cm$, o ruído nestes sensores foi caracterizado com uma variância de $(0.05\ m)^2$. Na Tabela 6.1 são apresentadas as variâncias e polarizações das várias medidas.

Tabela 6.1: Polarizações e variância do ruído nas medidas (ruído gaussiano).

Medida	Polarização	Variância do Ruído σ^2
Velocidade Angular	$0,001\ rads^{-1}$ por canal	$(3,5\times10^{-4}\ rads^{-1})^2$ por canal
Distâncias Emissor-Receptor	-	$(0.05\ m)^2$ em cada distância
Aceleração	-	$(0,006\ ms^{-2})^2$ por canal
Posição expressa no referencial $\{\mathbf{L}\}$	-	$(0,002\ m)^2$ por canal

6.3 Ganhos da Implementação Discreta do Observador de Atitude, K_ω e K_{b_ω}

A construção em cascata do observador, permite procurar os melhores ganhos de forma separada para a aproximação do observador de atitude e para a aproximação do observador de posição.

Realizaram-se simulações do observador de atitude para todas as combinações possíveis dos valores, 10^{-2}, $10^{-1,5}$, ..., $10^{0,5}$, 10^{1}, para o ganho K_ω, e dos valores 10^{-4}, $10^{-3,5}$, ..., $10^{-1,5}$, 10^{-1}, para o ganho K_{b_ω}, e verificou-se qual a combinação que minimizava o erro quadrático médio da aproximação em tempo discreto do observador de atitude. As polarizações e variância do ruído das medidas dos sensores, estão indicadas na Tabela 6.1.

As condições em foram realizadas as simulações são:

- frequência de amostragem de todos os sensores = $50\ Hz$;
- velocidade angular do sistema = $\bar{\omega} = [0,1\ 0,1\ 0,1]^T\ (rads^{-1})$;
- posições dos emissores de ultra-sons:

$$
\begin{aligned}
{}^L\bar{\mathbf{x}}_1 &= [-20\ \ -20\ \ -20]^T\ (m)\\
{}^L\bar{\mathbf{x}}_2 &= [20\ 20\ \ -20]^T\ (m)\\
{}^L\bar{\mathbf{x}}_3 &= [20\ \ -20\ 20]^T\ (m)\\
{}^L\bar{\mathbf{x}}_4 &= [-20\ 20\ 20]^T\ (m)\\
{}^L\bar{\mathbf{x}}_5 &= [0\ 0\ \ -0]^T\ (m);
\end{aligned}
$$

- posições dos receptores acústicos no referencial do corpo:

$$
\begin{aligned}
{}^B\mathbf{ac}_{receptor,1} &= [0\ 0\ 0]^T\ (m)\\
{}^B\mathbf{ac}_{receptor,2} &= [0,5\ 0\ 0]^T\ (m)\\
{}^B\mathbf{ac}_{receptor,3} &= [0\ 0,5\ 0]^T\ (m)\\
{}^B\mathbf{ac}_{receptor,4} &= [0\ 0\ 0,5]^T\ (m)
\end{aligned}
$$

- erro de atitude inicial: $\theta(t_0) = \frac{\pi}{10}\ rad$;

A Figura 6.1 mostra o valor quadrático médio do erro de atitude, $||\tilde{\mathcal{R}} - \mathbf{I}||$, em função de K_ω e K_{b_ω}. Verifica-se que a superfície formada é convexa com um mínimo em:

$$
\begin{aligned}
K_\omega &= 0,1\\
K_{b_\omega} &= 0,0032
\end{aligned}
$$

e com o valor de $1,7489 \times 10^{-4}$.

A superfície apresenta esta forma porque para valores dos ganhos demasiado elevados, existe uma grande amplificação do ruído nas leituras das distâncias entre os emissores de ultra-sons e os receptores acústicos, enquanto que para ganhos excessivamente baixos, existe essencialmente uma integração das leituras ruidosas dos giroscópios em malha aberta, não existindo capacidade para compensar as polarizações nos giroscópios.

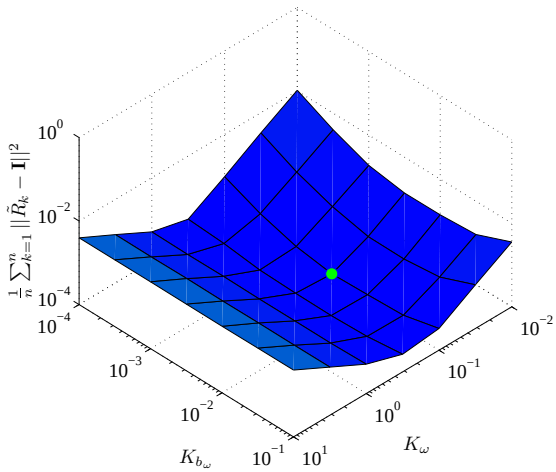


Figura 6.1: Erro quadrático médio do erro de atitude. O valor mínimo encontrado está identificado por uma bola verde.

6.4 Ganhos da Implementação Discreta do Observador de Posição, K_p e K_v

O sistema dos erros de posição e velocidade do observador em tempo contínuo, pode ser posto na forma da equação de erro de um filtro de Kalman-Bucy (Apêndice B). Dada esta propriedade utilizou-se a teoria associada para obter os melhores ganhos para o observador de posição. Assume-se que, os melhores ganhos para o observador em tempo contínuo, são também bons ganhos para a respectiva aproximação em tempo discreto.

Começa-se por admitir que não existe ruído nos giroscópios e que o erro de estimação de atitude e das polarizações nos giroscópios é nulo, ou seja, $\tilde{\mathcal{R}} = \mathbf{I}$ e $\tilde{\mathbf{b}_\omega} = \mathbf{0}$.

O sistema nominal de posição e velocidade é dado por

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{p}}} &= \bar{\mathbf{v}} - (\bar{\omega})^\wedge \bar{\mathbf{p}} \\ \dot{\bar{\mathbf{v}}} &= \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathcal{R}}^{TL}\bar{\mathbf{g}} - (\bar{\boldsymbol{\omega}})^\wedge \bar{\mathbf{v}}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

e o sistema das grandezas estimadas é definido como

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{p}}} &= \hat{\mathbf{v}} - (\bar{\boldsymbol{\omega}})^\wedge \hat{\mathbf{p}} - K_p\left(\hat{\mathbf{p}} - \bar{\mathcal{R}}^{TL}\mathbf{p}_{medido}\right) \\ \dot{\hat{\mathbf{v}}} &= \mathbf{a}_{sensor} + \hat{\mathcal{R}}^{TL}\bar{\mathbf{g}} - (\bar{\boldsymbol{\omega}})^\wedge \hat{\mathbf{v}} - K_v\left(\hat{\mathbf{p}} - \bar{\mathcal{R}}^{TL}\mathbf{p}_{medido}\right). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Considera-se que as medidas de aceleração e de posição expressa no referencial $\{\mathbf{L}\}$, se encontram corrompidas com ruído, tal que,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{sensor} &= \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{n}_a \\ {}^L\mathbf{p}_{medido} &= {}^L\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{n}_p, \end{aligned}$$

em que $\mathbf{n}_a$ e $\mathbf{n}_p$, são processos gaussianos de média nula e covariâncias dadas por

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\mathbf{n}_a(t)\mathbf{n}_a^T(\tau)) &= Q(t)\delta(t-\tau) \\
\mathcal{E}(\mathbf{n}_p(t)\mathbf{n}_p^T(\tau)) &= R(t)\delta(t-\tau) \\
Q &= \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_a^2 \end{bmatrix} \\
R &= \begin{bmatrix} \sigma_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p^2 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{E}(\mathbf{a})$, representa o valor esperado do processo estocástico $\mathbf{a}$, e σ_a^2 e σ_p^2 são, respectivamente, as variâncias por canal das medidas de aceleração e de posição expressa no referencial $\{\mathbf{L}\}$, ${}^L\mathbf{p}_{medido}$. O sistema estimador (6.2) pode então ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{p}}} &= \hat{\mathbf{v}} - (\bar{\boldsymbol{\omega}})^\wedge \hat{\mathbf{p}} - K_p\left(\hat{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathcal{R}}^T\mathbf{n}_p\right) \\
\dot{\hat{\mathbf{v}}} &= \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{n}_a + \hat{\mathcal{R}}^{TL}\bar{\mathbf{g}} - (\bar{\boldsymbol{\omega}})^\wedge \hat{\mathbf{v}} - K_v\left(\hat{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathcal{R}}^T\mathbf{n}_p\right).
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Utilizando (6.1) e (6.3), e definindo o erro de posição e velocidade respectivamente como, $\tilde{\mathbf{p}} := \hat{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}$ e $\tilde{\mathbf{v}} := \hat{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}$, obtém-se a dinâmica do sistema de erro

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\mathbf{p}}} &= \tilde{\mathbf{v}} - (\bar{\boldsymbol{\omega}})^\wedge \tilde{\mathbf{p}} - K_p\left(\tilde{\mathbf{p}} - \bar{\mathcal{R}}^T\mathbf{n}_p\right) \\
\dot{\tilde{\mathbf{v}}} &= \mathbf{n}_a - (\bar{\boldsymbol{\omega}})^\wedge \tilde{\mathbf{v}} - K_v\left(\tilde{\mathbf{p}} - \bar{\mathcal{R}}^T\mathbf{n}_p\right).
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Por forma a obter uma dinâmica invariável no tempo, realiza-se sobre $[\tilde{\mathbf{p}}^T\ \tilde{\mathbf{v}}^T]^T$ a transformação de Lyapunov, $T_{Lyap} = \left[\begin{smallmatrix} \bar{\mathcal{R}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathcal{R}} \end{smallmatrix}\right]$, em que $\dot{\bar{\mathcal{R}}} = \bar{\mathcal{R}}(\bar{\boldsymbol{\omega}})^\wedge$. A dinâmica obtida para o sistema transformado é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\bar{\mathcal{R}}\tilde{\mathbf{p}}) &= \bar{\mathcal{R}}\tilde{\mathbf{v}} - K_p\bar{\mathcal{R}}\tilde{\mathbf{p}} + K_p\mathbf{n}_p \\
\frac{d}{dt}(\bar{\mathcal{R}}\tilde{\mathbf{v}}) &= \bar{\mathcal{R}}\mathbf{n}_a - K_v\bar{\mathcal{R}}\tilde{\mathbf{p}} + K_v\mathbf{n}_p,
\end{aligned} \tag{6.5}$$

onde K_p e K_v, são matrizes diagonais com dimensões 3×3, com todos os elementos iguais e estritamente positivos. Repare-se que este sistema pode ser rescrito na forma da equação diferencial que rege a dinâmica do erro de um filtro de Kalman-Bucy (B.5)

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = F\tilde{\mathbf{x}} - KH\tilde{\mathbf{x}} + K\mathbf{v} - G\mathbf{w},$$

com

$$F = \left[\begin{smallmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{smallmatrix}\right],\ K = \left[\begin{smallmatrix} -K_p \\ -K_v \end{smallmatrix}\right],\ H = \left[\begin{smallmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{smallmatrix}\right],\ G = \left[\begin{smallmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{smallmatrix}\right],\ \mathbf{v} = -\mathbf{n}_p,\ \text{e}\ \mathbf{w} = \bar{\mathcal{R}}\mathbf{n}_a$$

Para poder calcular os ganhos através da teoria de filtros de Kalman-Bucy, é necessário conhecer as matrizes de covariância de $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$. Dado que Q e R são matrizes diagonais com todos os elementos idênticos, tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\mathbf{w}\mathbf{w}^T) &= \mathcal{E}(\bar{\mathcal{R}}\mathbf{n}_a\mathbf{n}_a^T\bar{\mathcal{R}}^T) = \bar{\mathcal{R}}\mathcal{E}(\mathbf{n}_a\mathbf{n}_a^T)\bar{\mathcal{R}}^T = \bar{\mathcal{R}}\sigma_a^2\mathbf{I}\bar{\mathcal{R}}^T = \bar{\mathcal{R}}\bar{\mathcal{R}}^T\sigma_a^2\mathbf{I} = \sigma_a^2\mathbf{I} = Q \\
\mathcal{E}(\mathbf{v}\mathbf{v}^T) &= \mathcal{E}(\mathbf{n}_p\mathbf{n}_p^T) = R
\end{aligned}$$

A matriz de ganhos óptimos estacionários, K, é dada pela equação (B.9)

$$K = PHR^{-1}. \tag{6.6}$$

em que P é a matriz de covariância de $\tilde{\mathbf{x}}$,

$$P := \mathcal{E}\left(\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T\right),$$

que é dada pela solução em regime estacionário da equação de Ricatti em tempo contínuo (B.10)

$$0 = FP + PF^T - PH^T R^{-1} HP + GQG^T. \tag{6.7}$$

Admitindo que as variâncias das medidas de aceleração e de posição são as representadas na Tabela 6.1, e resolvendo a equação (6.7) obtém-se a seguinte matriz de covariância

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}0010 & 0 & 0 & 0{,}0003 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0010 & 0 & 0 & 0{,}0003 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0010 & 0 & 0 & 0{,}0003 \\ 0{,}0003 & 0 & 0 & 0{,}0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0003 & 0 & 0 & 0{,}0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0003 & 0 & 0 & 0{,}0001 \end{bmatrix}$$

Utilizando este resultado na expressão (6.6), calcula-se a matriz de ganhos óptimos

$$K = \begin{bmatrix} 0{,}5180 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5180 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5180 \\ 0{,}1342 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1342 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1342 \end{bmatrix}$$

Para verificar que os ganhos K são igualmente óptimos para o sistema de erro antes da transformação (6.4), mostra-se que a matriz de covariância não é alterada pela transformação. Como P é constituído por quatro sub-matrizes diagonais, de dimensão 3×3, e cada uma das sub-matrizes contém todos os elementos iguais, tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\left(\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T\right) &= \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{R}}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathcal{R}}^T \end{bmatrix} \mathcal{E}\left(\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T\right) \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{R}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathcal{R}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{R}}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathcal{R}}^T \end{bmatrix} \mathcal{E}\left(\begin{bmatrix} \bar{\mathcal{R}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathcal{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{R}}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathcal{R}}^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{R}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathcal{R}} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{R}}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathcal{R}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{R}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathcal{R}} \end{bmatrix} \mathcal{E}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix}^T \right) \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{R}}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathcal{R}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{R}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathcal{R}} \end{bmatrix} = \mathcal{E}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix}^T \right) \end{aligned}$$

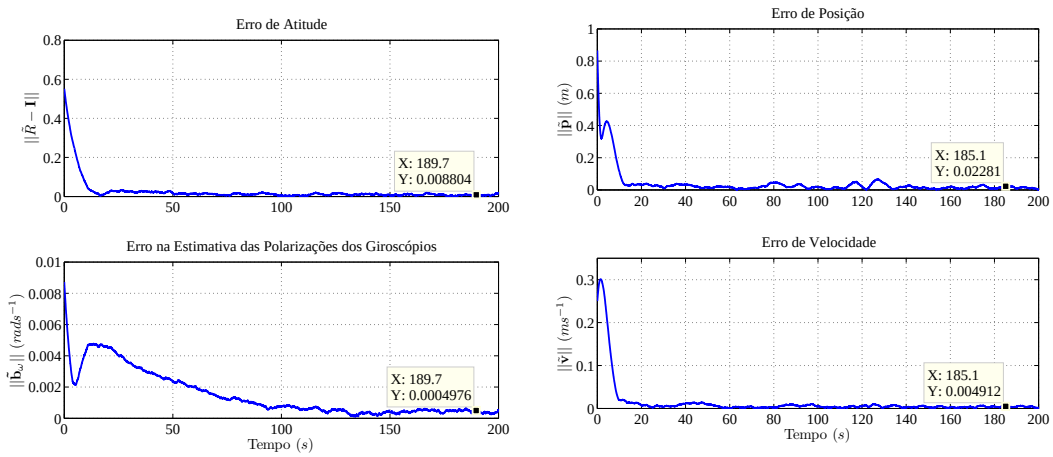
6.5 Resultados de Simulação

Foi realizada uma simulação, com o objectivo de ilustrar a evolução das estimativas de posição, velocidade, atitude, e polarizações nos giroscópios, quando as medidas dos sensores são ruidosas. Os valores dos ruídos e polarizações utilizados nesta simulação, são idênticos aos apresentados na Tabela 6.1, em função os quais, nas secções anteriores foram calculados os ganhos para a aproximação em tempo discreto do observador. Nesta simulação, o veículo descreve uma trajectória em hélice alinhada com eixo dos zz com velocidade angular, $0,125\ rads^{-1}$. Considerou-se que as posições dos emissores e dos receptores são idênticas às utilizadas na Secção 6.3, sendo os erros iniciais, os apresentados na Tabela 6.2.

O gráfico da Figura 6.2(a) mostra a evolução temporal dos erros de atitude e de estimação das polarizações nos giroscópios. Verifica-se que a aproximação em tempo discreto do observador é

Tabela 6.2: Erros inicias da simulação com ruído nos sensores.

Grandeza	Erros Iniciais
$\theta(t_0)$	$\frac{\pi}{180}22,5\ (rad)$
$\tilde{\mathbf{b}}_\omega(t_0)$	$\frac{\pi}{180}[0,5\ 0,5\ 0,5]^T\ (rads^{-1})$
$\tilde{\mathbf{p}}(t_0)$	$[0,5\ 0,5\ 0,5]^T\ (m)$
$\tilde{\mathbf{v}}(t_0)$	$[0,25\ 0\ \ -0,005]^T\ (ms^{-1})$



(a) Evolução no tempo dos erros de estimação de atitude e polarizações nos giroscópios.

(b) Evolução no tempo dos erros de estimação de posição e velocidade.

Figura 6.2: Evolução no tempo dos erros de estimação do observador.

capaz de corrigir o erro de atitude inicial, não sendo possível elimina-lo totalmente devido ao ruído dos sensores. Encontra-se identificado no gráfico de atitude um ponto correspondente, aproximadamente, ao erro em regime estacionário. Pela a equação (3.7), sabe-se é válida a igualdade

$$\|\tilde{\mathcal{R}}(t)-\mathbf{I}\|^2 = 4\left(1-\cos\left(\theta\left(t\right)\right)\right), \tag{6.8}$$

através da qual é possível concluir que nesse ponto, o valor do ângulo correspondente à representação por vector de rotação, é $\theta(t=189,7\ s)\approx 6,222\times 10^{-3}\ rad\approx 0,357°$. A estimativa das polarizações em regime estacionário, apresenta um erro da ordem de $0,0005\ rads^{-1}$.

Os erros das estimativas de posição e velocidade são mostradas no gráfico da Figura 6.2(b). Observa-se que a aproximação em tempo discreto do observador corrige as estimativas iniciais de posição e velocidade, e que a posição apresenta um erro, em regime estacionário, de aproximadamente de $0,0228\ m$, e a velocidade, um erro de $0,0049\ ms^{-1}$.

A fim de comparar a posição estimada e a posição fornecida pelo sistema de posicionamento por ultra-sons, é apresentado o gráfico da Figura 6.3. É possível observar que o erro da estimativa de posição, é menor que a média do erro da posição fornecida pelos sensores, que tem o valor de $0,069\ m$. A estimativa dada pela aproximação em tempo discreto do observador, além de mais precisa,

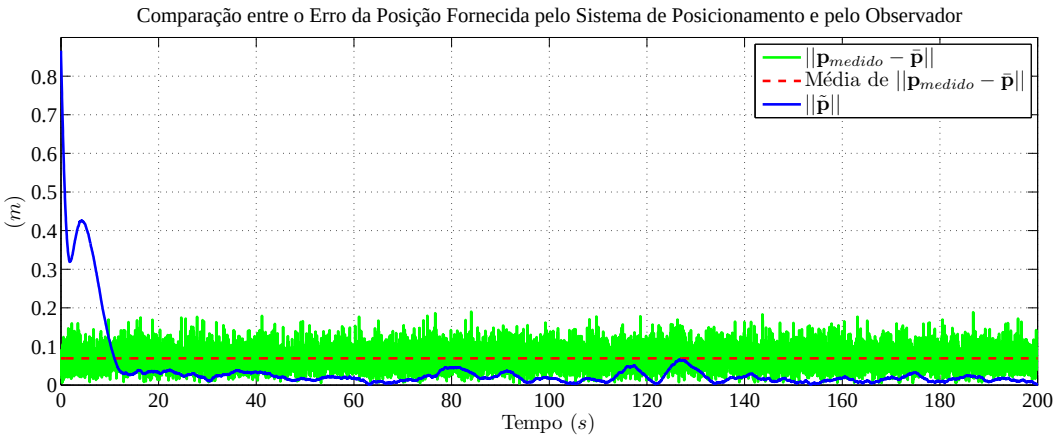


Figura 6.3: Comparação entre a estimativa do erro de posição fornecida pelo sistema de posicionamento de ultra-sons e a fornecida pelo observador.

é também menos ruidosa, o que é conveniente se a posição estimada for a entrada de um sistema de controlo. Este sistema de navegação apresenta também as vantagens de estimar simultaneamente o vector de velocidade, e de poder a estimar a posição e a velocidade apenas com base nos sensores inerciais, por integração em malha aberta das respectivas leituras, caso as medidas dos sensores externos fiquem temporariamente inacessíveis.

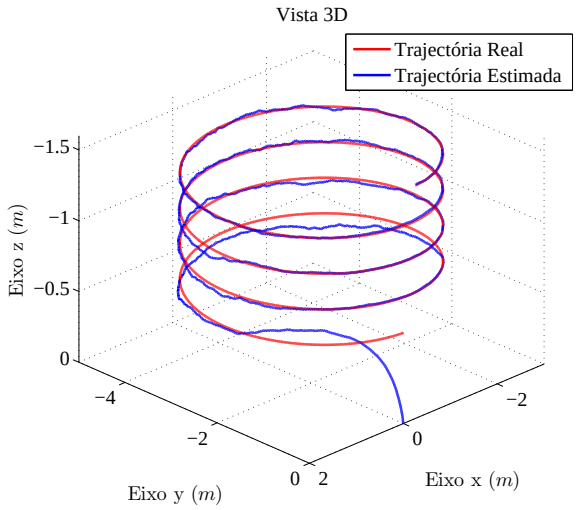


Figura 6.4: Trajectórias real e estimada em três dimensões quando existem não idealidades nos sensores.

A Figura 6.4 mostra a trajectória real e a posição estimada. Pode observar-se a diferença entre as posições iniciais, e a convergência da posição estimada para a posição real.

6.6 Comentários Finais

Foi proposto um procedimento para determinar os ganhos para a implementação em tempo discreto do observador. Identificaram-se as não idealidades presentes em cada sensor. Considerou-se a existência de ruído nas medidas de aceleração, nas medidas de velocidade angular, nas medidas das distâncias os emissores e os receptores, e na posição obtida pelo método de interpolação esférica, e considerou-se também a existência de polarizações nos giroscópios. Os ruídos foram modelados como sendo gaussianos de média nula.

Para obter os ganhos K_ω e K_{b_ω} foi realizado um processo conhecido na literatura anglo-saxónica como *griding*, em que foi calculado o erro quadrático médio de atitude para diferentes pares de ganhos. Tendo-se obtido erro mínimo para os ganhos $K_\omega = 0,1$ e $K_{b_\omega} = 0,0032$.

A técnica empregue na determinação dos ganhos K_p e K_v da implementação em tempo discreto do observador, foi distinta da anterior. Considerando exactas as estimativas de atitude e polarizações, e através de uma transformação linear conveniente, foi possível transformar o sistema dos erros de estimação do observador de posição em tempo contínuo, num sistema linear com uma estrutura semelhante à dinâmica do erro de um filtro de Kalman. Dada esta propriedade, recorreu-se à teoria associada a estes filtros para determinar os ganhos óptimos. Mostrou-se também que os ganhos são igualmente óptimos para o observador de posição, uma vez que a transformação realizada não altera a covariância do erro de estimação do sistema. Dado que a implementação em tempo discreto aproxima o comportamento do sistema em tempo contínuo, é expectável que esses ganhos também apresentem um desempenho razoável para a implementação em tempo discreto proposta para o filtro. Os valores obtidos para os ganhos do observação são $K_p = 0,5180$ e $K_v = 0,1342$.

Por fim foram apresentadas simulações ilustrativas do desempenho da implementação em tempo discreto do observador quando as medidas fornecidas pelos sensores estão corrompidas por ruído gaussiano de média nula. Verificou-se que os estados estimados convergem para os estados reais. Tal como seria de esperar, existe um erro em regime estacionário devido ao ruído dos sensores, contudo, observou-se que este erro é bastante pequeno, sendo da ordem de $0,35$ graus para o erro de atitude, $0,0228\ m$ para o erro de posição, e $0,0049\ ms^{-1}$ para o erro de velocidade. O erro em regime estacionário da estimativa das polarizações dos giroscópios é da ordem do valor real, pelo que se pode afirmar que o ruído é demasiado elevado para estimar correctamente o valor desta grandeza.

Capítulo 7

Conclusões e Trabalho Futuro

Neste trabalho, desenvolveu-se um algoritmo de navegação, utilizando uma abordagem distinta das técnicas utilizadas tradicionalmente na literatura. A abordagem adoptada, baseou-se na síntese de observadores não lineares em tempo contínuo, que foram posteriormente implementados em tempo discreto.

Foram desenvolvidos dois observadores, um sem a capacidade de estimar as polarizações nos giroscópios e outro com esta capacidade. Cada um dos observadores derivados é constituído por um observador de atitude, que estima a orientação do veículo, e por um observador de posição, que estima a posição e a velocidade do veículo. Ambos os observadores de atitude são baseados em [15] e [16]. A síntese dos observadores de posição é uma das principais contribuições deste trabalho. Nesse sentido, foi provada a estabilidade exponencial global de ambos os observadores de posição e a convergência exponencial dos estados estimados para os estados reais.

Com o objectivo de implementar em computador os observadores desenvolvidos, foram estudadas várias técnicas de integração numérica. Foi dada especial atenção às técnicas que permitem integrar numericamente a equação diferencial de atitude, garantindo que a matriz resultante de cada iteração se mantém no grupo $\mathrm{SO}(3)$, uma vez que com os métodos usuais de integração tal não é possível.

Estas técnicas foram aplicadas na implementação discreta do observador com capacidade de estimar as polarizações dos giroscópios e foi obtido um algoritmo discreto, implementável em computador. Foi também proposto e executado, um procedimento para obter os valores dos ganhos de retroacção a utilizar na implementação em tempo discreto do observador, que permitem minorar os erros de estimação produzidos pela existência de ruído nos sensores.

Considera-se que este trabalho atingiu os seus objectivos, resalvando-se a necessidade de continuar os estudos, a fim de atingir o objectivo mais alargado de desenvolver e caracterizar um protótipo, a implementar nas plataformas aéreas do DSOR do ISR. Nesse sentido, sugerem-se como tópicos de trabalho futuro, a análise da convergência das diversas utilizações do método do ponto-fixo, a validação do trabalho desenvolvido através da sua implementação prática, e a comparação do seu desempenho com as soluções já existentes.

Apêndice A

Geometria do Grupo de Rotações

Seja $\mathrm{M}(3)$o conjunto de todas as matrizes reais com dimensão 3×3 e $\mathrm{GL}(3)$o seu subconjunto que apenas contém matrizes não singulares. O grupo de rotações em $\mathbb{R}^3$, denominado $\mathrm{SO}(3)$, é o grupo das transformações ortogonais com determinante positivo unitário em $\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{SO}(3) = \left\{\mathcal{R} \in \mathrm{GL}(3) : \mathcal{R}^T\mathcal{R} = \mathbf{I} \wedge \det(\mathcal{R}) = 1\right\},$$

onde $\mathbf{I}$ é a transformação identidade em $\mathbb{R}^3$. A álgebra de Lie correspondente, $\mathfrak{so}(3)$, é o espaço das matrizes anti-simétricas

$$\mathfrak{so}(3) = \left\{A \in \mathfrak{gl}(3) : A^T = -A\right\},$$

onde $\mathfrak{gl}(3)$, o espaço das transformações lineares em $\mathbb{R}^3$, é a álgebra de Lie associada com o grupo de Lie $\mathrm{GL}(3)$[51].

A.1 Exponencial e Logaritmo

A exponencial de uma matriz X em $\mathrm{GL}(3)$denota-se por $\mathrm{Exp}(X)$ e é dada pelo limite da série convergente $\mathrm{Exp}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} X^k$. Quando a matriz Y pertencente a $\mathrm{GL}(3)$, não tem valores próprios na linha (fechada) real negativa, existe um único algoritmo real, denominado o logaritmo principal, e denotado por Log(Y), cujo espectro se localiza no infinito faixa $\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$ do plano complexo. Para qualquer norma matricial $||.||$, se $||\mathbf{I} - Y|| < 1$ então a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{I}-Y)^k}{k}$ converge e pode-se escrever $\mathrm{Log}(Y) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{I}-Y)^k}{k}$ [51]. A exponencial de uma matriz anti-simétrica A, com $0 \leq ||A^\vee|| < \pi$, é a matriz ortogonal com determinante unitário dada pela fórmula de Rodrigues

$$\mathrm{Exp}(A) = \begin{cases} \mathbf{I}, & \text{se } ||A^\vee|| = 0, \\ \mathbf{I} - \frac{\sin(||A^\vee||)}{||A^\vee||}A + \frac{1-\cos(||A^\vee||)}{||A^\vee||^2}A^2, & \text{se } ||A^\vee|| \neq 0. \end{cases}$$

Por esta função exponencial mapear matrizes da álgebra de Lie, $\mathfrak{so}(3)$, para matrizes do grupo de Lie, $\mathrm{SO}(3)$, é denominada de *mapa exponencial* em $\mathrm{SO}(3)$.

O logaritmo principal para uma matriz $\mathcal{R}$ em $\mathrm{SO}(3)$, é a matriz em $\mathfrak{so}(3)$ dada por [51]

$$\mathrm{Log}(A) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{se } \theta = 0, \\ \frac{\theta}{2\sin\theta}(\mathcal{R} - \mathcal{R}^T), & \text{se } \theta \neq 0, \end{cases}$$

onde θ satisfaz $\mathrm{tr}(\mathcal{R}) = 1 + 2\cos(\theta)$ e $|\theta| < \pi$ (esta fórmula não é válida quando $\theta = \pm\pi$).

Apêndice B

Filtro de Kalman em Tempo Contínuo

James Follin, A. G. Carlton, James Hanson, e Richard Bucy desenvolveram o filtro de Kalman em tempo contínuo num trabalho não publicado para o laboratório Johns Hopkins Applied Physics na década de 1950. Rudolph Kalman, num trabalho independente, desenvolveu o filtro de Kalman em tempo discreto em 1960. Tomando consciência do trabalho de cada um, Kalman e Bucy colaboraram na publicação do filtro de Kalman em tempo contínuo em [6].

O filtro de Kalman em tempo contínuo, ou filtro de Kalman-Bucy, devido ao extenso uso de computadores digitais, não é tão vastamente utilizado na prática, como o seu parente mais próximo, o filtro de Kalman discreto. Ainda assim existem aplicações em que é necessário utilizar estes filtros.

B.1 Derivação do Filtro

Considere-se o seguinte modelo nominal para o sistema dinâmico.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) + G(t)\mathbf{w}(t) \tag{B.1}$$

$$\mathbf{z}(t) = H(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t), \tag{B.2}$$

onde $\mathbf{u}(t)$ é uma entrada determinística, e $\mathbf{w}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são processos estocásticos gaussianos de média nula com covariâncias dadas por

$$\mathcal{E}\left\{\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(\tau)\right\} = Q(t)\delta(t-\tau)$$
$$\mathcal{E}\left\{\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(\tau)\right\} = R(t)\delta(t-\tau)$$
$$\mathcal{E}\left\{\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(\tau)\right\} = 0,$$

em que $\mathcal{E}\{\mathbf{a}\}$, representa o valor esperado do processo $\mathbf{a}$.

A estrutura do filtro de Kalman para este sistema é dada por

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = F(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) + K(t)[\mathbf{z}(t) - H(t)\hat{\mathbf{x}}] \tag{B.3}$$

$$\mathbf{z}(\hat{t}) = H(t)\mathbf{x}(\hat{t}). \tag{B.4}$$

Definindo o erro de estimação como $\tilde{\mathbf{x}} := \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ e utilizando as equações (B.1), (B.2) e (B.3), obtém a seguinte dinâmica para o erro de estimação

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = F(t)\tilde{\mathbf{x}} - K(t)H(t)\tilde{\mathbf{x}} + K(t)\mathbf{v}(t) - G(t)\mathbf{w}(t). \tag{B.5}$$

A solução para o sistema (B.5) é dada por [52]

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t, t_0)\tilde{\mathbf{x}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\left(K(t)\mathbf{v}(t) - G(t)\mathbf{w}(t)\right) d\tau, \tag{B.6}$$

onde $\Phi(t, t_0)$ é a matriz de transição do sistema (B.5) [37, Definição 4.2].

A covariância do erro de estado é definida por

$$P(t) := \mathcal{E}\left\{\tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}^T(t)\right\}. \tag{B.7}$$

Substituindo a equação (B.6) em (B.7) obtém-se

$$\begin{aligned} P(t) &= \Phi(t, t_0)P(t_0)\Phi^T(t, t_0) \\ &+ \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\left[K(\tau)R(\tau)K^T(\tau) + G(\tau)Q(\tau)G^T(\tau)\right]\Phi^T(t, t_0)d\tau. \end{aligned}$$

A derivada em ordem ao tempo de $P(t)$ é dada por [52]

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= \left[F(t) - K(t)H(t)\right]P(t) + P(t)\left[F(t) - K(t)H(t)\right]^T \\ &+ G(t)Q(t)G^T(t) + K(t)R(t)K^T(t). \end{aligned} \tag{B.8}$$

Para determinar o ganho $K(t)$, minimiza-se uma função de custo dada pelo traço de $\dot{P}(t)$. É condição necessária para o mínimo, que a derivada da função de custo em ordem ao ganho, seja nula

$$\frac{\partial}{\partial K(t)} \operatorname{tr}(\dot{P}(t)) = 2K(t)R(t) - 2P(t)H^T(t) = 0.$$

Resolvendo a equação anterior em ordem a $K(t)$ obtém-se

$$K(t) = P(t)H^T(t)R^{-1}(t). \tag{B.9}$$

E a substituição da equação (B.9) em (B.8) origina

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) - P(t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t) + G(t)Q(t)G^T(t). \tag{B.10}$$

Esta equação é conhecida como a *equação de Ricatti em tempo contínuo*. Como para sistemas invariantes no tempo, a covariância do erro $P(t)$ atinge o regime estacionário muito rapidamente, para obter o denominado ganho estacionário, K, usualmente, resolve-se a equação de Ricatti em regime estacionário, ou seja, com $\dot{P}(t) = 0$.

O observador resultante em regime estacionário, para além da optimalidade apresenta um conjunto de propriedades interessantes as quais são sumarizadas no seguinte teorema [53]

Teorema 9. *Considere o problema de filtragem óptimo. Considere ainda que:*

- *o par (F,H) é observável;*

- *o par (F,G) é controlável.*

Então existe uma e só uma solução positiva definida $P > 0$ *da equação Algébrica de Riccati do filtro*

$$0 = FP + PF^T - PH^T R^{-1} HP + GQG^T.$$

E o observador do estado resultante com estrutura

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}}(t) = F\hat{\mathbf{x}}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) + K(t)[\mathbf{z}(t) - H\hat{\mathbf{x}}(t)],\ K = P(t)H^T R^{-1}$$

é sempre estável.

Referências Bibliográficas

[1] J. J. Craig. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. Addison-Wesley, Segunda Edição, 1989.

[2] A. Lawrence. *Modern Inertial Technology*. Springer-Verlag, New York, Segunda Edição, 1998.

[3] P. M. Girão. Elementos de apoio à disciplina de sensores e actuadores. Instituto Superior Técnico, 2002.

[4] H. Pina. *Métodos Numéricos*. McGraw-Hill, Alfragide, 1995.

[5] D. G. Luenberger. Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Military Electronics*, 8(2):74–80, Abr. 1964.

[6] R.E. Kalman e R.S Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 83:95–108, 1961.

[7] N. Chaturvedi e N. McClamroch. Almost global attitude stabilization of an orbiting satellite including gravity gradient and control saturation effects. In *2006 American Control Conference*, Minnesota, USA, Jun. 2006.

[8] D. Fragopoulos e M. Innocenti. Stability considerations in quaternion attitude control using discontinuous Lyapunov functions. *IEE Proceedings on Control Theory and Applications*, 151(3):253–258, Mai. 2004.

[9] D. E. Koditschek. The Application of Total Energy as a Lyapunov Function for Mechanical Control Systems. *Control Theory and Multibody Systems*, 97:131–151, 1989.

[10] M. Malisoff, M. Krichman, e E. Sontag. Global stabilization for systems evolving on manifolds. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 12(2):161–184, Abr. 2006.

[11] S. Salcudean. A globally convergent angular velocity observer for rigid body motion. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(12):1493–1497, Dez. 1991.

[12] T. Lee, M. Leok, M. McClamroch, e A Sanyal. global atitude estimation using single direction measurements. In *2007 American Control Conference*, New York, EUA, Jul. 2007.

[13] H. Rehbinder e B. Ghosh. Pose estimation using line-based dynamic vision and inertial sensors. *IEEE transactions on automatic control*, 48(2):186–199, Fev. 2003.

[14] S. Bonnabel, P. Martin, e P. Rouchon. a non-linear symmetry-preserving for velocity-aided inertial navigation. In *2006 American Control Conference*, Minneapolis, Minnesota, EUA, Jun. 2006.

[15] J. Vasconcelos, R. Cunha, C. Silvestre, e P. Oliveira. Landmark based nonlinear observer for rigid body attitude and position estimation. In *46th IEEE Conference on Decision and Control*, Dez. 2007.

[16] J. Vasconcelos, R. Cunha, C. Silvestre, e P. Oliveira. Landmark based nonlinear observer for rigid body attitude and position estimation. In *17th IFAC World Congress*, Coreia do Sul, Seul, Jul. 2008.

[17] J. Vasconcelos, C. Silvestre, e P. Oliveira. A nonlinear GPS/IMU based observer for rigid body attitude and position estimation. por publicar, 2008.

[18] P. Batista, C. Silvestre, e P. Oliveira. Position and velocity navigation filters for marine vehicles. In *17th IFAC World Congress*, Coreia do Sul, Seul, Jul. 2008.

[19] J. Pflimlin, T. Hamel, e P. Souères. Nonlinear attitude and gyroscope's bias estimation for a VTOL UAV. *International Journal of Systems Science*, 38(3):197–210, Mar. 2007.

[20] J. Thienel e R. M. Sanner. A coupled nonlinear spacecraft attitude controller and observer with an unknown constant gyro bias and gyro noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(11):2011–2015, Nov. 2003.

[21] P. E. Crouch e R. Grossman. Numerical integration of ordinary differential equations on manifolds. *J. Nonlinear Science*, 3:1–33, 1993.

[22] D. Lewis e J. Simo. Conserving algorithms for the dynamics of Hamiltonian systems of Lie groups. *J. Nonlinear Sci.*, 4:253–299, 1994.

[23] D. Lewis e J. Simo. Conserving algorithms for the n-dimensional rigid body. *Fields Inst. Com.*, 10, 1995.

[24] H. Z. Munthe-Kaas. Lie-Butcher theory for Runge-Kutta methods. *BIT*, 35(4):572–587, 1995.

[25] H. Z. Munthe-Kaas. Runge-Kutta methods on Lie Groups. *BIT*, 38(1):92–11, 1998.

[26] H. Munthe-Kaas. High order Runge-Kutta methods on manifolds. *Appl. Numer. Math.*, 29(1):115–127, 1999.

[27] B. Owren. Order conditions for Commutator-free Lie group methods. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 39:5585–5599, 2006.

[28] E. Celledoni, A. Marthinsen, e B. Owren. Commutator-free Lie group methods. *Future Generation Computer Systems*, 19(3):341–352, Abr. 2003.

[29] R. M. Murray, Z. Li, e S. S. Sastry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC, 1994.

[30] W. Hamilton. On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions. *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 2:pp. 424–434, Nov. 1844.

[31] S. Marques. Small satellites attitude determination methods. Master's thesis, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 2001.

[32] J. Calvário e J. Vasconcelos. Estratégias de fusão sensorial para sistemas de navegação com aplicações a helicópteros autónomos. Trabalho Final de Curso, Set. 2003. Instituto Superior Técnico - Universidade Técnica de Lisboa.

[33] J. O. Smith e J. S. Abel. The spherical interpolation method of source localization. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 12(1):246–252, Jan. 1987.

[34] D. S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations*. Wiley-Interscience, Segunda Edição, New York 2002.

[35] J. M. Lemos. Elementos de apoio à disciplina de controlo em espaço de estados. Instituto Superior Técnico, 2000.

[36] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New Jersey, third edition, 2002.

[37] Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA, 1998.

[38] A. Loría e E. Panteley. Uniform exponential stability of linear time-varying systems: Revisited. *Systems and Control Letters*, 47(1):13–24, Set. 2002.

[39] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Segunda Edição, 1996.

[40] E. D. Sontag e Y. Wang. New characterizations of input to state stability property. *IEEE Trans. Autom. Control*, (41):1283–1294, 1996.

[41] I. Lourtie. *Sinais e Sistemas*. Escolar Editora, Set. 2002.

[42] M. Ribeiro. *Análise de Sistemas Lineares*, volume 1. IST Press, Mar. 2002.

[43] J. Stoer e R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag, Segunda Edição, 1992.

[44] G. F. Franklin, J. D. Powell, e A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, Terceira Edição, 1994.

[45] G. F. Franklin, J. D. Powell, e M. L. Workman. *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, Segunda Edição, Jul. 1994.

[46] E. Hairer, C. Lubich, e G. Wanner. *Geometric Numerical Integration, Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, volume 31 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer, Segunda Edição, 2006.

[47] Jonghoon Park e Wan-Kyun Chung. Geometric integration on Euclidean group with application to articulated multibody systems. *IEEE Transactions on Robotics*, 21(5):850–863, Oct. 2005.

[48] V. S. Varadajan. *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representation (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer-Verlag, New York, 1984.

[49] B. Owren e A. Marthinsen. Runge-Kutta methods adapted to manifolds and based on rigid frames. *BIT Numerical Mathematics*, 39(1):116–142, 1999.

[50] Z. Jackiewicz, A. Marthinsen, e B. Owren. Construction of Runge-Kutta methods of Crouch-Grossman type of high order. *Adv. Computat. Math.*, 13(4):405–415, 2000.

[51] M. Moakher. Means and averaging in the group of rotations. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 24(1):1–16, 2002.

[52] J. Crassidis e J. Junkins. *Optimal Estimation of Dynamic Systems*. Chapman & Hall/CRC, Londres, 2004.

[53] B. Anderson e J. Moore. *Optimal Filtering*. Dover Publications, 1979.