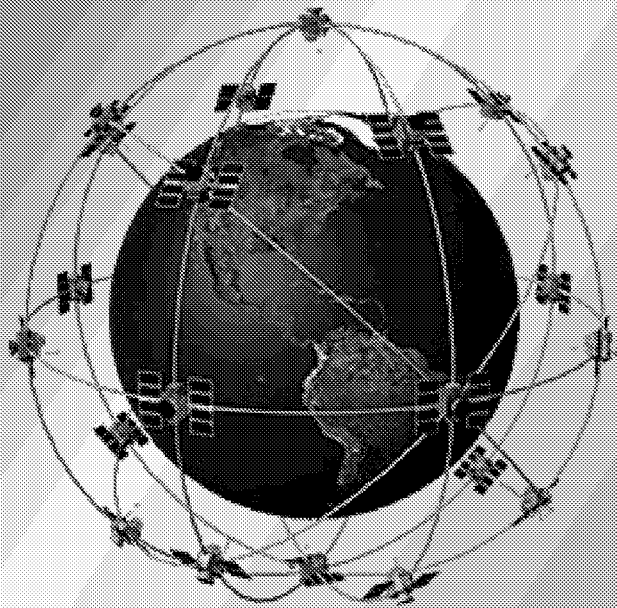
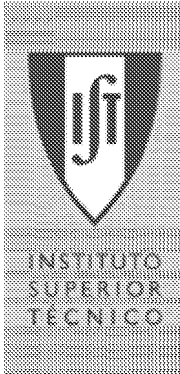


INSTITUTO
SUPERIOR
TÉCNICO





Localização e orientação baseadas em GPS

*- Posicionamento e orientação de
uma plataforma móvel -*

Trabalho Final de Curso realizado no Instituto Superior Técnico por:

Paulo Jorge da Silva Carvalho aluno nº 462-AM

Orientador: Prof. Paulo Jorge Oliveira, Instituto Superior Técnico

- Lisboa, Junho 2002 -

RESUMO

Este trabalho foi realizado no Instituto Superior Técnico no âmbito do trabalho final de curso da Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores.

O objectivo principal que norteia este trabalho, consiste em analisar a viabilidade da implementação, numa plataforma móvel, de um sistema de navegação que utilizando as leituras de múltiplos receptores GPS, permita alcançar uma solução de navegação.

Tal objectivo implica procurar resposta a várias perguntas: que tipo de receptores se podem utilizar, qual o número de receptores necessário, quais as condições em que tal sistema pode operar e de que forma os resultados por ele obtidos podem melhorar relativamente aos que se obtêm utilizando os sistemas de navegação tradicionais.

Do estudo resulta que a utilização de múltiplos receptores traz vantagem em termos de amplificação dos erros de medição associados ao tipo de receptor utilizado, ou seja ao se utilizar mais que um receptor obtém-se uma maior precisão de posicionamento.

Em termos de aplicações para tal sistema pode pensar-se que uma vez encontrada com sucesso a solução de navegação será possível controlar essa plataforma à distância em tempo real, a partir de qualquer ponto da superfície terrestre e de forma independente das condições meteorológicas existentes.

Palavras Chave: Posicionamento, Orientação, NAVSTAR-GPS, Satélites,
Erros de medição, Precisão

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Siglas

I. INTRODUÇÃO

1.1 Propósitos

Desde sempre o Homem teve necessidade de se situar no espaço, procurando, em todo o instante responder a duas questões essenciais: Onde estou? Para onde vou?

Assim nasceram dois conceitos de importância e complexidade crescentes à medida que o Homem expandiu as fronteiras do espaço em que se movimenta: Posicionamento e Navegação.

Neste domínio e sobretudo à medida que o conhecimento tecnológico foi avançando, inúmeras tentativas foram realizadas com o intuito de criar sistemas capazes de satisfazer esta exigência de conhecimento. Contudo, parecia não ser possível atingir-se tal objectivo de forma *completa* dado que quaisquer dos sistemas desenvolvidos continuavam a apresentar fortes limitações no seu uso, que se traduziam, por exemplo, num pequeno raio de acção. Assim, a solução consistia em gerir tais limitações adoptando para cada tipo de actividade o sistema que apresentasse as limitações globalmente menos prejudiciais.

No começo da década de 70, o aparecimento de um novo projecto¹ veio alimentar as esperanças de que tais limitações em precisão e funcionalidade pudessem ser finalmente ultrapassadas. Tal projecto permitia determinar a posição de um utilizador a partir de sinais rádio enviados por satélites, criteriosamente dispostos em volta da Terra. O mesmo denominava-se GPS – Global Positioning System.

O GPS era destinado exclusivamente a aplicações militares, mas por decisão política viu mais tarde, a sua aplicabilidade ser estendida à sociedade civil o que muito contribuiu para que hoje seja possível afirmar, que o seu sucesso é completo.

O seu uso veio progressivamente complementar, ou em alguns casos até mesmo a substituir, os sistemas tradicionais utilizados nas mais variadas actividades e ainda hoje vão surgindo novas aplicações que, tirando proveito das capacidades deste sistema, nos vão surpreendendo pelo seu resultado.

¹ Na verdade não se tratava de um só projecto. Dada a conjectura da Guerra Fria as duas potências mundiais exploravam o desenvolvimento tecnológico quase em paralelo. Daí a necessidade de efectuar referência ao sistema desenvolvido e operado pela Rússia, o sistema GLONASS, apesar de se explorar apenas o sistema americano, o GPS.

O que se procura neste trabalho é explorar as vantagens trazidas pelo uso de múltiplos receptores, que quando colocados numa plataforma móvel, para além de permitirem obter uma posição tridimensional com a precisão característica de um receptor GPS vulgar, nos permitem por um lado reunir mais informação necessária à determinação da atitude da plataforma e por outro melhorar a precisão no posicionamento da mesma.

1.2 Organização

O capítulo 2, de carácter introdutório, faz a abordagem aos três tópicos diferenciados que constituem os conceitos fundamentais necessários à compreensão do trabalho apresentado. Começa por dar a conhecer o sistema *GPS* (Global Positioning System) e analisar com algum detalhe o seu funcionamento, sendo dado neste ponto particular ênfase aos aspectos relacionados com a precisão do sistema. Segue-se uma abordagem às técnicas de *Descrição de Posição e Atitude de Corpos Rígidos*, com a profundidade necessária à formulação do nosso problema em termos matemáticos. Por último, faz a abordagem aos aspectos mais relevantes da teoria da *Optimização Não-linear* que irão permitir resolver o problema formulado.

O capítulo 3, entra já no domínio do estudo propriamente dito e começa por analisar o número de receptores a utilizar. Depois estabelece a localização destes na plataforma, e formula então o problema em termos matemáticos. Resulta inicialmente um sistema não linear, com 3 equações por cada receptor utilizado, e 6 incógnitas, cuja complexidade de resolução irá conduzir à sua reformulação passando a ser tratado como uma única função que se pretende minimizar. Ter-se-á assim um problema que é na sua essência um problema de optimização não-linear, e parte-se em busca de um algoritmo iterativo, o mais simples de programar possível, que seja capaz de encontrar a solução procurada (isto é, que veja asseguradas as condições de convergência) e ainda, que para o fazer “consume” o menor tempo possível (sendo este quantificado em ciclos cumpridos pelo programa).

O algoritmo foi programado na linguagem do MATHLAB™, tendo sido necessário criar paralelamente, também neste programa, dois outros blocos por forma a se conseguir testar, correr, e demonstrar o seu correcto funcionamento. Um primeiro bloco de simulação utilizando o SIMULINK™, capaz de gerar os valores simulados das

leituras de 4 receptores GPS colocados na plataforma quando esta se encontra em movimento. O outro bloco, consiste numa interface gráfica capaz de mostrar passo-a-passo toda a informação útil para os utilizadores de tal sistema, informação essa que se obtém a partir da aplicação do algoritmo às leituras dos receptores e se materializa, por exemplo, na velocidade média da plataforma.

O capítulo 4, explora a problemática da existência de erros nas leituras produzidas pelos diferentes tipos de receptor GPS. Procura-se caracterizar estatisticamente estes erros de forma a permitir a sua inclusão nos dados da simulação.

O capítulo 5, trata a influência dos erros associados às medições dos diferentes tipos de receptor. A inclusão destes erros irá permitir analisar os aspectos relacionados com a precisão do sistema os quais irão ditar a viabilidade da implementação do mesmo.

No sexto e último capítulo irá proceder-se à interpretação dos dados obtidos e irão tecer-se as considerações finais.

A fim de evitar uma extrema densidade do corpo do texto, optou-se por colocar em anexo a listagem dos programas, alguns gráficos e tabelas mais extensas.

2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

2.1 O SISTEMA NAVSTAR – GPS

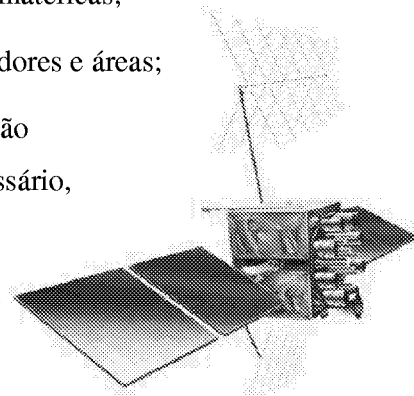
2.1.1 Introdução

Em dado momento, a necessidade justificada de servir os interesses militares de uma nação que, em termos tecnológicos reunia os conhecimentos de vanguarda e que, em termos económicos evidenciava uma pujança capaz de lhe conferir possibilidades de investimento ilimitado, levou a que os Estados Unidos da América delegassem no seu Ministério da Defesa (DoD – Department of Defense) a difícil missão de criar um sistema global de navegação que apresentasse uma elevada precisão de funcionamento, em qualquer ponto do globo terrestre e sob quaisquer condições.

Após vários anos de pesquisa e de um investimento global que já ultrapassou largamente os 12 biliões de dólares, foi criado o sistema NAVSTAR-GPS (NAVigation System with Time And Ranging - Global Positioning System).

O *NAVSTAR-GPS* é um sistema de rádio-navegação, apoiado por satélites e por um conjunto de estações de monitorização terrestres, criado com o objectivo de oferecer continuamente, em qualquer ponto do globo terrestre:

- informação precisa de localização tri-dimensional (latitude, longitude e altitude) e uma referência temporal muito precisa;
- informação contínua dada em tempo real;
- operação independente das condições climatéricas;
- suporte a um número ilimitado de utilizadores e áreas;
- possibilidade de reduzir o nível de precisão oferecido pelo sistema sempre que necessário, recorrendo à degradação dos sinais.



2.1.2 Constituição do sistema

O sistema é constituído por 3 componentes diferentes:

➤ **A componente espacial**

É, actualmente, formada por um conjunto de 24 satélites que orbitam em torno da Terra, a uma altitude aproximada de 20 200 km e ao longo de seis planos inclinados 55 graus relativamente ao plano equatorial e igualmente espaçados de 60° em latitude. O período de rotação dos satélites é de aproximadamente 12 horas. Esta configuração permite que estejam simultaneamente visíveis em qualquer ponto do Mundo pelo menos 4 satélites. Cada satélite transmite continuamente informação de navegação que poderá ser recebida por qualquer receptor que com ele se encontre em linha de vista a partir da sua posição.

➤ **A componente de controlo**

É formada por uma estação de controlo principal, quatro estações de monitorização e três antenas de transmissão espalhadas por diferentes pontos do globo terrestre. Esta componente do sistema é responsável por controlar e monitorizar continuamente a constelação de satélites. As estações de monitorização utilizam receptores GPS para, de forma passiva, efectuarem o seguimento dos sinais de navegação que estão a ser enviados pelos satélites. Essa informação é então reunida e enviada destas estações para a estação de controlo principal, situada na Base Aérea de Schriever, no Colorado, onde irá ser executado o seu processamento, resultando na actualização das mensagens de navegação dos satélites. Esta informação actualizada será encaminhada para as antenas que as irão transmitir para os satélites respectivos através de sinais de controlo.

➤ **A componente de utilizador**

Materializa-se nos receptores, processadores e antenas que permitem ao utilizador receber, em terra, no mar, ou no ar, os sinais enviados pelos satélites e calcular com elevada precisão: posição, velocidade e tempo.

2.1.3 Princípios de funcionamento do sistema

Este sistema tem como princípio de funcionamento a medição simultânea das distâncias que separam o receptor de um número mínimo de satélites da constelação do sistema.

Um receptor poderá calcular facilmente a distância que o separa de um satélite se conhecer a localização deste, efectuando a medição do atraso temporal registado a partir do momento em que o satélite envia o sinal GPS até ao momento em que o receptor o recebe.

Conhecida essa distância bastará recorrer à geometria esférica para se conhecer a posição do utilizador. Com base nesta é possível afirmar que a intersecção entre duas esferas define uma circunferência, que a intersecção entre três esferas define dois pontos, e que a intersecção entre quatro esferas define um único ponto.

O sistema GPS simplesmente “importa” este conceito. Cada satélite representa o centro de uma circunferência gerada com raio que corresponde à distância entre o satélite e o GPS. Conhecendo as distâncias que separam um receptor de três dos satélites ficar-se-ia assim com dois pontos como possíveis soluções, com a particularidade de num dos casos o valor apresentado para a altitude não corresponder a um valor próximo à superfície terrestre. Por este facto, apenas um dos pontos apresentados poderá ser solução pelo que, aparentemente, poder-se-ia afirmar que o número mínimo de satélites necessários para a obtenção da localização do utilizador seria três.

Contudo, para que assim fosse o sinal de relógio dos satélites e o sinal de relógio do receptor teriam que estar perfeitamente sincronizados implicando a existência de uma enorme precisão e estabilidade nos relógios, tanto do satélite como do receptor. Apesar dos satélites cumprirem estas duas condições, incorporando um conjunto de relógios atómicos (muitíssimo precisos e estáveis), o mesmo não acontece no caso dos receptores, que por razões óbvias de limitação dos custos de produção utilizam relógios cujas características de precisão e estabilidade estão bem abaixo destes requisitos.

Assim, verifica-se o aparecimento de uma nova incógnita no sistema (para além das três coordenadas espaciais do receptor) que traduz o erro resultante da deriva que existe entre o relógio do satélite e o relógio do utilizador e que irá exigir uma equação mais. Será então necessário utilizar, no mínimo, quatro satélites em relação aos quais o

receptor irá calcular a distância existente, medindo na realidade aquilo que se irá designar por pseudodistância e que importa ver em pormenor:

A distância que separa o receptor do satélite i (distância real, sem deriva) é igual a:

$$R_i = \text{distância (Sat}_i, R) = \Delta T \cdot c \quad (2.1)$$

em que ΔT é o tempo de propagação do sinal e c a velocidade da luz ($3 \cdot 10^8$ m/s).

Existindo deriva entre o relógio do satélite e o relógio do receptor, que se designará por τ , o atraso que iremos medir será o tempo de propagação acrescido da deriva existente:

$$\Delta T_{\text{medido}} = \Delta T + \tau \quad (2.2)$$

ou seja, obteremos nessa medição a distância R_i' , diferente de R_i , que será

$$R_i' = \Delta T_{\text{medido}} \cdot c \quad \text{----- pseudo distância} \quad (2.3)$$

Estas podem relacionar-se, sendo que:

$$R_i' = (\Delta T + \tau) \cdot c = R_i + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = c \cdot \tau \quad (2.4)$$

em que ε é o erro de medição.

Logo, a distância real (que é a que realmente interessa) será dada por:

$$R_i = R_i' - \varepsilon = R_i' - c \cdot \tau \quad (2.5)$$

Dado que as coordenadas de cada um dos 4 satélites, (x_i, y_i, z_i) com $i = 1, \dots, 4$, são conhecidas, teremos 4 equações da forma:

$$(x_i - U_x)^2 + (y_i - U_y)^2 + (z_i - U_z)^2 = (R_i' - c \cdot \tau)^2 \quad (2.6)$$

Obtém-se assim um sistema com quatro equações e quatro incógnitas que se vão calcular conhecendo as pseudo distâncias relativas a quatro satélites.

Se existirem mais de quatro satélites visíveis estes devem ser utilizados no cálculo obtendo-se assim um sistema com mais equações que incógnitas.

2.1.4 Características do sinal GPS

Cada satélite cria a partir dos sinais de relógio de frequência $f_0 = 10.23$ Mhz duas portadoras, com frequências centrais múltiplas desta,

$$L_1 (\text{Link}_1) = 154 \cdot f_0 = 154 \cdot 10.23 \cdot 10^6 = 1\,575.42 \text{ MHz}$$

$$L_2 (\text{Link}_2) = 120 \cdot f_0 = 120 \cdot 10.23 \cdot 10^6 = 1\,227.60 \text{ MHz}$$

que irão ser moduladas em fase (BPSK- Binary Phase-Shift Keying) por uma sequência pseudo-aleatória e por uma mensagem de navegação contendo informação necessária à determinação da posição do satélite. Utilizam-se duas sequências pseudo-aleatórias:

O código C/A

O código de aquisição livre, C/A - Course / Acquisition Code consiste numa sequência periódica bem definida de 1 023 pulsos de amplitude unitária com frequência 1.023 MHz, repetindo-se portanto em cada milissegundo. A cada satélite está associada uma sequência diferente deste código.

O código P

O código P – Precision Code consiste também numa sequência periódica bem definida de pulsos de amplitude unitária, bastante longa (o que explica a maior precisão deste código), com frequência 10.23 MHz. Este código tem um período de 267 semanas, estando a cada satélite associada uma semana distinta dessa sequência.

O código P pode em qualquer momento ser substituído por um código com características idênticas, designado por código Y, cujo mecanismo de geração é mantido confidencial e que apenas os receptores militares conseguem utilizar.

A portadora L1 irá ser modulada por ambos os códigos C/A e P (um em fase e outro em quadratura) enquanto que a portadora L2 irá ser modulada apenas pelo código P, resultando os sinais s_{L1} e s_{L2} com a seguinte estrutura:

$$s_{L1}(t) = P(t) D(t) \cos(2\pi f_1 t) + C(t) D(t) \sin(2\pi f_1 t) \quad (2.7)$$

$$s_{L2}(t) = P(t) D(t) \cos(2\pi f_2 t) \quad (2.8)$$

em que,

$D(t)$ é a sequência de bits da mensagem de navegação

$C(t)$ e $P(t)$, são as sequências pseudo-aleatórias dos códigos C/A e P

f_1 e f_2 , são as frequências das portadoras L1 e L2

Estes códigos pseudo aleatórios foram escolhidos para o efeito por possuírem características especiais no que à auto-correlação e à correlação cruzada diz respeito, características essas que os tornam imunes a interferências geradas quer por fontes rádio naturais quer por fontes rádio intencionais.

A transmissão de dois sinais com frequências distintas têm como objectivo permitir que o atraso provocado pela ionosfera possa ser subtraído a partir da observação nos dois canais, nos equipamentos que utilizam ambas as frequências L1 e L2, dado que este atraso é aproximadamente proporcional ao quadrado da frequência.

2.1.5 Fontes de erro

2.1.5.1 Erros dependentes dos satélites

Erros nos relógios dos satélites

Os satélites incorporam um conjunto de relógios atómicos que se caracterizam por uma elevada precisão, mas que, não sendo perfeitos, são responsáveis por parte do erro existente na solução de navegação encontrada pelo utilizador. Assim, para que os relógios se mantenham o mais precisos possível e, conseqüentemente, para que a distância medida seja mais correcta, o seu funcionamento tem de ser continuamente monitorizado pelas estações de controlo que a partir dessa observação, conseguirão prever esses desvios e incluir na mensagem de navegação os parâmetros para a deriva dos relógios. É importante notar que uma deriva de um nanosegundo no tempo de um satélite, resulta num erro de cerca de 30 cm na distância medida em relação a este.

Erros nas efemérides

A precisão do posicionamento irá depender da exactidão imposta na localização dos nossos pontos de referência, os satélites,. As órbitas descritas pelos satélites podem ser consideradas muito regulares, pelo que podem ser aproximadas por um modelo matemático bastante rigoroso. No entanto, a acção do campo gravítico terrestre, das forças gravitacional da Lua e do Sol, o atrito da atmosfera terrestre e a pressão das radiações solares nos satélites provocam variações na órbita dos mesmos. Tais factores, não incluídos no cálculo das referidas órbitas, uma vez que o conhecimento de que dispomos relativo a estes não é suficiente, obrigam a que estas sejam constantemente monitorizadas pelas estações de monitorização na Terra que irão conseguir efectuar

pequenas correcções. As efemérides são o conjunto dos dados que contem os parâmetros da orbita do satélite e o conjunto de termos de correcção.

Acesso selectivo (SA – Selective Availability)

É um mecanismo de controlo de precisão que provoca uma degradação intencional no sinal recebido pelos utilizadores não autorizados limitando assim a precisão do sistema. Esta degradação é conseguida através da manipulação da mensagem de navegação onde a informação inerente ao relógio do satélite e às efemérides é alterada. Quando activado o SA faz com que o código C/A, capaz de oferecer uma precisão inferior a 30 metros veja a sua precisão reduzida para cerca de 100 metros. O SA foi desactivado em 1 de Maio de 2000 e existe a promessa de o manter desactivado pelo menos até 2006.

2.1.5.2 Erros dependentes da Antena-Receptor

Erros nos relógios dos receptores

Os relógios utilizados são pouco precisos e como tal provocam erros semelhantes aos provocados pelos relógios dos satélites embora possuam uma amplitude maior.

Multi-Percurso

Na medição da distância a um satélite assume-se que o sinal recebido foi enviado pelo satélite e viajou directamente deste até à antena do receptor. Na realidade, em adição ao sinal, existem sinais reflectidos provocados por objectos que se encontrem perto da antena e que interfiram com o sinal verdadeiro. A este efeito chamou-se multi-percurso. Este erro afecta apenas medições de alta precisão podendo atingir os 50 cm.

Erros causados pela variação do centro de fase da antena

São erros que dependem das características da antena e do ângulo de observação do sinal.

Ruído do Receptor

O receptor GPS não é perfeito e tem as suas limitações. Está limitado à sua própria precisão, ou seja ao desvio padrão associado a cada medição.

2.1.5.3 Erros dependentes do meio de propagação

Atraso ionosférico

No cálculo da distância que separa o receptor de um satélite multiplica-se o tempo que o sinal demora a chegar ao receptor pela velocidade da luz, considerando que o valor para esta última é $3 \cdot 10^8$ m/s. Contudo a velocidade a que o sinal se propaga varia sob as condições atmosféricas. A ionosfera - camada mais alta da atmosfera - contém partículas "carregadas" que atrasam o código e adiantam a fase, sendo que este efeito se faz sentir com maior intensidade durante o dia do que durante a noite.

Os atrasos ionosféricos não modelados podem afectar a precisão até 30 metros em alguns períodos da tarde.

Atraso troposférico

Ao passar pela troposfera - camada mais baixa da atmosfera - o sinal também sofre um atraso na fase e no código. Este atraso é causado por duas componentes (componente seca e húmida). O principal problema relaciona-se com a componente húmida (vapor de água).

2.1.6 Precisão do sistema

A precisão do posicionamento irá depender da intensidade com que os erros que vimos anteriormente se façam sentir na medição da distância entre o receptor e os satélites, bem como do número e geometria dos satélites utilizados no cálculo da posição. O termo geralmente utilizado para representar a precisão da medição GPS é UERE (User Equivalent Range Error).

2.1.6.1 GEOMETRIA DOS SATÉLITES

O efeito da geometria dos satélites é expresso pelo factor de degradação da precisão, DOP- Dilution Of Precision, factor esse que pode ser interpretado como a razão entre a exactidão do posicionamento e a exactidão da medição da distância aos satélites. Para se perceber melhor este efeito da geometria dos satélites na precisão do posicionamento imagine-se um tetraedro formado pelas linhas que ligam o receptor a cada um dos

satélites usados: quanto maior for o volume desse tetraedro, menor (e melhor) será o factor DOP.

Quando se observa um conjunto de satélites que estão próximos, um metro na medição da distância pode resultar em centenas de metro de erro na posição calculada. Mas se estes mesmos satélites se encontrarem espalhados pelo céu, o erro na posição poderá ser inferior a 1.5 metros por cada metro de erro na medição da distância a um satélite.

Em regra geral, quanto mais satélites se observar menor será o DOP, embora o contrário também possa acontecer. Muitas vezes os próprios receptores seleccionam os satélites a utilizar no cálculo da posição de modo a minimizar este factor. Um bom DOP terá sempre valores inferiores a 5.

2.1.6.2 Principais métodos de posicionamento com GPS:

Posicionamento Absoluto:

Utilização do código C/A para obtenção da posição. As coordenadas geográficas e altitude elipsoidal obtidas são referidas ao sistema de coordenadas de referência do GPS, o WGS84 (World Geodetic System 84), a menos que o *software* do receptor proceda à sua conversão para qualquer outro referencial, utilizando os chamados "Parâmetros de Transformação".

Este tipo de posicionamento oferece uma precisão na ordem dos 10 metros.

Posicionamento Relativo:

No posicionamento relativo a informação de código e fase recolhida em dois receptores GPS a operar em simultâneo é comparada e correlacionada, cancelando-se as fontes de erro comuns aos dois receptores (efeitos ionosférico e troposférico, estado dos relógios dos satélites, etc.). Deste modo a informação tratada, permite obter o vector que liga as posições ocupadas pelas antenas dos dois receptores. Uma vez obtido esse vector, fixando as coordenadas de uma das posições, obtém-se as coordenadas da outra posição. As coordenadas ficam assim definidas a partir das coordenadas "fixadas" como referencial, daí o nome de posicionamento relativo. Este posicionamento, se realizado em modo estático, isto é com os dois receptores imóveis durante um determinado período de tempo, garante uma maior precisão.

Este tipo de posicionamento oferece uma precisão centimétrica.

GPS Diferencial (DGPS):

O conceito diferencial é aplicável a qualquer sistema que possua erros passíveis de serem identificados com o auxílio de um equipamento externo com o qual exista capacidade de comunicação.

O princípio básico de funcionamento do GPS Diferencial consiste em compensar erros do sistema através de correcções, que o utilizador por si só não seria capaz de estimar devido à indefinição da sua própria posição, e que lhe são fornecidas por um equipamento externo que conhecendo a sua posição tem capacidade para o fazer. A eliminação desses erros permite uma redução significativa do erro total induzido pelo sistema "não diferencial".

Estes métodos diferenciais podem considerar-se métodos relativos em tempo real, em que um dos receptores ocupando uma posição conhecida (base) calcula em cada instante a sua posição através do código C/A, e calcula a correcção a introduzir na informação GPS para obter a sua posição verdadeira transmitindo-a de seguida para os receptores que operem na sua vizinhança para que estes possam corrigir a sua posição. Normalmente estas correcções são codificadas usando a norma RTCM e transmitidas via rádio.

São passíveis de correcção os erros associados aos satélites, à propagação das ondas no meio e os erros associados ao GPS (excluídos os erros que só dependem do utilizador, tais como os erros do próprio receptor e multi-percurso).

O DGPS oferece uma precisão de 2 a 3 m, piorando à medida que aumenta a distância do receptor à base.

RTK:

O RTK - Real-Time Kinematic, é baseado na medição da distância receptor-satélite através da fase da onda portadora. A maior dificuldade desta técnica reside no desconhecimento do número de ciclos completos decorridos desde que o sinal deixa o satélite até ao instante de sintonia, que se designa por ambiguidade de ciclo. Uma característica específica deste tipo de receptor é o tempo de espera necessário (alguns minutos) para que o receptor consiga resolver a ambiguidade de ciclo de cada par receptor-satélite, findo o qual, consegue calcular a posição com uma precisão que se situa entre os 0.5 cm e os 2 cm na horizontal e entre 1 e 3 cm na vertical.

2.1.7 Algumas aplicações do sistema

2.1.7.1 Navegação marítima

Assiste-se a uma rápida expansão do seu uso em todo o tipo de embarcações, que durante muito tempo dependeram do sistema TRANSIT (criação da marinha americana) pensando-se que em pouco tempo toda a navegação marítima se baseará exclusivamente no GPS. O custo do sistema GPS é baixo e a flexibilidade de utilização deste sistema permite que seja usado por qualquer tipo de embarcação.

2.1.7.2 Navegação terrestre

Neste caso existem dois mercados principais:

- nos automóveis, que passam a integrar o GPS e sistemas gráficos avançados para proporcionar um sistema de orientação local efectiva capaz de, por exemplo, sugerir o percurso mais curto a seguir entre dois pontos ou alternativas a um itinerário congestionado;
- receptores pessoais, utilizados em eventos desportivos onde a navegação seja mais exigente, sobretudo por envolverem percursos caracterizados por uma longa extensão ou por condições climáticas muito adversas.

Na actualidade são também atribuídas ao GPS cada vez mais aplicações profissionais:

- Transportes Internacionais
- Redes de Autocarros
- Viaturas Policiais ou de Emergência Médica

2.1.7.3 Navegação aérea

As aplicações deste tipo caracterizam-se por uma maior complexidade técnica, pelo que seu processo de instalação tem sido bastante mais lento. Sendo mais exigente apoia-se sobretudo num sistema que opera combinando o GPS com outros sistemas de navegação por satélite, e que pode designar-se por sistema global, GNSS – Global Navigation Satellite System, possibilitando uma precisão e disponibilidade acrescidas. Um dos objectivos do seu uso na aviação passa por melhorar os sistemas de gestão de voo existentes.

A sua adopção tem sido prioritária nas áreas onde se regista menor tráfego aéreo, e que por essa razão não estão na maior parte das vezes cobertas pelo sistema de RADAR.

2.2 Descrição de Posição e Atitude de Corpos Rígidos

Para se conseguir a manipulação de quantidades representativas da posição e/ou orientação de um corpo rígido é necessário definirem-se sistemas de coordenadas e convencionar formas de representação. Mais, tem de se pensar forçosamente em termos globais e considerar a existência de um sistema universal em relação ao qual se possam referenciar quaisquer outros sistemas de coordenadas. Deste modo, será sempre possível conseguir descrever a posição e orientação de um corpo relativas ao sistema de coordenadas universal, bem como, relativas a qualquer outro sistema de coordenadas definido a partir deste.

2.2.1 Representação de uma posição

Depois de definido um sistema universal, $\{U\}$, de eixos coordenados X_U , Y_U e Z_U , localiza-se univocamente cada um dos pontos do universo recorrendo-se a um vector de posição ${}^U P$, em que P é designação atribuída ao vector e o expoente que a precede, U , é o identificador do sistema em causa. O vector de posição referido será composto por três elementos, p_x , p_y , p_z , cujo valor numérico indica a distância percorrida ao longo do respectivo eixo e terá a seguinte representação:

$${}^U P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

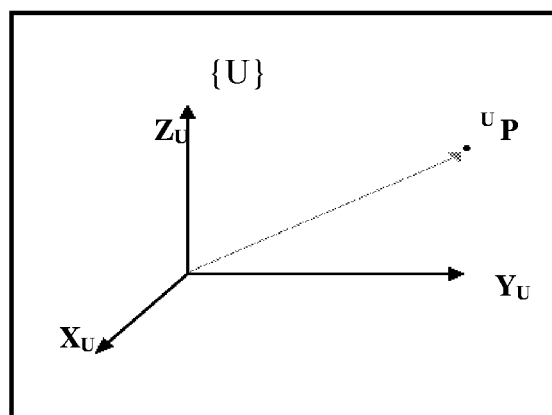


FIGURA 2.1 – Vector de posição

2.2.2 Representação de uma orientação

Quando se pretende localizar no espaço um corpo, que é formado pelo subconjunto de pontos do universo que lhe dão a sua forma, constata-se que não é suficiente conhecer-se apenas a posição de um dos seus pontos.

Fixado o ponto cuja localização se conhece, a localização dos restantes pontos irá depender da orientação que o corpo apresente e este poderá estar orientado de infinitas maneiras diferentes, como se pretende ilustrar na figura seguinte.

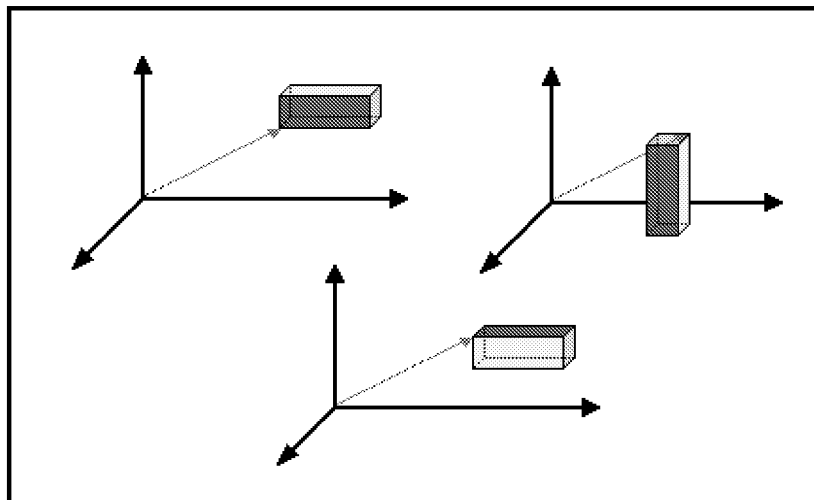


FIGURA 2.2 – Possíveis orientações de um corpo conhecendo a localização de um dos seus pontos

É essencial saber relacionar a posição desse ponto com a posição de qualquer ponto também pertencente ao corpo, para se ser capaz de descrever a posição *completa* do mesmo.

Para tal torna-se necessário conseguir descrever uma orientação. Uma forma de se conseguir fazê-lo consiste em associar ao corpo em questão um sistema de coordenadas próprio, $\{A\}$, com orientação coincidente à do sistema de referência, $\{U\}$. Depois, à medida que este se desloca no espaço procura-se a sua descrição relativamente ao sistema de referência.

Um aspecto importante que se deve considerar é que cada ponto pertencente ao corpo terá as suas coordenadas próprias relativas a este novo sistema e que, de acordo com o que se disse anteriormente, dependem das distâncias percorridas ao longo dos diferentes eixos.

Se se atribuir uma forma ao corpo, considerando-o um semi-plano representativo da plataforma móvel que se trata neste trabalho, orientado segundo os eixos dos XX 's

eYY's do sistema de coordenadas associado, será então mais fácil conseguir visualizar todo este processo.

Pretende-se que todos os pontos deste semi-plano podem ser descritos posteriormente a partir do sistema de referência para que se possam representar a sua posição e orientação por intermédio de pares formados por um vector de posição, e um sistema de coordenadas associado. Veja-se o caso mais simples, em que $\{A\}$ e $\{U\}$ mantêm a mesma orientação, representado na figura 2.3.

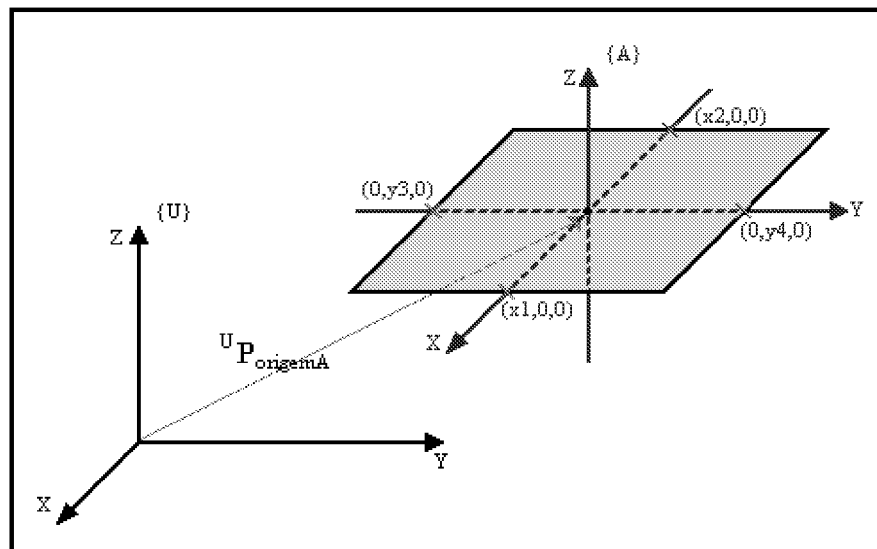


FIGURA 2.3 – Definição de um sistema próprio para a plataforma

Para se obter as coordenadas de qualquer dos pontos da plataforma relativas ao sistema universal (${}^U P_{\text{ponto}}$), bastaria, dado que apenas teve lugar uma translação, conhecer-se o vector de posição ${}^U P_{\text{origemA}}$ que localiza a origem do sistema de coordenadas associado relativamente ao sistema universal e somar-lhe as coordenadas relativas à plataforma (${}^A P_{\text{ponto}}$) do ponto que se quer,

$${}^U P_{\text{ponto}} = {}^A P_{\text{ponto}} + {}^U P_{\text{origemA}} \quad (2.10)$$

contudo, os eixos da plataforma podem não estar orientados da mesma forma que os eixos do sistema universal, que permanece fixo, significando que ocorreu uma rotação de $\{A\}$ em relação a $\{U\}$. Essa rotação poderá ser descrita por uma matriz que se chamará matriz de rotação e que irá explicitar três rotações singulares relativas aos três eixos principais, que tomam lugar pela ordem X, Y e Z. Primeiro dá-se a rotação de

\hat{X}_A por um ângulo γ , depois de \hat{Y}_A por um ângulo de β , e finalmente de \hat{Z}_A por um ângulo de α .

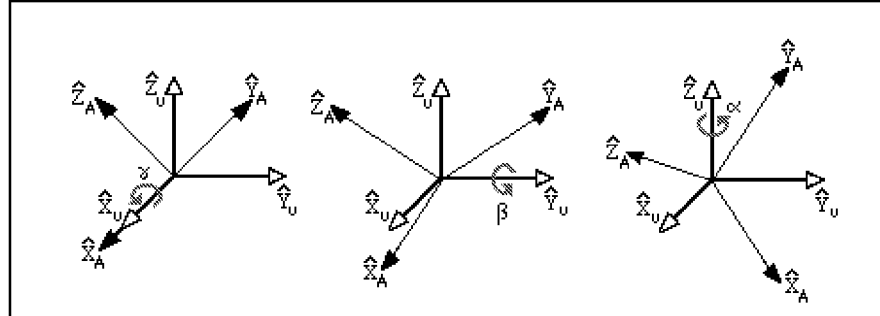


FIGURA 2.4 – Rotações em relação aos eixos principais do sistema de referência pela ordem X, Y, Z ângulos Roll, (γ), Pitch (β) e Yow (α), respectivamente

Pensando nas rotações como operadores e convencionando a notação $\mathbf{c}(\alpha)$ para representar $\cos(\alpha)$, e $\mathbf{s}(\alpha)$ para $\sin(\alpha)$, pode escrever-se a matriz de rotação da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
 {}^U_A \mathbf{R}_{X,Y,Z}(\gamma, \beta, \alpha) &= \mathbf{R}_Z(\alpha) \cdot \mathbf{R}_Y(\beta) \cdot \mathbf{R}_X(\gamma) \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}(\alpha) & -\mathbf{s}(\alpha) & 0 \\ \mathbf{s}(\alpha) & \mathbf{c}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}(\beta) & 0 & \mathbf{s}(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathbf{s}(\beta) & 0 & \mathbf{c}(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{c}(\gamma) & -\mathbf{s}(\gamma) \\ 0 & \mathbf{s}(\gamma) & \mathbf{c}(\gamma) \end{bmatrix} \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

efectuando a multiplicação, obtemos

$${}^U_A \mathbf{R}_{X,Y,Z}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}(\alpha) \cdot \mathbf{c}(\beta) & \mathbf{c}(\alpha) \cdot \mathbf{s}(\beta) \cdot \mathbf{s}(\gamma) - \mathbf{s}(\alpha) \cdot \mathbf{c}(\gamma) & \mathbf{c}(\alpha) \cdot \mathbf{s}(\beta) \cdot \mathbf{c}(\gamma) + \mathbf{s}(\alpha) \cdot \mathbf{s}(\gamma) \\ \mathbf{s}(\alpha) \cdot \mathbf{c}(\beta) & \mathbf{s}(\alpha) \cdot \mathbf{s}(\beta) \cdot \mathbf{s}(\gamma) + \mathbf{c}(\alpha) \cdot \mathbf{c}(\gamma) & \mathbf{s}(\alpha) \cdot \mathbf{s}(\beta) \cdot \mathbf{c}(\gamma) - \mathbf{c}(\alpha) \cdot \mathbf{s}(\gamma) \\ -\mathbf{s}(\beta) & \mathbf{c}(\beta) \cdot \mathbf{s}(\gamma) & \mathbf{c}(\beta) \cdot \mathbf{c}(\gamma) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

A inclusão desta matriz na equação (2.10) irá permitir efectuar a descrição pretendida da plataforma, usando-se para o efeito a seguinte expressão,

$$\boxed{{}^U \mathbf{P}_{\text{ponto}} = {}^U_A \mathbf{R}_{X,Y,Z}(\gamma, \beta, \alpha) \cdot {}^A \mathbf{P}_{\text{ponto}} + {}^U \mathbf{P}_{\text{origemA}}} \quad (2.13)$$

2.3 OPTIMIZAÇÃO NÃO-LINEAR

Seja f uma função real de variáveis reais e Ω , o seu domínio, um subconjunto do espaço E^n , ir-se-á abordar a resolução de um problema de optimização da forma:

minimizar $f(x)$, **com** $x \in \Omega$.

Podem distinguir-se dois tipos de pontos que podem ser solução para o problema da minimização de uma função : mínimos locais e mínimos globais.

Por definição, um ponto $x^* \in \Omega$ é um mínimo local de f em Ω , se existir um ε positivo tal que $f(x) \geq f(x^*)$, qualquer que seja $x \in \Omega$ a menos de uma distância ε de x^* .

Um ponto $x^* \in \Omega$ diz-se um mínimo global de f em Ω se se verifica que $f(x) \geq f(x^*)$, qualquer que seja $x \in \Omega$.

Num problema deste tipo está-se, por definição, à procura no conjunto Ω de um mínimo global de f , contudo, o que acontece na prática é que na maior parte dos casos esse é um objectivo incerto, e como tal, nessas circunstâncias tem de ser substituído pela procura de um ponto mínimo relativo.

Essa incerteza só poderá ser contrariada quando um problema possuir certas propriedades de convexidade, fazendo nestes casos sentido falar de condições globais e soluções globais.

Direcções válidas de movimento

Para se deduzirem as *condições necessárias* que um ponto mínimo relativo, x^* , deve satisfazer tem de se considerar movimento a partir deste, numa dada direcção. Ao longo de uma direcção qualquer, a função objectivo pode ser vista como função de uma única variável: o parâmetro que define o movimento.

Dado $x \in \Omega$ vai considerar-se que um vector d é uma direcção válida de movimento para x se existir um $\bar{\alpha} > 0$, tal que $x + \alpha.d \in \Omega$ para todo o α , $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$. Com este simples conceito podemos enunciar algumas condições satisfeitas pelos pontos mínimos relativos.

Propriedade1 (condições necessárias de primeira ordem)

Seja Ω um subconjunto de E^n , e seja $f \in C^1$ uma função em Ω . Se x^* é um ponto mínimo relativo de f em Ω , então para qualquer $d \in E^n$ que seja uma direcção válida de movimento têm-se $\nabla f(x^*) \cdot d \geq 0$.

$\nabla f(x)$ é o vector linha que contém as derivadas parciais (Gradiente) de f , que por uma questão de simplicidade se vai representar usando a notação $G(x)$.

Propriedade2 (condições necessárias de segunda ordem)

Seja Ω um subconjunto de E^n , e seja $f \in C^2$ uma função em Ω . Se x^* é um ponto mínimo relativo de f em Ω , então para qualquer $d \in E^n$ que seja uma direcção válida de movimento têm-se:

- i. $G(x^*) \cdot d \geq 0$
- ii. se $G(x^*) \cdot d = 0$, então $d' \cdot \nabla^2 f(x^*) \cdot d \geq 0$.

$\nabla^2 f(x)$ é a matriz das derivadas parciais de 2ª ordem (Hessiana) de f , que por uma questão de simplicidade se vai representar usando a notação $H(x)$.

Convergência Global de um algoritmo, iterativo e descendente

Por *iterativo* entende-se que o algoritmo gera uma sequência de pontos, em que cada um dos quais é calculado com base nos pontos que o precedem. Por *descendente* entende-se que à medida que cada novo ponto é gerado, o valor de uma dada função, estimado nesse ponto, diminui.

Diz-se que um algoritmo converge quando a sequência de pontos gerados desta forma converge num número finito, ou infinito, de passos para uma solução do problema inicial. Esta é uma propriedade desejável mas que nem todos os algoritmos possuem. Pode dizer-se que a maior parte dos algoritmos utilizados para resolver problemas de programação não-lineares, e que são os mais conhecidos, não são globalmente convergentes (pelo menos na sua forma pura) e como tal, por vezes geram sequências de pontos que não convergem de todo ou que convergem para um ponto que não é solução.

Poderá ser possível efectuar algumas alterações nesses algoritmos de forma a garantir a sua convergência.

Teorema da Convergência Global

Seja A um algoritmo em X , e suponha-se que dado x_0 a sequência $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ é gerada garantindo que $x_{k+1} \in A(x_k)$.

Dado um conjunto-solução $S \subset X$, se:

- i. Todos os pontos x_k estão contidos num sub-conjunto $K \subset X$
- ii. Existe uma função contínua Z em X que verifica
 - (a) se $x \notin S$, então $Z(y) < Z(x)$ para todo $y \in A(x)$
 - (b) se $x \in S$, então $Z(y) \geq Z(x)$ para todo $y \in A(x)$
- iii. O mapeamento de A é fechado em pontos $\notin S$

então o limite de qualquer sequência de $\{x_k\}$ que convirja é uma solução.

2.3.1 Algoritmos Descendentes

Vai analisar-se uma classe especial de algoritmos descendentes que têm em comum uma estrutura peculiar, que assenta no esquema seguinte:

- 1) partem de um ponto inicial, x_0 ;
- 2) determinam de acordo com uma regra fixa uma direcção de movimento;
- 3) procuram ao longo dessa linha um ponto mínimo relativo da função objectivo;
- 4) deslocam-se nessa direcção até ao ponto mínimo encontrado;
- 5) no novo ponto, determinam uma nova direcção de movimento, e repetem todo o processo.

O processo de procura de um ponto mínimo ao longo de uma linha dada designa-se por *pesquisa linear* e utiliza-se frequentemente nos casos em que a função que se quer minimizar é não-linear. Utilizar um esquema de pesquisas lineares sucessivas, que no fundo são problemas de minimização unidimensional, é a chave para se conseguir resolver problemas multi-dimensionais (mais complexos) decompondo-os em problemas unidimensionais (mais simples).

Dada a necessidade do seu uso fará sentido analisar desde já a técnica escolhida, das várias possíveis, para efectuar a pesquisa linear, antes mesmo de se abordar o próprio algoritmo. Das várias possibilidades adoptou-se aquela que sendo robusta oferece uma maior simplicidade.

Ajustamento Quadrático

Porventura o esquema mais utilizado de pesquisa linear é aquele em que se ajusta uma quadrática a três pontos, e que tem a particularidade de não requerer qualquer informação acerca das derivadas da função.

Dados os pontos x_1, x_2, x_3 e os correspondentes valores $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ constrói-se a quadrática que passa por esses três pontos

$$q(x) = \sum_{i=1}^3 f_i \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

e determina-se um novo ponto x_4 , onde a derivada de q se anula.

Esse novo ponto será dado por,

$$x_4 = \frac{1}{2} \frac{(x_2^2 - x_3^2)f_1 + (x_3^2 - x_1^2)f_2 + (x_1^2 - x_2^2)f_3}{(x_2 - x_3)f_1 + (x_3 - x_1)f_2 + (x_1 - x_2)f_3}.$$

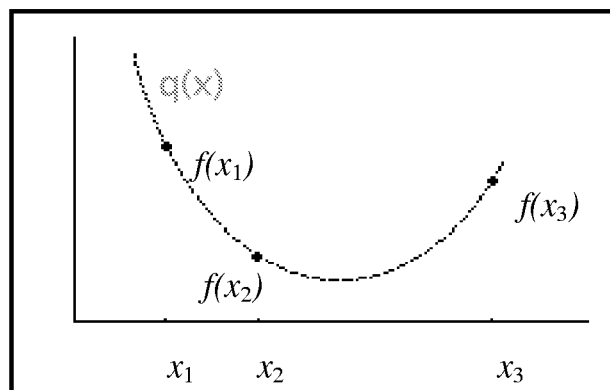


FIGURA 2.5 – Ajuste de uma quadrática a um conjunto de três pontos

Método de Newton

Este método tem como ponto de partida o facto da função f que se quer minimizar poder ser aproximada localmente por uma função quadrática, função essa que por sua vez é minimizável com exactidão. Na vizinhança de x_k a função f pode ser aproximada pelo desenvolvimento em série de Taylor:

$$f(x) \approx f(x_k) + G(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)'H(x_k)(x - x_k)$$

em que G é o gradiente de f , e H a sua Hessiana.

O termo da direita minimiza-se quando

$$x_{k+1} = x_k - H(x_k)^{-1} G(x_k)'$$

e esta equação é o método de Newton na sua forma pura.

Para se verem satisfeitas as condições de 2ª ordem necessárias para a existência de um mínimo relativo admite-se que num ponto mínimo relativo, x^* , a matriz Hessiana, $H(x^*)$, é definida positiva. Assim, podemos argumentar que se f tiver derivadas parciais de 2º ordem contínuas, $H(x)$ é definida positiva na vizinhança de x^* e como tal o método é bem definido na vizinhança da solução.

Convergência de ordem 2

Vai provar-se que se o método de Newton converge, a convergência é de ordem dois. Sendo $A(x) = x - H^{-1} \cdot G'$ e supondo que x^* é um ponto para o qual $G(x^*)=0$ e $H(x^*)$ é não-singular. Então

$$x_{k+1} - x^* = A(x_k) - A(x^*)$$

e

$$|x_{k+1} - x^*| = |A(x_k) - A(x^*)| \leq |A'(x^*)(x_k - x^*)| + \frac{1}{2} |A''(\bar{x})| |x_k - x^*|^2$$

em que \bar{x} é um dos pontos da linha entre x^* e x_k . Dado que $A'(x^*)=0$ tem-se que

$$|x_{k+1} - x^*| \leq c \cdot |x_k - x^*|^2$$

onde c depende do valor de $|f''(x)|$ na vizinhança de x^* . Assim a convergência é *pele menos* de ordem dois.

Convergência Global

A análise da convergência global assume neste método uma importância acrescida. Se é verdade que para pontos próximos da solução o método converge e isso já foi aqui provado, para pontos afastados da solução existe uma necessidade efectiva de introduzir alterações ao método de forma a garantir a convergência.

A primeira alteração feita nesse sentido consiste na introdução de um parâmetro de pesquisa linear α_k , visando impedir que o valor da função objectivo possa aumentar devido à existência de termos não-quadráticos, passando o método a assumir a forma:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k H(x_k)^{-1} G(x_k)'$$

em que $0 \leq \alpha_k \leq 1$ é escolhido para minimizar o valor da função f nesse ponto x_{k+1} .

Quando próximo da solução espera-se que $\alpha_k \cong 1$.

A segunda modificação pode ser deduzida a partir da análise do vector de descida calculado pelos algoritmos pertencentes a esta classe que nos dão genericamente

$$x_{k+1} = x_k - \alpha M_k G(x_k)'$$

onde M_k uma matriz de dimensão $n \times n$. No caso do método do gradiente $M_k = I$ e no caso do método de Newton $M_k = H(x_k)^{-1}$. O vector de descida, $d_k = -M_k \cdot G(x_k)$, é uma direcção de descida se à medida que α aumenta (partindo de 0) o valor da função f diminui. Para um α pequeno temos,

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + G(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) + O(|x_{k+1} - x_k|^2)$$

que utilizando a equação anterior pode escrever-se

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) - \alpha \cdot G(x_k) \cdot M_k \cdot G(x_k)' + O(\alpha^2)$$

Quando $\alpha \rightarrow 0$ o segundo termo da direita domina o terceiro. Assim, se o objectivo for garantir uma diminuição no valor de f será necessário que $G(x_k) \cdot M_k \cdot G(x_k)' > 0$.

O modo mais fácil de o conseguir é exigir-se que M_k seja definida positiva.

Fazer-se $M_k = I$, obtendo-se o Método do Gradiente, é a forma mais fácil de se garantir o cumprimento desta condição, contudo este método converge apenas linearmente. Fazer-se $M_k = H(x_k)^{-1}$, obtendo-se o Método de Newton, assegura uma descida rápida para pontos próximos da solução embora para pontos afastados coloque a possibilidade da direcção assim calculada não ser uma direcção de descida, já que $H(x_k)^{-1}$ pode não ser definida positiva ou até mesmo não existir. O método tem então de ser modificado para “enfrentar” esta possibilidade, desejando-se que depois de realizada esta modificação o algoritmo continue fechado, seja descendente, tenha ordem de convergência dois, e seja fácil de implementar. Na nossa referência [1] encontra-se um algoritmo que cumpre estes requisitos e que se passa a analisar:

Fixa-se uma constante $\delta > 0$. Dado x_k , calcula-se os valores próprios de $H(x_k)$ e faz-se ϵ_k ser a constante positiva mais pequena para a qual a matriz $\epsilon_k \cdot I + H(x_k)$ tem valores próprios maiores ou iguais a δ . Então define-se

$$d_k = -(\epsilon_k \cdot I + H(x_k))^{-1} \cdot G(x_k)'$$

e itera-se de acordo com

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k \cdot d_k$$

em que α_k minimiza $f(x_k + \alpha \cdot d_k)$, $\alpha \geq 0$.

A versão mais prática deste método consiste em decompor a matriz $H(x_k)$, utilizando eliminação de Gauss, ficando esta na forma

$$H(x_k) = L(x_k).D(x_k).U(x_k)$$

onde $L(x_k)$ é uma matriz triangular inferior com 1's na diagonal principal, $D(x_k)$ é uma matriz diagonal e $U(x_k)$ é uma matriz triangular superior cuja diagonal principal é também formada por 1's. Uma vez conseguida esta decomposição fixa-se uma quantidade positiva, tão pequena quanto possível, e analisa-se cada um dos elementos da matriz diagonal em busca de elementos menores que δ . Caso existam, adiciona-se a cada um desses elementos da matriz $D(x_k)$ a quantidade que os torna maiores ou iguais a δ , resultando uma nova matriz diagonal $E(x_k)$. Fica-se assim com uma nova matriz que irá substituir $H(x_k)$:

$$H'(x_k) = L(x_k).E(x_k).U(x_k)$$

e que se utilizará para resolver

$$d_k = H'(x_k)^{-1}.G(x_k)'$$

Terá de ter-se em atenção que a escolha de um δ pequeno irá implicar a inversão de matrizes quase singulares, e que a escolha de um δ elevado irá comprometer a convergência de ordem dois. Esta versão é mais facilmente aplicável do ponto de vista computacional, sendo mais simples efectuar esta decomposição do que calcular o menor dos valores próprios de $H(x_k)$.

3. PROJECTO DO SISTEMA

3.1 Determinação do número de receptores a utilizar

Um receptor GPS fornece à saída um vector de posição que o posiciona no espaço relativamente ao referencial WGS84, considerado por este o sistema Universal. Este vector será formado por três elementos: $\mathbf{p}_x = \text{Latitude}$, $\mathbf{p}_y = \text{Longitude}$, e $\mathbf{p}_z = \text{Altitude}$.

$${}^U P_{\text{GPS}} = \begin{bmatrix} \text{Latitude} \\ \text{Longitude} \\ \text{Altitude} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Pretende-se, recorrendo a estes receptores, conseguir determinar a atitude e o posicionamento de uma plataforma pelo que, tal como se disse no capítulo introdutório, terá de se definir em primeiro lugar um referencial, $\{\mathbf{A}\}$, para a plataforma. Para origem de $\{\mathbf{A}\}$ pode escolher-se qualquer ponto pertencente à mesma que terá as seguintes coordenadas relativas ao referencial $\{\mathbf{U}\}$:

$${}^U P_{\text{origemA}} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Na plataforma esse receptor, ou melhor, a sua antena, irá ter as suas coordenadas próprias relativas à origem do referencial da plataforma, que irão depender do ponto escolhido para origem de referencial e do ponto onde a mesma onde se encontra colocada.

$${}^A P_{\text{GPS1}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

A estes dados posicionais pode aplicar-se a relação (2.13),

$${}^U P_{\text{GPS1}} = \begin{bmatrix} \text{Lat1} \\ \text{Lon1} \\ \text{Alt1} \end{bmatrix} = {}^U A R_{X,Y,Z}(\gamma, \beta, \alpha) * {}^A P_{\text{GPS1}} + {}^U P_{\text{origemA}} \quad (3.4)$$

resultando um sistema com três equações,

- $Lat1 = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot x1 + (\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) - \sin(\alpha) \cdot \cos(\gamma)) \cdot y1 + xA$
- $Lon1 = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot x1 + (\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma)) \cdot y1 + yA$
- $Alt1 = -\sin(\beta) \cdot x1 + \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot y1 + zA$

e seis incógnitas: as coordenadas x_A , y_A , z_A e os ângulos γ , β , α . Trata-se portanto de um sistema impossível.

Se se tiver um segundo receptor colocado noutra ponto da plataforma,

$${}^A P_{GPS2} = \begin{bmatrix} x2 \\ y2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

resultam mais três equações com as mesmas seis incógnitas das equações anteriores,

- $Lat2 = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot x2 + (\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) - \sin(\alpha) \cdot \cos(\gamma)) \cdot y2 + xA$
- $Lon2 = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot x2 + (\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma)) \cdot y2 + yA$
- $Alt2 = -\sin(\beta) \cdot x2 + \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot y2 + zA$

Pode agora formar-se um sistema de seis equações com seis incógnitas, que é possível e determinado. Contudo a solução apresentada será insuficiente para se atingir o nosso objectivo, uma vez que com esta apenas se consegue posicionar o ponto da plataforma escolhido para origem do referencial $\{A\}$, e através dos ângulos de rotação, posicionar o conjunto de pontos da plataforma *pertencentes à linha que une os dois receptores*. A posição dos restantes pontos permanece incerta e depende da orientação da mesma.

Da geometria sabe-se que para definir um plano são necessários três pontos. Será a inclusão de um terceiro receptor (trazendo mais três equações) que irá permitir alcançar um sistema possível e sobredeterminado, com nove equações e seis incógnitas, e ver definido o plano da plataforma. Agora consegue-se localizar qualquer um dos seus pontos e saber os ângulos de rotação que definem a atitude da plataforma.

O número mínimo de receptores é como se viu três. A inclusão de mais receptores virá trazer mais equações ao sistema, pelo que será interessante formular o problema não só utilizando três receptores mas também utilizando quatro, podendo assim estudar-se os efeitos da inclusão de receptores adicionais.

3.2 Colocação dos receptores na plataforma

Tendo em conta que os valores obtidos por estes sensores irão estar afectados por erros de medição sabe-se que a colocação dos mesmos terá influência nos resultados obtidos. Depois de determinado o número de receptores a colocar na plataforma, importa estabelecer a configuração de acordo com a qual estes se devem dispor de forma a minimizar os efeitos das perturbações no sistema.

As equações que se procura resolver são do tipo,

$$y = f(x) \quad (3.6)$$

$$y - f(x) = 0. \quad (3.7)$$

Sendo $f(x)$ uma função não-linear, continuamente diferenciável, vai-se linearizar f em torno de um ponto x_0 recorrendo ao desenvolvimento em série de Taylor truncado a partir do termo que inclui a derivada de segunda ordem. Fica,

$$y - [f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0)] = 0 \quad (3.8)$$

$$y - f(x_0) - (x - x_0) \cdot f'(x_0) = 0 \quad (3.9)$$

$$y - f(x_0) - x \cdot f'(x_0) + x_0 \cdot f'(x_0) = 0 \quad (3.10)$$

$$x \cdot f'(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0) = y - f(x_0) \quad (3.11)$$

$$x - x_0 = \frac{y - f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (3.12)$$

Admitindo que o valor da função no ponto x_0 será dado por um sensor e como tal terá associado um erro de medição, na realidade ir-se-á resolver uma equação $\tilde{y} = f(\tilde{x})$ em que $\tilde{y} = f(x_0) + \delta y$ e $\tilde{x} = x_0 + \delta x$. Substituindo em (3.12) vem

$$(x_0 + \delta x) - x_0 = \frac{(f(x_0) + \delta y) - f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (3.13)$$

$$\delta x = \frac{\delta y}{f'(x_0)} \quad (3.14)$$

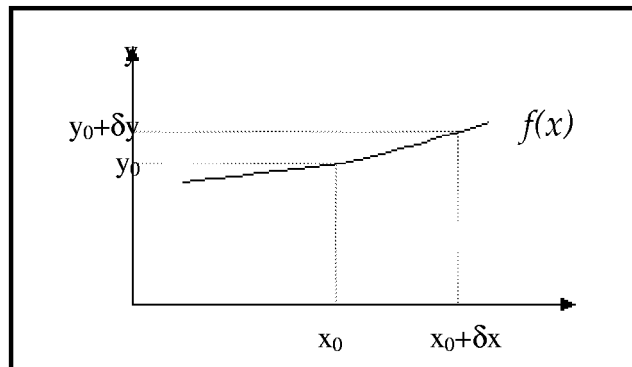


FIGURA 3.1 – Interpretação geométrica da propagação de um erro de medição δy no valor de $f(x)$

Considerando o erro de medição do sensor, δy , constante, o valor de δx depende do valor de $f'(x_0)$. Se a derivada for pequena (em valor absoluto) então existe um efeito de ampliação dos erros, mas se pelo contrário a derivada for pequena os erros não serão apreciavelmente ampliados, podendo mesmo ser reduzidos.

Tratando-se de um sistema de equações vai colocar-se o problema na forma matricial $Y = F(X)$, em que

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} \quad F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$Y - F(X) = 0 \quad (3.16)$$

Para linearizar recorrendo à fórmula de Taylor introduz-se o conceito de matriz Jacobiana, cujos elementos são as derivadas parciais de 1ª ordem de $F(X)$,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Fica,

$$Y - [F(X_0) + J(X)|_{X_0} \cdot (X - X_0)] = 0 \quad (3.18)$$

$$Y - F(X_0) - J(X)|_{X_0} \cdot (X - X_0) = 0 \quad (3.19)$$

$$J(X)|_{X_0} \cdot (X - X_0) = Y - F(X_0) \quad (3.20)$$

Não sendo $J(X)$ uma matriz quadrada, tem de se recorrer à pseudo-inversa,

$$J(X)|_{X_0}^T \cdot J(X)|_{X_0} \cdot (X - X_0) = J(X)|_{X_0}^T \cdot [Y - F(X_0)] \quad (3.21)$$

$$(J(X)|_{X_0}^T \cdot J(X)|_{X_0})^{-1} \cdot (J(X)|_{X_0}^T \cdot J(X)|_{X_0}) \cdot (X - X_0) = (J(X)|_{X_0}^T \cdot J(X)|_{X_0})^{-1} \cdot J(X)|_{X_0}^T \cdot [Y - F(X_0)] \quad (3.22)$$

$$X - X_0 = (J(X)|_{X_0}^T \cdot J(X)|_{X_0})^{-1} \cdot J(X)|_{X_0}^T \cdot [Y - F(X_0)] \quad (3.23)$$

$$\delta X = (J(X)|_{X_0}^T \cdot J(X)|_{X_0})^{-1} \cdot J(X)|_{X_0}^T \cdot \delta Y \quad (3.24)$$

Daqui se observa que para um δY constante, a variação sofrida pela solução depende de $J(X)|_{X_0}^T \cdot J(X)|_{X_0}$.

Designa-se por espectro de

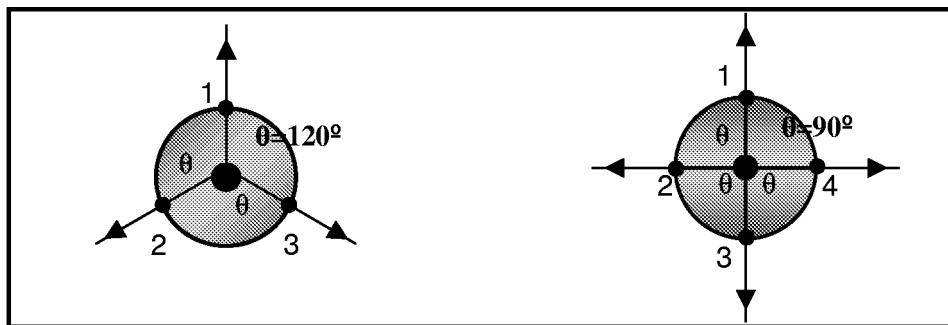


FIGURA 3.2 – Colocação óptima para três e quatro sensores, colocados num plano, à mesma distância de um ponto

3.3 Formulação do problema

Vai-se formular o problema para os casos em que se utiliza três e quatro receptores. Para três receptores dispostos obedecendo à condição acima enunciada ($\theta = 120^\circ$), pode optar-se pelo seguinte esquema de posicionamento relativo ao referencial da plataforma:

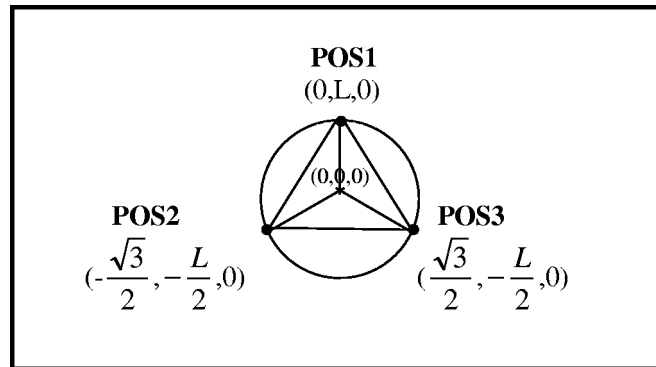


FIGURA 3.2 – Configuração a utilizar no posicionamento de três receptores na plataforma

$${}^A P_{GPS 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^A P_{GPS 2} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L \\ -\frac{1}{2} \cdot L \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^A P_{GPS 3} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L \\ -\frac{1}{2} \cdot L \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Substituindo (3.9) e (3.2) em (3.4) e igualando, obtém-se para o receptor 1,

- Lat1 = $\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) - \sin(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \cdot L + xA$
- Lon1 = $\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \cdot L + yA$
- Alt1 = $\cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot L + zA$

e usando o mesmo procedimento para os restantes receptores, temos,

- Lat2 = $-\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L - \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) - \sin(\alpha) \cdot \cos(\gamma)) \cdot L + xA$
- Lon2 = $-\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L - \frac{1}{2} \cdot (\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma)) \cdot L + yA$
- Alt2 = $\sin(\beta) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L - \frac{1}{2} \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot L + zA$
- Lat3 = $\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L - \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) - \sin(\alpha) \cdot \cos(\gamma)) \cdot L + xA$
- Lon3 = $\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L - \frac{1}{2} \cdot (\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma)) \cdot L + yA$
- Alt3 = $-\sin(\beta) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L - \frac{1}{2} \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot L + zA$

Ficamos com um sistema não-linear, com 9 equações e seis incógnitas:

1. $(\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(R) - \sin(\alpha) \cdot \cos(\gamma)) \cdot L + x_A - Lat1 = 0$
2. $(\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(R) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma)) \cdot L + y_A - Lon1 = 0$
3. $\cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot L + z_A - Alt1 = 0$
4. $-\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L - \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) - \sin(\alpha) \cdot \cos(\gamma)) \cdot L + x_A - Lat2 = 0$
5. $-\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L - \frac{1}{2} \cdot (\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma)) \cdot L + y_A - Lon2 = 0$
6. $\sin(\beta) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L - \frac{1}{2} \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot L + z_A - Alt2 = 0$
7. $\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L - \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) - \sin(\alpha) \cdot \cos(\gamma)) \cdot L + x_A - Lat3 = 0$
8. $\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L - \frac{1}{2} \cdot (\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma)) \cdot L + y_A - Lon3 = 0$
9. $-\sin(\beta) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L - \frac{1}{2} \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot L + z_A - Alt3 = 0$

incógnitas: x_A , y_A , z_A , γ , β e α

Para quatro receptores dispostos obedecendo à condição acima enunciada ($\theta = 90^\circ$), um esquema possível para a sua colocação será:

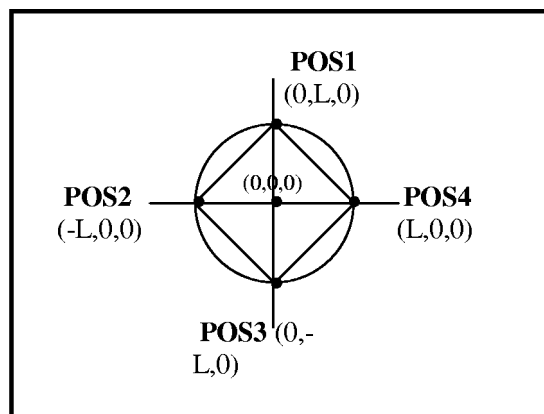


FIGURA 3.3 – Configuração a utilizar no posicionamento de quatro receptores na plataforma

$${}^A P_{GPS 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^A P_{GPS 2} = \begin{bmatrix} -L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^A P_{GPS 3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^A P_{GPS 4} = \begin{bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.x)$$

Substituindo (3.1) e (3.2) em (3.4) e igualando, obtem-se para o receptor 1,

- $Lat1 = (\cos(\alpha)*\sin(\beta)*\sin(\gamma)-\sin(\alpha)*\cos(\gamma))*L+xA$
- $Lon1 = (\sin(\alpha)*\sin(\beta)*\sin(\gamma)+\cos(\alpha)*\cos(\gamma))*L+yA$
- $Alt1 = \cos(\beta)*\sin(\gamma)*L+zA$

e usando o mesmo procedimento para os restantes receptores, temos,

- $Lat2 = -\cos(\alpha)*\cos(\beta)*L+xA$
- $Lon2 = -\sin(\alpha)*\cos(\beta)*L+yA$
- $Alt2 = \sin(\beta)*L+zA$
- $Lat3 = -(\cos(\alpha)*\sin(\beta)*\sin(\gamma)-\sin(\alpha)*\cos(\gamma))*L+xA$
- $Lon3 = -(\sin(\alpha)*\sin(\beta)*\sin(\gamma)+\cos(\alpha)*\cos(\gamma))*L+yA$
- $Alt3 = -\cos(\beta)*\sin(\gamma)*L+zA$
- $Lat4 = \cos(\alpha)*\cos(\beta)*L+xA$
- $Lon4 = \sin(\alpha)*\cos(\beta)*L+yA$
- $Alt4 = -\sin(\beta)*L+zA$

Ficamos com um sistema não-linear, com 12 equações e seis incógnitas:

1. $(\cos(\alpha)*\sin(\beta)*\sin(\gamma)-\sin(\alpha)*\cos(\gamma))*L+xA-Lat1 = 0$
2. $(\sin(\alpha)*\sin(\beta)*\sin(\gamma)+\cos(\alpha)*\cos(\gamma))*L+yA-Lon1 = 0$
3. $\sin(\beta)*L+zA -Alt1 = 0$
4. $-\cos(\alpha)*\cos(\beta)*L+xA-Lat2 = 0$
5. $-\sin(\alpha)*\cos(\beta)*L+yA-Lon2 = 0$
6. $\sin(\beta)*L+zA -Alt2 = 0$
7. $-(\cos(\alpha)*\sin(\beta)*\sin(\gamma)-\sin(\alpha)*\cos(\gamma))*L+xA-Lat3 = 0$
8. $-(\sin(\alpha)*\sin(\beta)*\sin(\gamma)+\cos(\alpha)*\cos(\gamma))*L+yA-Lon3 = 0$
9. $-\cos(\beta)*\sin(\gamma)*L+zA-Alt3 = 0$
10. $\cos(\alpha)*\cos(\beta)*L+xA-Lat4 = 0$
11. $\sin(\alpha)*\cos(\beta)*L+yA -Lon4 = 0$
12. $-\sin(\beta)*L+zA-Alt4 = 0$

incógnitas: x_A , y_A , z_A , γ , β e α

A complexidade deste tipo de sistema exige que se recorra a métodos de optimização não-linear, suficientemente robustos para ultrapassar esta complexidade.

Nesta óptica opta-se por transformar este problema num problema de mínimos quadrados, resultando uma única função F (definida como a função soma dos erros quadráticos das leituras feitas pelos vários receptores) que se quer minimizar:

$$\begin{aligned} F = & ((\cos(\alpha)*\sin(\beta)*\sin(\gamma)-\sin(\alpha)*\cos(\gamma))*L+xA-Lat1)^2 + \dots \\ & ((\sin(\alpha)*\sin(\beta)*\sin(\gamma)+\cos(\alpha)*\cos(\gamma))*L+yA-Lon1)^2 + \dots \\ & (\sin(\beta)*L+zA -Alt1)^2 + \dots \\ & (-\cos(\alpha)*\cos(\beta)*L+xA-Lat2)^2 + \dots \\ & (-\sin(\alpha)*\cos(\beta)*L+yA-Lon2)^2 + \dots \\ & (\sin(\beta)*L+zA -Alt2)^2 + \dots \\ & (-\cos(\alpha)*\sin(\beta)*\sin(\gamma)-\sin(\alpha)*\cos(\gamma))*L+xA-Lat3)^2 + \dots \\ & (-\sin(\alpha)*\sin(\beta)*\sin(\gamma)+\cos(\alpha)*\cos(\gamma))*L+yA-Lon3)^2 + \dots \\ & (-\cos(\beta)*\sin(\gamma)*L+zA-Alt3)^2 + \dots \\ & (\cos(\alpha)*\cos(\beta)*L+xA-Lat4)^2 + \dots \\ & (\sin(\alpha)*\cos(\beta)*L+yA -Lon4)^2 + \dots \\ & (-\sin(\beta)*L+zA-Alt4)^2 \end{aligned}$$

A formulação do problema nesta forma converte-o num problema de optimização, no qual se vai tomar uma decisão relativamente à atribuição de valores às várias incógnitas, que se encontram interligadas, focalizando a atenção num único objectivo: a soma dos erros quadráticos das diferentes leituras. O valor desta função irá permitir quantificar a prestação da solução encontrada e avaliar a qualidade da nossa decisão.

Reunidas as condições, tem de se procurar implementar o algoritmo mencionado no capítulo 2, que como se viu é suficientemente robusto para solucionar o problema formulado recorrendo às técnicas descritas. Para se conseguir cumprir com êxito esta missão foi necessária uma forte componente de experimentação que permitiu a captura dos aspectos vitais do problema.

O ALGORITMO

inicialização:

Fixar a tolerância do erro ε admissível

Fixar o parâmetro delta

Inicializar $f(X_{k+1})=0$

Receber as leituras dos receptores

Estabelecer X_0 para iteração inicial:

Se for o primeiro conjunto de leituras

X_0 é igual ao valor aproximado introduzido pelo utilizador

Caso contrário

X_0 é igual à solução encontrada para a leitura anterior

Enquanto $p \neq 0$

calcular Gradiente transposto de F no ponto X_0

calcular Hessiana de F no ponto X_0

efectuar factorização LDU da matriz Hessiana

verificar os elementos da diagonal principal da matriz D

se algum elemento for menor que delta, é substituído por delta

calcular direcção de descida através de $d_K = \text{inv}(L * D * U) * \text{Grad}T$

calcular o parâmetro $\alpha_{\text{máximo}}$ "seguro"

pesquisa linear entre 0 e $\alpha_{\text{máx}}$ obtendo α que minimiza $f(X_k - \alpha \cdot d_K)$

calcular o novo ponto através de $X_{k+1} = X_k - \alpha \cdot d_K$

atribuir a X_k o valor de X_{k+1}

calcular $f(X_{k+1})$

Termina com $p=0$ quando $f(X_{k+1}) - f_k \leq \varepsilon$

Os códigos do algoritmo apresenta duas versões consoante se utilize três ou quatro receptores, e estas apresentam-se nos anexos A e B, respectivamente.

4. ERROS ASSOCIADOS A UM RECEPTOR

A partir dos ficheiros , que contém as leituras dos diferentes tipos de receptor podemos caracterizar cada um deles em termos da precisão oferecida ao utilizador.

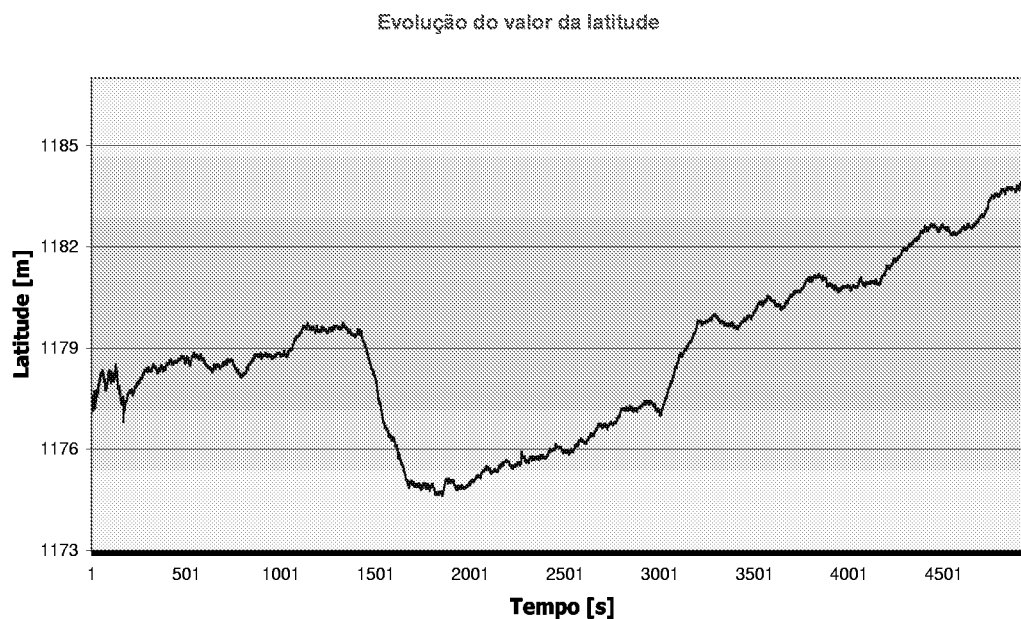


FIGURA 4.1 – Valores de latitude registados pelo receptor MOTOROLA de 8 canais

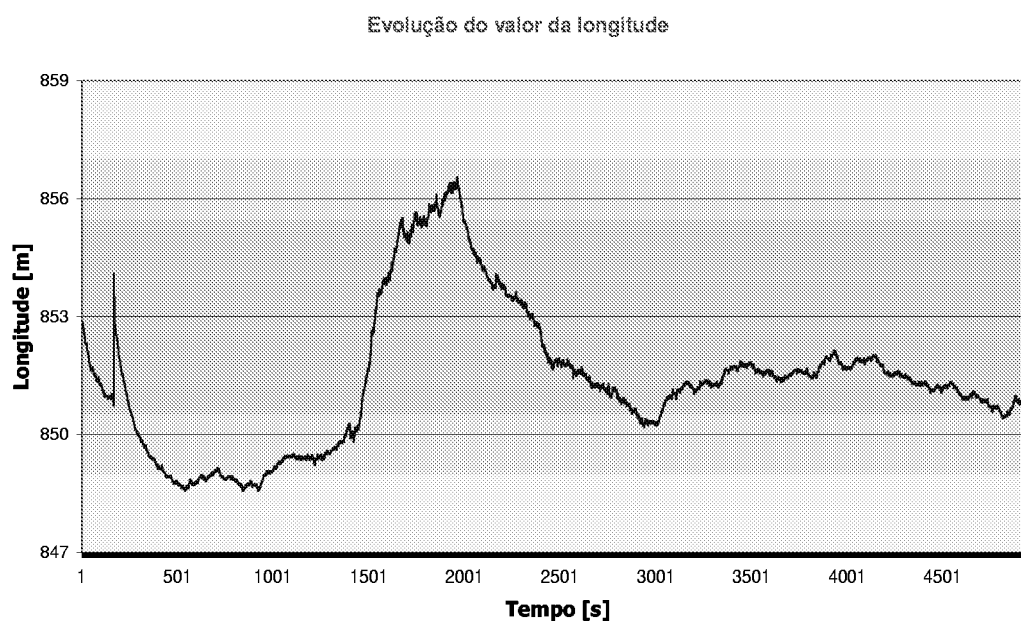


FIGURA 4.2 – Valores de longitude registados pelo receptor MOTOROLA de 8 canais

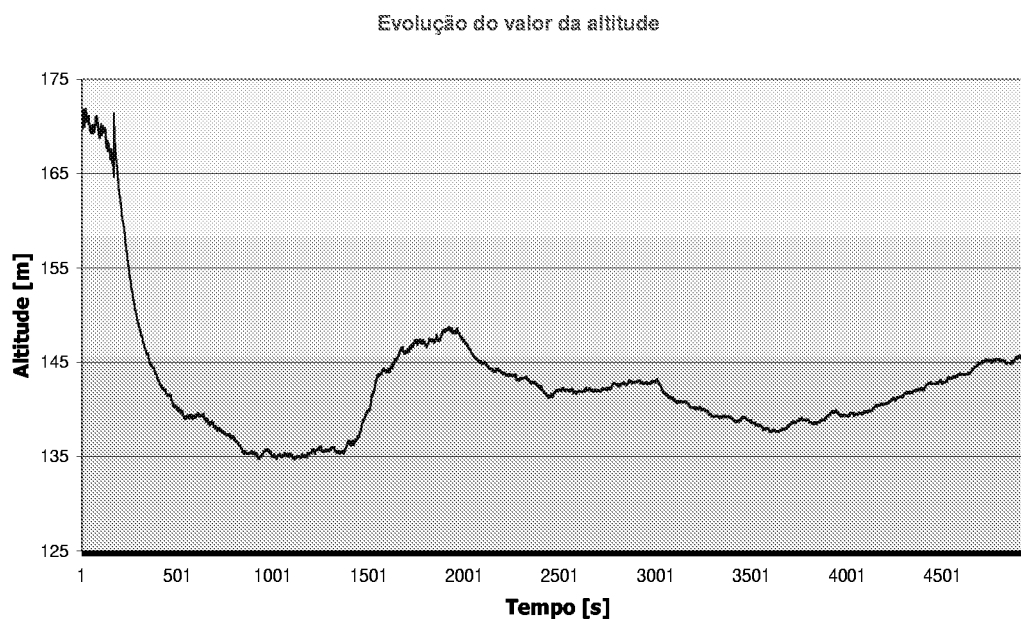


FIGURA 4.3 – Valores de altitude registados pelo receptor MOTOROLLA de 8 canais

TABELA 4.1 – Caracterização estatística do erro apresentado pelo receptor MOTOROLLA de 8 canais

	LATITUDE [m]	LONGITUDE [m]	ALTITUDE [m]
MÉDIA	1178,831	851,396	142,575
VARIÂNCIA	6	3,263	44,323
DESVIO PADRÃO	2,45	1,806	6,658

TABELA 4.3 – Caracterização estatística do erro apresentado pelo receptor a operar no modo DGPS

	LATITUDE [m]	LONGITUDE [m]	ALTITUDE [m]
MÉDIA			
VARIÂNCIA			
DESVIO PADRÃO			

Evolução do valor da Latitude

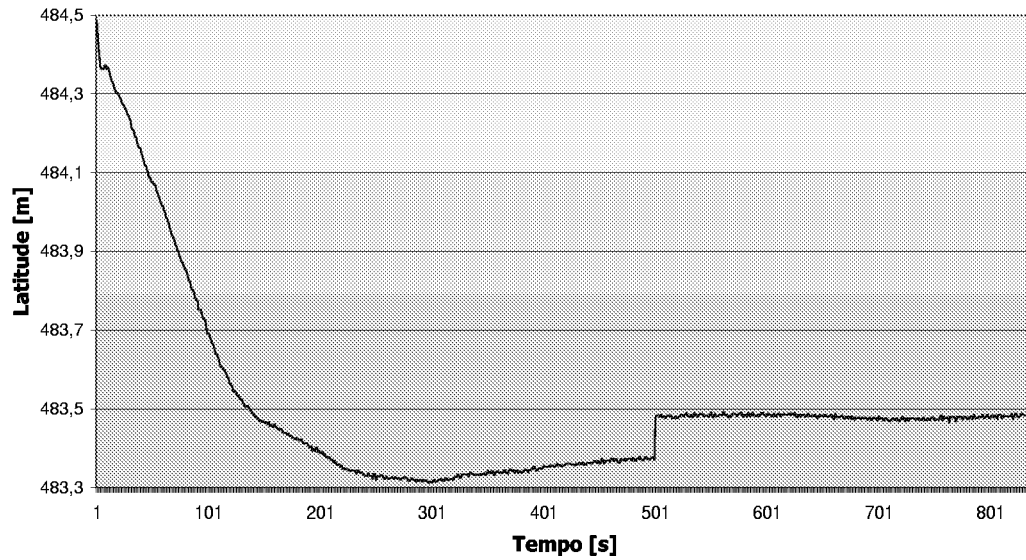


FIGURA 4.13 – Valores para a latitude registados pelo receptor a operar no modo RTK

Evolução do valor da Longitude

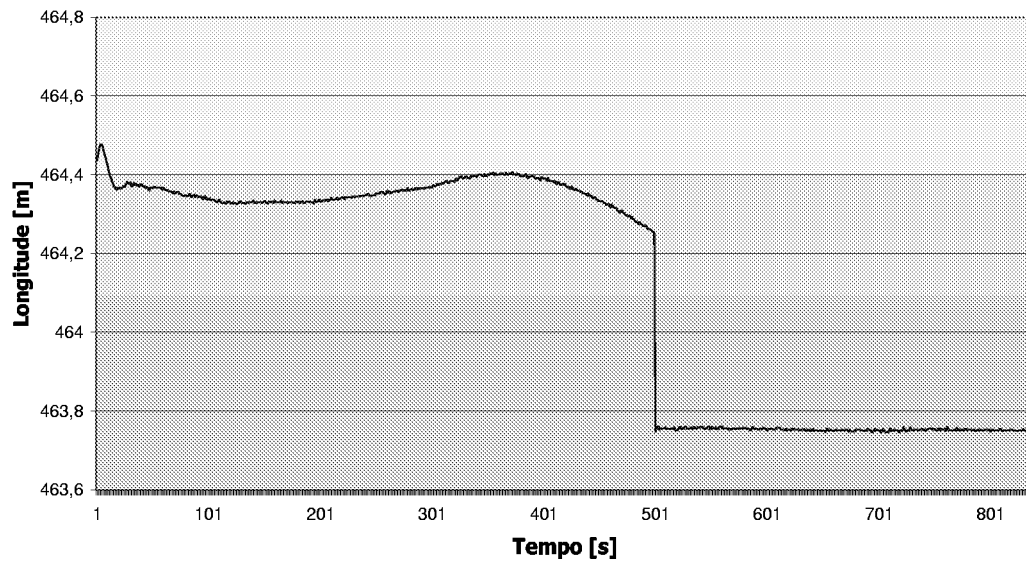


FIGURA 4.14 – Valores para a longitude registados pelo receptor a operar no modo RTK

Evolução do valor da Altitude

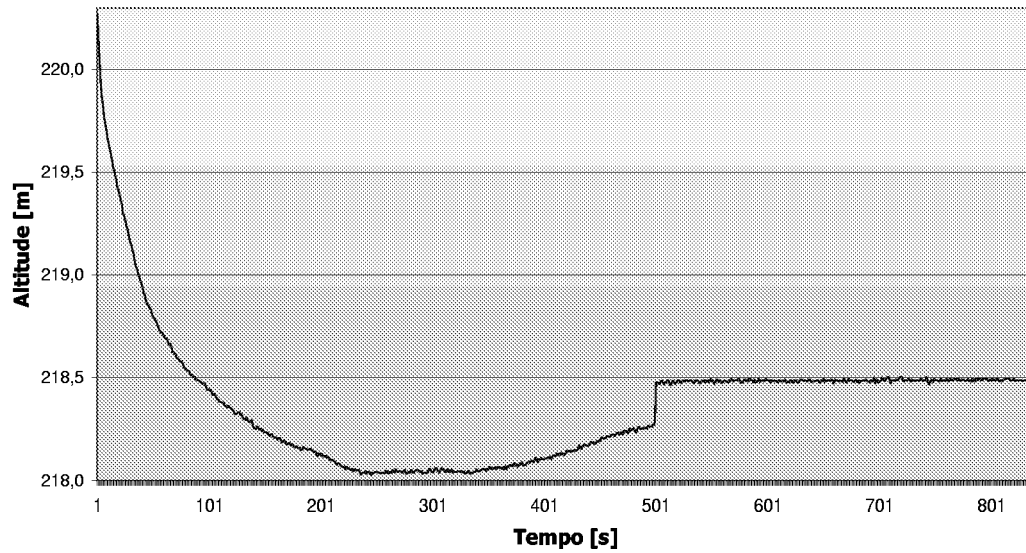


FIGURA 4.15 – Valores para a altitude registados pelo receptor a operar no modo RTK

TABELA 4.4 – Caracterização estatística do erro apresentado pelo receptor RTK

	LATITUDE [m]	LONGITUDE [m]	ALTITUDE [m]
MÉDIA	483,480	463,754	218,485
VARIÂNCIA	$25,1 \cdot 10^{-6}$	$10,6 \cdot 10^{-6}$	$41,9 \cdot 10^{-6}$
DESVIO PADRÃO	$5,01 \cdot 10^{-3}$	$3,26 \cdot 10^{-3}$	$6,47 \cdot 10^{-3}$

5. Efeito das perturbações no sistema

Depois de, no capítulo 4, se ter caracterizado os erros associados às medições feitas pelos diferentes receptores, pode proceder-se à análise da influência dos mesmos na solução alcançada pelo algoritmo desenvolvido.

Para efectuar esta análise considerou-se a plataforma estática numa posição bem definida ficando assim com um sistema (teórico) não perturbado cuja solução se conhece. A posição considerada foi sempre, por uma questão de simplicidade, aquela a que corresponde a solução,

$$X = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \\ \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De seguida utilizou-se o gerador de números aleatórios do MATLABTM para criar as amostras dos erros de medição, as quais foram injectadas no sistema (prático) que se diz agora perturbado. Teve-se em atenção a necessidade de dar a cada amostra um número suficientemente elevado de elementos para que estas sejam uma aproximação válida às medições reais efectuadas com os sensores, o que se prova no anexo C. O número de elementos considerado para cada amostra foi 10 000.

Os ensaios a realizar variam quer no número de receptores utilizados (3 ou 4), quer na distância L considerada para os separar do ponto central, quer ainda, do tipo de receptores utilizados. Nas tabelas seguintes apresenta-se os resultados:

TABELA 5.1 – Variância, em função de L, das soluções obtidas para três receptores Motorola de 8 canais

L [m]	σ_{xA}^2 [m ²]	σ_{yA}^2 [m ²]	σ_{zA}^2 [m ²]
8	1,8524	1,0179	14,2175
10	1,8962	1,1040	14,2283
12	1,9395	1,0705	14,7911
15	1,9736	1,0794	15,0169
20	1,9870	1,0852	15,1003
25	1,9899	1,0858	15,1087
30	1,9901	1,0859	15,1089
50	1,9901	1,0859	15,1089
100	1,9901	1,0859	15,1089

L [m]	σ_{γ}^2 [graus ²]	σ_{β}^2 [graus ²]	σ_{α}^2 [graus ²]
8	149,8322	145,6856	133,3925
10	12,2193	10,4887	1,2861
12	9,1633	8,2272	0,8613
15	6,2838	5,8428	0,5260
20	3,7610	3,6424	0,2778
25	2,4870	2,4649	0,1685
30	1,7602	1,7678	0,1127
50	0,6534	0,6685	0,0378
100	0,1655	0,1707	0,0091

TABELA 5.2 – Variância, em função de L, das soluções obtidas para quatro receptores Motorola de 8 canais

L [m]	σ_{xA}^2 [m ²]	σ_{yA}^2 [m ²]	σ_{zA}^2 [m ²]
8	1,4049	0,7736	10,8763
10	1,4434	0,8001	11,0965
12	1,4625	0,8157	11,2426
15	1,4753	0,8211	11,3307
20	1,4813	0,8230	11,3541
25	1,4819	0,8233	11,3573
30	1,4819	0,8233	11,3574
50	1,4819	0,8233	11,3574
100	1,4819	0,8233	11,3574

L [m]	σ_{γ}^2 [graus ²]	σ_{β}^2 [graus ²]	σ_{α}^2 [graus ²]
8	149,8875	147,2798	137,1509
10	9,8203	8,6581	0,9394
12	7,2665	6,5689	0,6252
15	4,9351	4,5938	0,3819
20	2,9142	2,8053	0,2003
25	1,9135	1,8735	0,1220
30	1,3492	1,3329	0,0820
50	0,4970	0,4974	0,0279
100	0,1254	0,1262	0,0068

TABELA 5.3 – Variância, em função de L, das soluções obtidas para três receptores a operar no modo RTK

L [m]	$\sigma_{x\Delta}^2$ [m ²]	$\sigma_{y\Delta}^2$ [m ²]	$\sigma_{z\Delta}^2$ [m ²]
0.03	8,3215e-006	3,5255e-006	1,4280e-005
0.05	8,3250e-006	3,5268e-006	1,4281e-005
0.1	8,3254e-006	3,5275e-006	1,4283e-005
0.2	8,3254e-006	3,5275e-006	1,4283e-005
0.5	8,3254e-006	3,5275e-006	1,4283e-005
1	8,3254e-006	3,5275e-006	1,4283e-005
2	8,3254e-006	3,5275e-006	1,4283e-005
5	8,3254e-006	3,5275e-006	1,4283e-005
10	8,3254e-006	3,5275e-006	1,4283e-005

L [m]	σ_{γ}^2 [graus ²]	σ_{β}^2 [graus ²]	σ_{α}^2 [graus ²]
0.03	1,7131	1,7704	0,3953
0.05	0,6245	0,6474	0,1375
0.1	0,1547	0,1604	0,0348
0.2	0,0393	0,0406	0,0087
0.5	0,0063	0,0065	0,0014
1	0,0016	0,0016	3,4640e-004
2	3,9265e-004	4,0619e-004	8,6585e-005
5	6,2819e-005	6,4991e-005	1,3853e-005
10	1,5705e-005	1,6248e-005	3,4631e-006

TABELA 5.4 – Variância, em função de L, das soluções obtidas para quatro receptores a operar no modo RTK

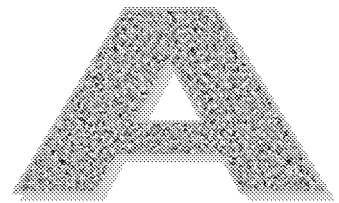
L [m]	$\sigma_{x\Delta}^2$ [m ²]	$\sigma_{y\Delta}^2$ [m ²]	$\sigma_{z\Delta}^2$ [m ²]
0.03	6,1994e-006	2,6745e-006	1,0736e-005
0.05	6,1994e-006	2,6745e-006	1,0737e-005
0.1	6,1994e-006	2,6745e-006	1,0737e-005
0.2	6,1994e-006	2,6745e-006	1,0737e-005
0.5	6,1994e-006	2,6745e-006	1,0737e-005
1	6,1994e-006	2,6745e-006	1,0737e-005
2	6,1994e-006	2,6745e-006	1,0737e-005
5	6,1994e-006	2,6745e-006	1,0737e-005
10	6,1994e-006	2,6745e-006	1,0737e-005

L [m]	σ_{γ}^2 [graus ²]	σ_{β}^2 [graus ²]	σ_{α}^2 [graus ²]
0.03	1,3018	1,3181	0,2921
0.05	0,4736	0,4783	0,1039
0.1	0,1189	0,1199	0,0259
0.2	0,0297	0,0300	0,0065
0.5	0,0048	0,0048	0,0010
1	0,0012	0,0012	0,0003
2	2,9733e-004	2,9980e-004	6,4480e-005
5	4,7571e-005	4,7967e-005	1,0316e-005
10	1,1893e-005	1,1992e-005	2,5791e-006

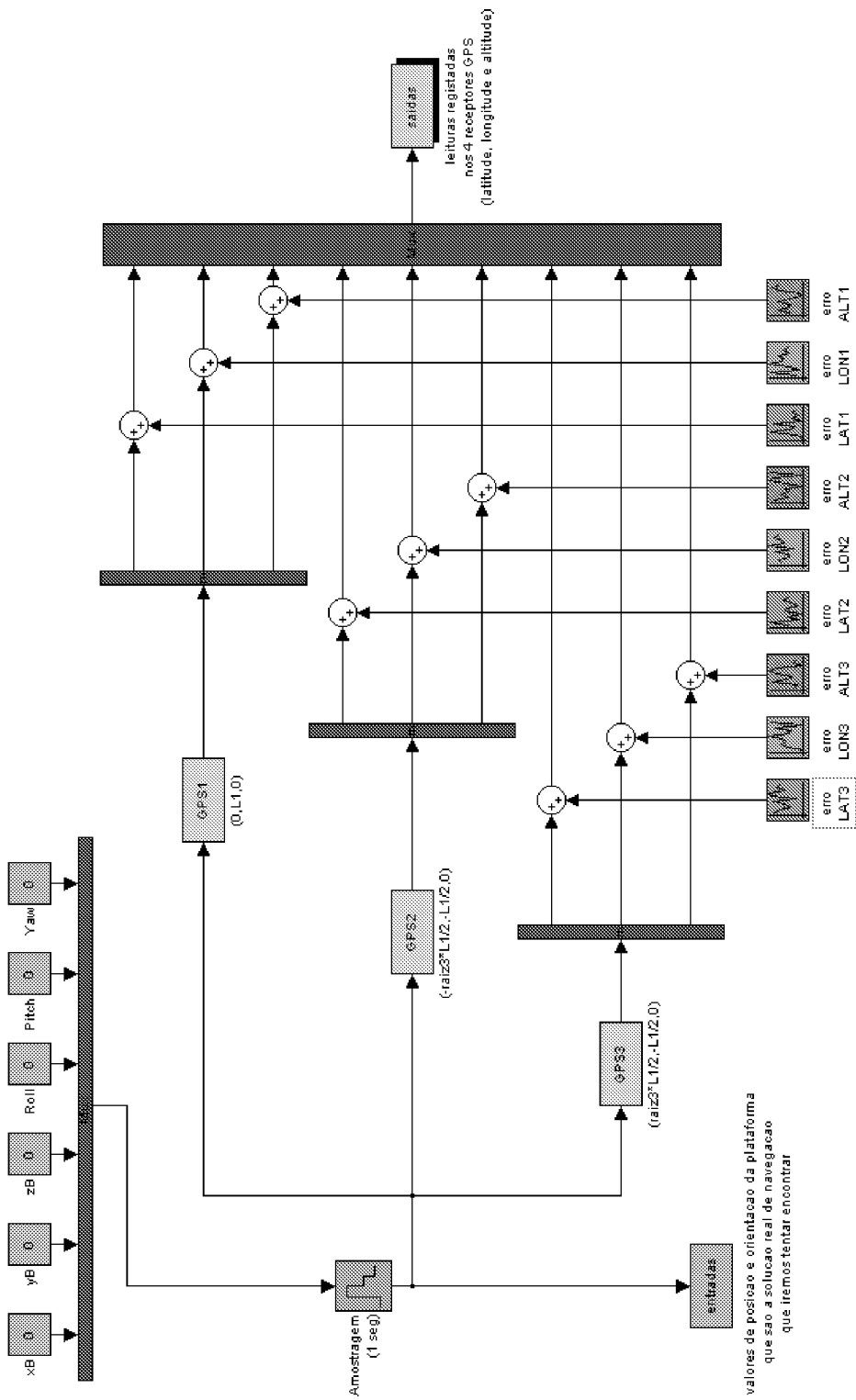
6. Conclusões finais

Existe ainda uma possibilidade que neste trabalho não foi estudada, podendo ser uma direcção de trabalho futuro, que é a de se procurar correlação entre as leituras dos receptores e efectuar em pós-processamento cálculos explorando essa correlação por forma a diminuir uma parte do erro de medição.

ANEXO



Ficheiro **ESTATICO_3.mdl** (Simulink)



valores de posição e orientação da plataforma que são a solução real de navegação que iremos tentar encontrar

Ficheiro ALGORITMO_3.m

```

%* a variável saídas contém as leituras simuladas *
dim = size(saídas);
ciclos = dim(1,1);

%* definir o erro máximo admissível *
erro_max = 0.00001;

%* definir o parâmetro delta *
delta=0.00000001;

%* afastamento dos receptores em relação ao ponto central *
L1 = 10;

%* receber as leituras simuladas, uma a uma, e processá-las *
for c = 1:ciclos

    LAT1 = saídas(c,1) ; LON1 = saídas(c,2) ; ALT1 = saídas(c,3) ;
    LAT2 = saídas(c,4) ; LON2 = saídas(c,5) ; ALT2 = saídas(c,6) ;
    LAT3 = saídas(c,7) ; LON3 = saídas(c,8) ; ALT3 = saídas(c,9) ;

%*** iteração inicial ***
if c == 1
    %* a variável entradas contém as soluções teóricas
    X = [entradas(1,1)
        entradas(1,2)
        entradas(1,3)
        entradas(1,4)
        entradas(1,5)
        entradas(1,6)];
else
    X = X1;
end

xA = X(1);
yA = X(2);
zA = X(3);
R = X(4);
P = X(5);
Y = X(6);

p = 1;
total_iteracoes = 0;
F_velho = 0;
n_iteracoes = 1;

while p
%* DEFINIÇÃO DO GRADIENTE TRANSPONTO *
GradT=[2*(cos(Y)*sin(P)*sin(R)-sin(Y)*cos(R))*L1+6*xA-2*LAT1-4*(1/2*cos(Y)*sin(P)*sin(R)-
1/2*sin(Y)*cos(R))*L1-2*LAT2-2*LAT3
    2*(sin(Y)*sin(P)*sin(R)+cos(Y)*cos(R))*L1+6*yA-2*LON1-4*(1/2*sin(Y)*sin(P)*sin(R)+
1/2*cos(Y)*cos(R))*L1-2*LON2-2*LON3
    6*zA-2*ALT1-2*ALT2-2*ALT3
    2*((cos(Y)*sin(P)*sin(R)-sin(Y)*cos(R))*L1+xA-LAT1)*(cos(Y)*sin(P)*cos(R)+sin(Y)*
sin(R))*L1+2*((sin(Y)*sin(P)*sin(R)+cos(Y)*cos(R))*L1+yA-LON1)*(sin(Y)*sin(P)*cos(R)-
cos(Y)*sin(R))*L1+2*(cos(P)*sin(R)*L1+zA-ALT1)*cos(P)*cos(R)*L1-2*(-1/2*cos(Y)*cos(P)*
3^(1/2)*L1-(1/2*cos(Y)*sin(P)*sin(R)-1/2*sin(Y)*cos(R))*L1+xA-LAT2)*(1/2*cos(Y)*sin(P)*
cos(R)+1/2*sin(Y)*sin(R))*L1-2*(-1/2*sin(Y)*cos(P)*3^(1/2)*L1-(1/2*sin(Y)*sin(P)*sin(R)+
1/2*cos(Y)*cos(R))*L1+yA-LON2)*(1/2*sin(Y)*sin(P)*cos(R)-1/2*cos(Y)*sin(R))*L1-

```

$$\begin{aligned}
 & (1/2*\sin(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\cos(P)*\sin(R)*L1+zA-ALT2)*\cos(P)*\cos(R)*L1-2*(1/2*\cos(Y)* \\
 & \cos(P)*3^{1/2}*L1-(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA-LAT3)*(1/2*\cos(Y)* \\
 & \sin(P)*\cos(R)+1/2*\sin(Y)*\sin(R))*L1-2*(1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-(1/2*\sin(Y)*\sin(P)* \\
 & \sin(R)+1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA-LON3)*(1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\cos(R)-1/2*\cos(Y)*\sin(R))*L1-(- \\
 & 1/2*\sin(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\cos(P)*\sin(R)*L1+zA-ALT3)*\cos(P)*\cos(R)*L1 \\
 & 2*((\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA- \\
 & LAT1)*\cos(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1+2*((\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA- \\
 & LON1)*\sin(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1-2*(\cos(P)*\sin(R)*L1+zA-ALT1)*\sin(P)*\sin(R)*L1+2*(- \\
 & 1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA- \\
 & LAT2)*(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\cos(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1)+2*(- \\
 & 1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-(1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA- \\
 & LON2)*(1/2*\sin(Y)*\sin(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\sin(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1)+2*(1/2*\sin(P)*3^{1/2}*L1- \\
 & 1/2*\cos(P)*\sin(R)*L1+zA- \\
 & ALT2)*(1/2*\cos(P)*3^{1/2}*L1+1/2*\sin(P)*\sin(R)*L1)+2*(1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1- \\
 & (1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA-LAT3)*(-1/2*\cos(Y)*\sin(P)*3^{1/2}*L1- \\
 & 1/2*\cos(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1)+2*(1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1- \\
 & (1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA-LON3)*(-1/2*\sin(Y)*\sin(P)*3^{1/2}*L1- \\
 & 1/2*\sin(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1)+2*(-1/2*\sin(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\cos(P)*\sin(R)*L1+zA-ALT3)*(- \\
 & 1/2*\cos(P)*3^{1/2}*L1+1/2*\sin(P)*\sin(R)*L1) \\
 & 2*((\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA-LAT1)*(-\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)- \\
 & \cos(Y)*\cos(R))*L1+2*((\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA-LON1)*(\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)- \\
 & \sin(Y)*\cos(R))*L1+2*(-1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)- \\
 & 1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA-LAT2)*(1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-(-1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)- \\
 & 1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1)+2*(-1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1- \\
 & (1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA-LON2)*(-1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1- \\
 & (1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1)+2*(1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1- \\
 & (1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA-LAT3)*(-1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1- \\
 & 1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1)+2*(1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1- \\
 & (1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA-LON3)*(1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1- \\
 & (1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1)];
 \end{aligned}$$

%* DEFINIÇÃO DA MATRIZ HESSIANA *

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{H}=\text{zeros}(6); \\
 & \mathbf{H}(1,1)=6; \\
 & \mathbf{H}(1,4)=2*(\cos(Y)*\sin(P)*\cos(R)+\sin(Y)*\sin(R))*L1- \\
 & 4*(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\cos(R)+1/2*\sin(Y)*\sin(R))*L1; \\
 & \mathbf{H}(1,6)=2*(-\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)-\cos(Y)*\cos(R))*L1-4*(-1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)- \\
 & 1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1; \\
 & \mathbf{H}(2,2)=6; \\
 & \mathbf{H}(2,4)=2*(\sin(Y)*\sin(P)*\cos(R)-\cos(Y)*\sin(R))*L1-4*(1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\cos(R)- \\
 & 1/2*\cos(Y)*\sin(R))*L1; \\
 & \mathbf{H}(2,6)=2*(\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-\sin(Y)*\cos(R))*L1-4*(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)- \\
 & 1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1; \\
 & \mathbf{H}(3,3)=6; \\
 & \mathbf{H}(4,1)=\mathbf{H}(1,4); \\
 & \mathbf{H}(4,2)=\mathbf{H}(2,4); \\
 & \mathbf{H}(4,4)=2*(\cos(Y)*\sin(P)*\cos(R)+\sin(Y)*\sin(R))^2*L1^2+2*((\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)- \\
 & \sin(Y)*\cos(R))*L1+xA-LAT1)*(-\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)+\sin(Y)*\cos(R))*L1+2*(\sin(Y)*\sin(P)*\cos(R)- \\
 & \cos(Y)*\sin(R))^2*L1^2+2*((\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA-LON1)*(- \\
 & \sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)-\cos(Y)*\cos(R))*L1+3*\cos(P)^2*\cos(R)^2*L1^2-2*(\cos(P)*\sin(R)*L1+zA- \\
 & ALT1)*\cos(P)*\sin(R)*L1+4*(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\cos(R)+1/2*\sin(Y)*\sin(R))^2*L1^2-2*(- \\
 & 1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA-LAT2)*(- \\
 & 1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)+1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1+4*(1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\cos(R)- \\
 & 1/2*\cos(Y)*\sin(R))^2*L1^2-2*(-1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1- \\
 & (1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA-LON2)*(-1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)- \\
 & 1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1+(1/2*\sin(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\cos(P)*\sin(R)*L1+zA-ALT2)*\cos(P)*\sin(R)*L1- \\
 & 2*(1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA-LAT3)*(- \\
 & 1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)+1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1-2*(1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1- \\
 & (1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA-LON3)*(-1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)- \\
 & 1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1+(-1/2*\sin(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\cos(P)*\sin(R)*L1+zA-ALT3)*\cos(P)*\sin(R)*L1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{H(4,5)}=2*\cos(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1^2*(\cos(Y)*\sin(P)*\cos(R)+\sin(Y)*\sin(R))+2*((\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R) \\
 & -\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA- \\
 & LAT1)*\cos(Y)*\cos(P)*\cos(R)*L1+2*\sin(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1^2*(\sin(Y)*\sin(P)*\cos(R)- \\
 & \cos(Y)*\sin(R))+2*((\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA-LON1)*\sin(Y)*\cos(P)*\cos(R)*L1- \\
 & 2*\sin(P)*\sin(R)*L1^2*\cos(P)*\cos(R)-2*(\cos(P)*\sin(R)*L1+zA-ALT1)*\sin(P)*\cos(R)*L1- \\
 & 2*(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*3^{1/2})*L1- \\
 & 1/2*\cos(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1*(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\cos(R)+1/2*\sin(Y)*\sin(R))*L1-(- \\
 & 1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2})*L1-(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA- \\
 & LAT2)*\cos(Y)*\cos(P)*\cos(R)*L1-2*(1/2*\sin(Y)*\sin(P)*3^{1/2})*L1- \\
 & 1/2*\sin(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1*(1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\cos(R)-1/2*\cos(Y)*\sin(R))*L1-(- \\
 & 1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2})*L1-(1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA- \\
 & LON2)*\sin(Y)*\cos(P)*\cos(R)*L1- \\
 & (1/2*\cos(P)*3^{1/2})*L1+1/2*\sin(P)*\sin(R)*L1*\cos(P)*\cos(R)*L1+(1/2*\sin(P)*3^{1/2})*L1- \\
 & 1/2*\cos(P)*\sin(R)*L1+zA-ALT2)*\sin(P)*\cos(R)*L1-2*(-1/2*\cos(Y)*\sin(P)*3^{1/2})*L1- \\
 & 1/2*\cos(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1*(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\cos(R)+1/2*\sin(Y)*\sin(R))*L1- \\
 & (1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2})*L1-(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA- \\
 & LAT3)*\cos(Y)*\cos(P)*\cos(R)*L1-2*(-1/2*\sin(Y)*\sin(P)*3^{1/2})*L1- \\
 & 1/2*\sin(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1*(1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\cos(R)-1/2*\cos(Y)*\sin(R))*L1- \\
 & (1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2})*L1-(1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA- \\
 & LON3)*\sin(Y)*\cos(P)*\cos(R)*L1-(- \\
 & 1/2*\cos(P)*3^{1/2})*L1+1/2*\sin(P)*\sin(R)*L1*\cos(P)*\cos(R)*L1+(-1/2*\sin(P)*3^{1/2})*L1- \\
 & 1/2*\cos(P)*\sin(R)*L1+zA-ALT3)*\sin(P)*\cos(R)*L1; \\
 & \mathbf{H(4,6)}=2*(-\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)- \\
 & \cos(Y)*\cos(R))*L1^2*(\cos(Y)*\sin(P)*\cos(R)+\sin(Y)*\sin(R))+2*((\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)- \\
 & \sin(Y)*\cos(R))*L1+xA-LAT1)*(-\sin(Y)*\sin(P)*\cos(R)+\cos(Y)*\sin(R))*L1+2*(\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)- \\
 & \sin(Y)*\cos(R))*L1^2*(\sin(Y)*\sin(P)*\cos(R)- \\
 & \cos(Y)*\sin(R))+2*((\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA- \\
 & LON1)*(\cos(Y)*\sin(P)*\cos(R)+\sin(Y)*\sin(R))*L1-2*(1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2})*L1-(- \\
 & 1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1*(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\cos(R)+1/2*\sin(Y)*\sin(R))*L1- \\
 & 2*(-1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2})*L1-(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA-LAT2)*(- \\
 & 1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\cos(R)+1/2*\cos(Y)*\sin(R))*L1-2*(-1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2})*L1- \\
 & (1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1*(1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\cos(R)-1/2*\cos(Y)*\sin(R))*L1- \\
 & 2*(-1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2})*L1-(1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA- \\
 & LON2)*(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\cos(R)+1/2*\sin(Y)*\sin(R))*L1-2*(-1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2})*L1-(- \\
 & 1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1*(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\cos(R)+1/2*\sin(Y)*\sin(R))*L1- \\
 & 2*(1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2})*L1-(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA-LAT3)*(- \\
 & 1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\cos(R)+1/2*\cos(Y)*\sin(R))*L1-2*(1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2})*L1- \\
 & (1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1*(1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\cos(R)-1/2*\cos(Y)*\sin(R))*L1- \\
 & 2*(1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2})*L1-(1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA- \\
 & LON3)*(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\cos(R)+1/2*\sin(Y)*\sin(R))*L1; \\
 & \mathbf{H(5,4)}=H(4,5); \\
 & \mathbf{H(5,5)}=2*\cos(Y)^2*\cos(P)^2*\sin(R)^2*L1^2-2*((\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA- \\
 & LAT1)*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)*L1+2*\sin(Y)^2*\cos(P)^2*\sin(R)^2*L1^2- \\
 & 2*((\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA- \\
 & LON1)*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)*L1+2*\sin(P)^2*\sin(R)^2*L1^2-2*(\cos(P)*\sin(R)*L1+zA- \\
 & ALT1)*\cos(P)*\sin(R)*L1+2*(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*3^{1/2})*L1-1/2*\cos(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1)^2+2*(- \\
 & 1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2})*L1-(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA- \\
 & LAT2)*(1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2})*L1+1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)*L1+2*(1/2*\sin(Y)*\sin(P)*3^{1/2})* \\
 & L1-1/2*\sin(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1)^2+2*(-1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2})*L1- \\
 & (1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA- \\
 & LON2)*(1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2})*L1+1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)*L1+2*(1/2*\cos(P)*3^{1/2})*L1+1/2* \\
 & \sin(P)*\sin(R)*L1)^2+2*(1/2*\sin(P)*3^{1/2})*L1-1/2*\cos(P)*\sin(R)*L1+zA-ALT2)*(- \\
 & 1/2*\sin(P)*3^{1/2})*L1+1/2*\cos(P)*\sin(R)*L1+2*(-1/2*\cos(Y)*\sin(P)*3^{1/2})*L1- \\
 & 1/2*\cos(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1)^2+2*(1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2})*L1-(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)- \\
 & 1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA-LAT3)*(- \\
 & 1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2})*L1+1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)*L1+2*(-1/2*\sin(Y)*\sin(P)*3^{1/2})*L1- \\
 & 1/2*\sin(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1)^2+2*(1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2})*L1- \\
 & (1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA-LON3)*(- \\
 & 1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2})*L1+1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)*L1+2*(-
 \end{aligned}$$

$$1/2*\cos(P)*3^{1/2}*L1+1/2*\sin(P)*\sin(R)*L1^2+2*(-1/2*\sin(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\cos(P)*\sin(R)*L1+zA-ALT3)*(1/2*\sin(P)*3^{1/2}*L1+1/2*\cos(P)*\sin(R)*L1);$$

$$H(5,6)=2*(-\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)-\cos(Y)*\cos(R))*L1^2*\cos(Y)*\cos(P)*\sin(R)-2*((\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA-LAT1)*\sin(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1+2*(\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-\sin(Y)*\cos(R))*L1^2*\sin(Y)*\cos(P)*\sin(R)+2*((\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA-LON1)*\cos(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1+2*(1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-(-1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1)*(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\cos(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1)+2*(-1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\cos(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA-LAT2)*(-1/2*\sin(Y)*\sin(P)*3^{1/2}*L1+1/2*\sin(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1)+2*(-1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1)*(1/2*\sin(Y)*\sin(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\sin(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1)+2*(-1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA-LON2)*(1/2*\cos(Y)*\sin(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\cos(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1)+2*(-1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1*(-1/2*\cos(Y)*\sin(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\cos(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1)+2*(1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA-LAT3)*(1/2*\sin(Y)*\sin(P)*3^{1/2}*L1+1/2*\sin(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1)+2*(1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1)*(-1/2*\sin(Y)*\sin(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\sin(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1)+2*(1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA-LON3)*(-1/2*\cos(Y)*\sin(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\cos(Y)*\cos(P)*\sin(R)*L1);$$

H(6,1)=H(1,6);

H(6,2)=H(2,6);

H(6,4)=H(4,6);

H(6,5)=H(5,6);

$$H(6,6)=2*(-\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)-\cos(Y)*\cos(R))^2*L1^2+2*((\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA-LAT1)*(-\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)+\sin(Y)*\cos(R))*L1+2*(\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-\sin(Y)*\cos(R))^2*L1^2+2*((\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA-LON1)*(-\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)-\cos(Y)*\cos(R))*L1+2*(1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-(-1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1)^2+2*(-1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA-LAT2)*(1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)+1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1)+2*(-1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1^2+2*(-1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA-LON2)*(1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1)+2*(-1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1^2+2*(1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)+1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1+xA-LAT3)*(-1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1)+2*(1/2*\cos(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\cos(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\sin(Y)*\cos(R))*L1^2+2*(1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)+1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1+yA-LON3)*(-1/2*\sin(Y)*\cos(P)*3^{1/2}*L1-1/2*\sin(Y)*\sin(P)*\sin(R)-1/2*\cos(Y)*\cos(R))*L1);$$

% ***** O Método *****

%* FACTORIZAÇÃO LDU DA MATRIZ H

%* Matriz L

L=eye(6);

for i=2:6

 L(i,1)=H(i,1)/H(1,1);

 for j=1:6

 H(i,j)=H(i,j)-H(1,j)*L(i,1);

 end

end

for i=3:6

 L(i,2)=H(i,2)/H(2,2);

 for j=2:6

 H(i,j)=H(i,j)-H(2,j)*L(i,2);

 end

end

for i=4:6

```

L(i,3)=H(i,3)/H(3,3);
for j=3:6
    H(i,j)=H(i,j)-H(3,j)*L(i,3);
end
end
for i=5:6
    L(i,4)=H(i,4)/H(4,4);
    for j=4:6
        H(i,j)=H(i,j)-H(4,j)*L(i,4);
    end
end
for i=6
    L(i,5)=H(i,5)/H(5,5);
    for j=5:6
        H(i,j)=H(i,j)-H(5,j)*L(i,5);
    end
end

```

```

%* Matriz D
D=zeros(6);

```

```

D(1,1) = H(1,1);
D(2,2) = H(2,2);
D(3,3) = H(3,3);
D(4,4) = H(4,4);
D(5,5) = H(5,5);
D(6,6) = H(6,6);

```

```

%* Matriz U
U = inv(D)* H;

```

```

%* CONSTRUIR NOVA MATRIZ DIAGONAL QUANDO NECESSÁRIO *

```

```

if D(1,1) < delta
    D(1,1) = delta;
end
if D(2,2) < delta
    D(2,2) = delta;
end
if D(3,3) < delta
    D(3,3) = delta;
end
if D(4,4) < delta
    D(4,4) = delta;
end
if D(5,5) < delta
    D(5,5) = delta;
end
if D(6,6) < delta
    D(6,6) = delta;
end

```

```

dK = inv(L*D*U) * GradT;

```

```

%* APLICAÇÃO DE RESTRIÇÕES *

```

```

% *limitar a parâmetro alfa de forma a assegurar que não se avança demasiado na pesquisa linear*
if dK(4) == 0
    alfa_max4 = 1;
else
    if dK(4) > 0
        alfa_max4 = (pi/4)/dK(4);
    end
end

```

```

else
    alfa_max4 = -(pi/4)/dK(4);
end
end
if dK(5) == 0
    alfa_max5 = 1;
else
    if dK(5) > 0
        alfa_max5 = (pi/4)/dK(5);
    else
        alfa_max5 = -(pi/4)/dK(5);
    end
end
if dK(6) == 0
    alfa_max6 = 1;
else
    if dK(6) > 0
        alfa_max6 = (pi/4)/dK(6);
    else
        alfa_max6 = -(pi/4)/dK(6);
    end
end

q = [alfa_max4, alfa_max5, alfa_max6];
alfa_max = min(q);
if alfa_max > 1
    alfa_max = 1;
end

%* Inicia-se a PESQUISA LINEAR entre 0 e alfa_max *
alfa=[0 alfa_max/2 alfa_max];
while sqrt((alfa(1)-alfa(3))^2) >= 0.1*alfa_max
    for i=1:3
        F(i) = ((cos(Y-alfa(i)*dK(6))*sin(P-alfa(i)*dK(5))*sin(R-alfa(i)*dK(4))-sin(Y-alfa(i)*dK(6))*cos(R-
        alfa(i)*dK(4)))*L1+xA-alfa(i)*dK(1)-LAT1)^2+...
        ((sin(Y-alfa(i)*dK(6))*sin(P-alfa(i)*dK(5))*sin(R-alfa(i)*dK(4))+cos(Y-alfa(i)*dK(6))*cos(R-
        alfa(i)*dK(4)))*L1+yA-alfa(i)*dK(2)-LON1)^2+...
        (cos(P-alfa(i)*dK(5))*sin(R-alfa(i)*dK(4))*L1+zA-alfa(i)*dK(3)-ALT1)^2+...
        (-1/2*cos(Y-alfa(i)*dK(6))*cos(P-alfa(i)*dK(5))*3^(1/2)*L1-1/2*(cos(Y-alfa(i)*dK(6))*sin(P-
        alfa(i)*dK(5))*sin(R-alfa(i)*dK(4))-sin(Y-alfa(i)*dK(6))*cos(R-alfa(i)*dK(4)))*L1+xA-alfa(i)*dK(1)-
        LAT2)^2+...
        (-1/2*sin(Y-alfa(i)*dK(6))*cos(P-alfa(i)*dK(5))*3^(1/2)*L1-1/2*(sin(Y-alfa(i)*dK(6))*sin(P-
        alfa(i)*dK(5))*sin(R-alfa(i)*dK(4))+cos(Y-alfa(i)*dK(6))*cos(R-alfa(i)*dK(4)))*L1+yA-alfa(i)*dK(2)-
        LON2)^2+...
        (1/2*sin(P-alfa(i)*dK(5))*3^(1/2)*L1-1/2*cos(P-alfa(i)*dK(5))*sin(R-alfa(i)*dK(4))*L1+zA-
        alfa(i)*dK(3)-ALT2)^2+...
        (1/2*cos(Y-alfa(i)*dK(6))*cos(P-alfa(i)*dK(5))*3^(1/2)*L1-1/2*(cos(Y-alfa(i)*dK(6))*sin(P-
        alfa(i)*dK(5))*sin(R-alfa(i)*dK(4))-sin(Y-alfa(i)*dK(6))*cos(R-alfa(i)*dK(4)))*L1+xA-alfa(i)*dK(1)-
        LAT3)^2+...
        (1/2*sin(Y-alfa(i)*dK(6))*cos(P-alfa(i)*dK(5))*3^(1/2)*L1-1/2*(sin(Y-alfa(i)*dK(6))*sin(P-
        alfa(i)*dK(5))*sin(R-alfa(i)*dK(4))+cos(Y-alfa(i)*dK(6))*cos(R-alfa(i)*dK(4)))*L1+yA-alfa(i)*dK(2)-
        LON3)^2+...
        (-1/2*sin(P-alfa(i)*dK(5))*3^(1/2)*L1-1/2*cos(P-alfa(i)*dK(5))*sin(R-alfa(i)*dK(4))*L1+zA-
        alfa(i)*dK(3)-ALT3)^2;
    end
    x4=0.5*((alfa(2)^2-alfa(3)^2)*F(1)+(alfa(3)^2-alfa(1)^2)*F(2)+(alfa(1)^2-alfa(2)^2)*F(3))*((alfa(2)-
    alfa(3))*F(1)+(alfa(3)-alfa(1))*F(2)+(alfa(1)-alfa(2))*F(3))^(1);
    if (x4 < 0)|(x4 >= 0.9*alfa(3))
        alfa(2)=alfa(3);
        alfa(1)=alfa(3);
    end
end

```

```

else
    Fx4 = ((cos(Y-x4*dK(6))*sin(P-x4*dK(5))*sin(R-x4*dK(4))-sin(Y-x4*dK(6))*cos(R-
x4*dK(4)))*L1+xA-x4*dK(1)-LAT1)^2+...
    ((sin(Y-x4*dK(6))*sin(P-x4*dK(5))*sin(R-x4*dK(4))+cos(Y-x4*dK(6))*cos(R-
x4*dK(4)))*L1+yA-x4*dK(2)-LON1)^2+...
    (cos(P-x4*dK(5))*sin(R-x4*dK(4))*L1+zA-x4*dK(3)-ALT1)^2+...
    (-1/2*cos(Y-x4*dK(6))*cos(P-x4*dK(5))*3^(1/2)*L1-1/2*(cos(Y-x4*dK(6))*sin(P-
x4*dK(5))*sin(R-x4*dK(4))-sin(Y-x4*dK(6))*cos(R-x4*dK(4)))*L1+xA-x4*dK(1)-LAT2)^2+...
    (-1/2*sin(Y-x4*dK(6))*cos(P-x4*dK(5))*3^(1/2)*L1-1/2*(sin(Y-x4*dK(6))*sin(P-
x4*dK(5))*sin(R-x4*dK(4))+cos(Y-x4*dK(6))*cos(R-x4*dK(4)))*L1+yA-x4*dK(2)-LON2)^2+...
    (1/2*sin(P-x4*dK(5))*3^(1/2)*L1-1/2*cos(P-x4*dK(5))*sin(R-x4*dK(4))*L1+zA-x4*dK(3)-
ALT2)^2+...
    (1/2*cos(Y-x4*dK(6))*cos(P-x4*dK(5))*3^(1/2)*L1-1/2*(cos(Y-x4*dK(6))*sin(P-
x4*dK(5))*sin(R-x4*dK(4))-sin(Y-x4*dK(6))*cos(R-x4*dK(4)))*L1+xA-x4*dK(1)-LAT3)^2+...
    (1/2*sin(Y-x4*dK(6))*cos(P-x4*dK(5))*3^(1/2)*L1-1/2*(sin(Y-x4*dK(6))*sin(P-
x4*dK(5))*sin(R-x4*dK(4))+cos(Y-x4*dK(6))*cos(R-x4*dK(4)))*L1+yA-x4*dK(2)-LON3)^2+...
    (-1/2*sin(P-x4*dK(5))*3^(1/2)*L1-1/2*cos(P-x4*dK(5))*sin(R-x4*dK(4))*L1+zA-x4*dK(3)-
ALT3)^2;
    if x4 >= alfa(2)
        if Fx4 <= F(2)
            alfa(1) = alfa(2);
            alfa(2) = x4;
        else
            alfa(3) = x4;
        end
    else
        if Fx4 <= F(2)
            alfa(2) = x4;
            alfa(3) = alfa(2);
        else
            alfa(1) = x4;
        end
    end
end
end
end

%* CALCULO DO NOVO PONTO *
X1 = X - alfa(2) *dK;

%* limitar os valores angulares ao intervalo [0,2pi] *
if X1(4) >= 2*pi
    X1(4) = X1(4) - 2*pi;
end
if X1(4) <= -2*pi
    X1(4) = X1(4) + 2*pi;
end
if X1(5) >= 2*pi
    X1(5) = X1(5) - 2*pi;
end
if X1(5) <= -2*pi
    X1(5) = X1(5) + 2*pi;
end
if X1(6) >= 2*pi
    X1(6)=X1(6)-2*pi;
end
if X1(6) <= -2*pi
    X1(6)=X1(6)+2*pi;
end

xA = X1(1);

```

```

yA = X1(2);
zA = X1(3);
R = X1(4);
P = X1(5);
Y = X1(6);

%***** Definição da Função F *****

F_novo = ((cos(Y)*sin(P)*sin(R)-sin(Y)*cos(R))*L1+xA-LAT1)^2+...
          ((sin(Y)*sin(P)*sin(R)+cos(Y)*cos(R))*L1+yA-LON1)^2+...
          (cos(P)*sin(R)*L1+zA-ALT1)^2+...
          (-1/2*cos(Y)*cos(P)*3^(1/2)*L1-1/2*(cos(Y)*sin(P)*sin(R)-sin(Y)*cos(R))*L1+xA-
LAT2)^2+...
          (-1/2*sin(Y)*cos(P)*3^(1/2)*L1-1/2*(sin(Y)*sin(P)*sin(R)+cos(Y)*cos(R))*L1+yA-
LON2)^2+...
          (1/2*sin(P)*3^(1/2)*L1-1/2*cos(P)*sin(R)*L1+zA-ALT2)^2+...
          (1/2*cos(Y)*cos(P)*3^(1/2)*L1-1/2*(cos(Y)*sin(P)*sin(R)-sin(Y)*cos(R))*L1+xA-
LAT3)^2+...
          (1/2*sin(Y)*cos(P)*3^(1/2)*L1-1/2*(sin(Y)*sin(P)*sin(R)+cos(Y)*cos(R))*L1+yA-
LON3)^2+...
          (-1/2*sin(P)*3^(1/2)*L1-1/2*cos(P)*sin(R)*L1+zA-ALT3)^2;

%***** Condição de Paragem *****

if F_novo-F_velho <= erro_max
    p=0;
end
F_velho = F_novo;

%*****

n_iteracoes = n_iteracoes + 1;
X = X1;
end
total_iteracoes = total_iteracoes + n_iteracoes;

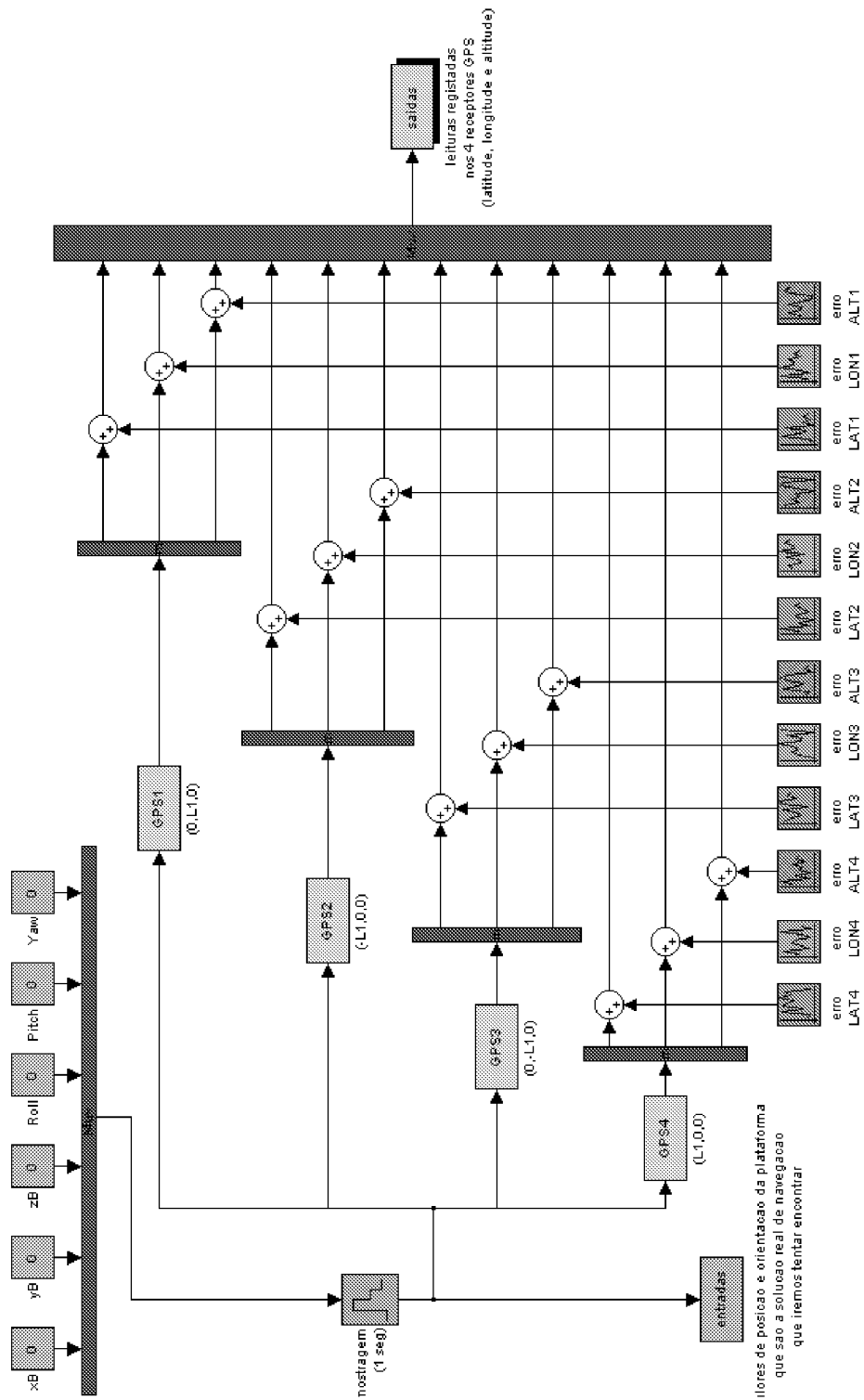
resultados(c,1) = X1(1);
resultados(c,2) = X1(2);
resultados(c,3) = X1(3);
resultados(c,4) = X1(4);
resultados(c,5) = X1(5);
resultados(c,6) = X1(6);
end

```

ANEXO

B

Ficheiro **ESTATICO_4.mdl** (Simulink)



Ficheiro ALGORITMO_4.m

```

%* a variável saídas contém as leituras simuladas *
dim = size(saídas);
ciclos = dim(1,1);

%* definir o erro máximo admissível *
erro_max = 0.00001;

%* definir o parâmetro delta *
delta=0.00000001;

%* afastamento dos receptores em relação ao ponto central *
L1 = 10;

%* receber as leituras simuladas, uma a uma, e processá-las *
for c = 1:ciclos

    LAT1 = saídas(c,1) ; LON1 = saídas(c,2) ; ALT1 = saídas(c,3) ;
    LAT2 = saídas(c,4) ; LON2 = saídas(c,5) ; ALT2 = saídas(c,6) ;
    LAT3 = saídas(c,7) ; LON3 = saídas(c,8) ; ALT3 = saídas(c,9) ;
    LAT4 = saídas(c,10) ; LON4 = saídas(c,11) ; ALT4 = saídas(c,12) ;

%** iteração inicial **
if c == 1
    %* a variável entradas contém as soluções teóricas
    X = [entradas(1,1)
        entradas(1,2)
        entradas(1,3)
        entradas(1,4)
        entradas(1,5)
        entradas(1,6)];
else
    X = X1;
end

xA = X(1);
yA = X(2);
zA = X(3);
R = X(4);
P = X(5);
Y = X(6);

p = 1;
total_iteracoes = 0;
F_velho = 0;
n_iteracoes = 1;

while p
%* DEFINIÇÃO DO GRADIENTE TRANSPOSTO *
GradT=[2*(cos(Y)*sin(P)*sin(R)-sin(Y)*cos(R))*L1+8*xA-2*LAT1-2*LAT2+2*(-
cos(Y)*sin(P)*sin(R)+sin(Y)*cos(R))*L1-2*LAT3-2*LAT4
    2*(sin(Y)*sin(P)*sin(R)+cos(Y)*cos(R))*L1+8*yA-2*LON1-2*LON2+2*(-sin(Y)*sin(P)*sin(R)-
cos(Y)*cos(R))*L1-2*LON3-2*LON4
    8*zA-2*ALT1-2*ALT2-2*ALT3-2*ALT4
    2*((cos(Y)*sin(P)*sin(R)-sin(Y)*cos(R))*L1+xA-
LAT1)*(cos(Y)*sin(P)*cos(R)+sin(Y)*sin(R))*L1+2*((sin(Y)*sin(P)*sin(R)+cos(Y)*cos(R))*L1+yA-
LON1)*(sin(Y)*sin(P)*cos(R)-cos(Y)*sin(R))*L1+2*(cos(P)*sin(R)*L1+zA-
ALT1)*cos(P)*cos(R)*L1+2*((-cos(Y)*sin(P)*sin(R)+sin(Y)*cos(R))*L1+xA-LAT3)*(-

```



```

cos(Y)*sin(P)*cos(R)-sin(Y)*sin(R))*L1+2*((-sin(Y)*sin(P)*sin(R)-cos(Y)*cos(R))*L1+yA-LON3)*(-
sin(Y)*sin(P)*cos(R)+cos(Y)*sin(R))*L1-2*(-cos(P)*sin(R)*L1+zA-ALT3)*cos(P)*cos(R)*L1
    2*((cos(Y)*sin(P)*sin(R)-sin(Y)*cos(R))*L1+xA-
LAT1)*cos(Y)*cos(P)*sin(R)*L1+2*((sin(Y)*sin(P)*sin(R)+cos(Y)*cos(R))*L1+yA-
LON1)*sin(Y)*cos(P)*sin(R)*L1-2*(cos(P)*sin(R)*L1+zA-ALT1)*sin(P)*sin(R)*L1+2*(-
cos(Y)*cos(P)*L1+xA-LAT2)*cos(Y)*sin(P)*L1+2*(-sin(Y)*cos(P)*L1+yA-
LON2)*sin(Y)*sin(P)*L1+2*(sin(P)*L1+zA-ALT2)*cos(P)*L1-2*((-
cos(Y)*sin(P)*sin(R)+sin(Y)*cos(R))*L1+xA-LAT3)*cos(Y)*cos(P)*sin(R)*L1-2*((-
sin(Y)*sin(P)*sin(R)-cos(Y)*cos(R))*L1+yA-LON3)*sin(Y)*cos(P)*sin(R)*L1+2*(-
cos(P)*sin(R)*L1+zA-ALT3)*sin(P)*sin(R)*L1-2*(cos(Y)*cos(P)*L1+xA-LAT4)*cos(Y)*sin(P)*L1-
2*(sin(Y)*cos(P)*L1+yA-LON4)*sin(Y)*sin(P)*L1-2*(-sin(P)*L1+zA-ALT4)*cos(P)*L1
    2*((cos(Y)*sin(P)*sin(R)-sin(Y)*cos(R))*L1+xA-LAT1)*(-sin(Y)*sin(P)*sin(R)-
cos(Y)*cos(R))*L1+2*((sin(Y)*sin(P)*sin(R)+cos(Y)*cos(R))*L1+yA-LON1)*(cos(Y)*sin(P)*sin(R)-
sin(Y)*cos(R))*L1+2*(-cos(Y)*cos(P)*L1+xA-LAT2)*sin(Y)*cos(P)*L1-2*(-sin(Y)*cos(P)*L1+yA-
LON2)*cos(Y)*cos(P)*L1+2*((-cos(Y)*sin(P)*sin(R)+sin(Y)*cos(R))*L1+xA-
LAT3)*(sin(Y)*sin(P)*sin(R)+cos(Y)*cos(R))*L1+2*((-sin(Y)*sin(P)*sin(R)-cos(Y)*cos(R))*L1+yA-
LON3)*(-cos(Y)*sin(P)*sin(R)+sin(Y)*cos(R))*L1-2*(cos(Y)*cos(P)*L1+xA-
LAT4)*sin(Y)*cos(P)*L1+2*(sin(Y)*cos(P)*L1+yA-LON4)*cos(Y)*cos(P)*L1];
%* DEFINIÇÃO DA MATRIZ HESSIANA *
H=zeros(6);
H(1,1)=8;
H(1,4)=2*(cos(Y)*sin(P)*cos(R)+sin(Y)*sin(R))*L1+2*(-cos(Y)*sin(P)*cos(R)-sin(Y)*sin(R))*L1;
H(1,6)=2*(-sin(Y)*sin(P)*sin(R)-cos(Y)*cos(R))*L1+2*(sin(Y)*sin(P)*sin(R)+cos(Y)*cos(R))*L1;
H(2,2)=8;
H(2,4)=2*(sin(Y)*sin(P)*cos(R)-cos(Y)*sin(R))*L1+2*(-sin(Y)*sin(P)*cos(R)+cos(Y)*sin(R))*L1;
H(2,6)=2*(cos(Y)*sin(P)*sin(R)-sin(Y)*cos(R))*L1+2*(-cos(Y)*sin(P)*sin(R)+sin(Y)*cos(R))*L1;
H(3,3)=8;
H(4,1)=H(1,4);
H(4,2)=H(2,4);
H(4,4)=2*(cos(Y)*sin(P)*cos(R)+sin(Y)*sin(R))^2*L1^2+2*((cos(Y)*sin(P)*sin(R)-
sin(Y)*cos(R))*L1+xA-LAT1)*(-cos(Y)*sin(P)*sin(R)+sin(Y)*cos(R))*L1+2*(sin(Y)*sin(P)*cos(R)-
cos(Y)*sin(R))^2*L1^2+2*((sin(Y)*sin(P)*sin(R)+cos(Y)*cos(R))*L1+yA-LON1)*(-
sin(Y)*sin(P)*sin(R)-cos(Y)*cos(R))*L1+4*cos(P)^2*cos(R)^2*L1^2-2*(cos(P)*sin(R)*L1+zA-
ALT1)*cos(P)*sin(R)*L1+2*(-cos(Y)*sin(P)*cos(R)-sin(Y)*sin(R))^2*L1^2+2*((-
cos(Y)*sin(P)*sin(R)+sin(Y)*cos(R))*L1+xA-LAT3)*(cos(Y)*sin(P)*sin(R)-sin(Y)*cos(R))*L1+2*(-
sin(Y)*sin(P)*cos(R)+cos(Y)*sin(R))^2*L1^2+2*((-sin(Y)*sin(P)*sin(R)-cos(Y)*cos(R))*L1+yA-
LON3)*(sin(Y)*sin(P)*sin(R)+cos(Y)*cos(R))*L1+2*(-cos(P)*sin(R)*L1+zA-
ALT3)*cos(P)*sin(R)*L1;
H(4,5)=2*cos(Y)*cos(P)*sin(R)*L1^2*(cos(Y)*sin(P)*cos(R)+sin(Y)*sin(R))+2*((cos(Y)*sin(P)*sin(R)-
sin(Y)*cos(R))*L1+xA-
LAT1)*cos(Y)*cos(P)*cos(R)*L1+2*sin(Y)*cos(P)*sin(R)*L1^2*(sin(Y)*sin(P)*cos(R)-
cos(Y)*sin(R))+2*((sin(Y)*sin(P)*sin(R)+cos(Y)*cos(R))*L1+yA-LON1)*sin(Y)*cos(P)*cos(R)*L1-
4*sin(P)*sin(R)*L1^2*cos(P)*cos(R)-2*(cos(P)*sin(R)*L1+zA-ALT1)*sin(P)*cos(R)*L1-
2*cos(Y)*cos(P)*sin(R)*L1^2*(-cos(Y)*sin(P)*cos(R)-sin(Y)*sin(R))-2*((-
cos(Y)*sin(P)*sin(R)+sin(Y)*cos(R))*L1+xA-LAT3)*cos(Y)*cos(P)*cos(R)*L1-
2*sin(Y)*cos(P)*sin(R)*L1^2*(-sin(Y)*sin(P)*cos(R)+cos(Y)*sin(R))-2*((-sin(Y)*sin(P)*sin(R)-
cos(Y)*cos(R))*L1+yA-LON3)*sin(Y)*cos(P)*cos(R)*L1+2*(-cos(P)*sin(R)*L1+zA-
ALT3)*sin(P)*cos(R)*L1;
H(4,6)=2*(-sin(Y)*sin(P)*sin(R)-
cos(Y)*cos(R))*L1^2*(cos(Y)*sin(P)*cos(R)+sin(Y)*sin(R))+2*((cos(Y)*sin(P)*sin(R)-
sin(Y)*cos(R))*L1+xA-LAT1)*(-sin(Y)*sin(P)*cos(R)+cos(Y)*sin(R))*L1+2*(cos(Y)*sin(P)*sin(R)-
sin(Y)*cos(R))*L1^2*(sin(Y)*sin(P)*cos(R)-
cos(Y)*sin(R))+2*((sin(Y)*sin(P)*sin(R)+cos(Y)*cos(R))*L1+yA-
LON1)*(cos(Y)*sin(P)*cos(R)+sin(Y)*sin(R))*L1+2*(sin(Y)*sin(P)*sin(R)+cos(Y)*cos(R))*L1^2*(-
cos(Y)*sin(P)*cos(R)-sin(Y)*sin(R))+2*((-cos(Y)*sin(P)*sin(R)+sin(Y)*cos(R))*L1+xA-
LAT3)*(sin(Y)*sin(P)*cos(R)-cos(Y)*sin(R))*L1+2*(-cos(Y)*sin(P)*sin(R)+sin(Y)*cos(R))*L1^2*(-
sin(Y)*sin(P)*cos(R)+cos(Y)*sin(R))+2*((-sin(Y)*sin(P)*sin(R)-cos(Y)*cos(R))*L1+yA-LON3)*(-
cos(Y)*sin(P)*cos(R)-sin(Y)*sin(R))*L1;
H(5,4)=H(4,5);

```

$$\begin{aligned}
 H(5,5) &= 4 * \cos(Y)^2 * \cos(P)^2 * \sin(R)^2 * L1^2 - 2 * ((\cos(Y) * \sin(P) * \sin(R) - \sin(Y) * \cos(R)) * L1 + xA - \\
 &LAT1 * \cos(Y) * \sin(P) * \sin(R) * L1 + 4 * \sin(Y)^2 * \cos(P)^2 * \sin(R)^2 * L1^2 - \\
 &2 * ((\sin(Y) * \sin(P) * \sin(R) + \cos(Y) * \cos(R)) * L1 + yA - \\
 &LON1 * \sin(Y) * \sin(P) * \sin(R) * L1 + 4 * \sin(P)^2 * \sin(R)^2 * L1^2 - 2 * (\cos(P) * \sin(R) * L1 + zA - \\
 &ALT1 * \cos(P) * \sin(R) * L1 + 4 * \cos(Y)^2 * \sin(P)^2 * L1^2 + 2 * (-\cos(Y) * \cos(P) * L1 + xA - \\
 &LAT2 * \cos(Y) * \cos(P) * L1 + 4 * \sin(Y)^2 * \sin(P)^2 * L1^2 + 2 * (-\sin(Y) * \cos(P) * L1 + yA - \\
 &LON2 * \sin(Y) * \cos(P) * L1 + 4 * \cos(P)^2 * L1^2 - 2 * (\sin(P) * L1 + zA - ALT2) * \sin(P) * L1 + 2 * ((- \\
 &\cos(Y) * \sin(P) * \sin(R) + \sin(Y) * \cos(R)) * L1 + xA - LAT3) * \cos(Y) * \sin(P) * \sin(R) * L1 + 2 * ((- \\
 &\sin(Y) * \sin(P) * \sin(R) - \cos(Y) * \cos(R)) * L1 + yA - LON3) * \sin(Y) * \sin(P) * \sin(R) * L1 + 2 * (- \\
 &\cos(P) * \sin(R) * L1 + zA - ALT3) * \cos(P) * \sin(R) * L1 - 2 * (\cos(Y) * \cos(P) * L1 + xA - LAT4) * \cos(Y) * \cos(P) * L1 - \\
 &2 * (\sin(Y) * \cos(P) * L1 + yA - LON4) * \sin(Y) * \cos(P) * L1 + 2 * (-\sin(P) * L1 + zA - ALT4) * \sin(P) * L1; \\
 H(5,6) &= 2 * (-\sin(Y) * \sin(P) * \sin(R) - \cos(Y) * \cos(R)) * L1^2 * \cos(Y) * \cos(P) * \sin(R) - \\
 &2 * ((\cos(Y) * \sin(P) * \sin(R) - \sin(Y) * \cos(R)) * L1 + xA - \\
 &LAT1 * \sin(Y) * \cos(P) * \sin(R) * L1 + 2 * (\cos(Y) * \sin(P) * \sin(R) - \\
 &\sin(Y) * \cos(R)) * L1^2 * \sin(Y) * \cos(P) * \sin(R) + 2 * ((\sin(Y) * \sin(P) * \sin(R) + \cos(Y) * \cos(R)) * L1 + yA - \\
 &LON1 * \cos(Y) * \cos(P) * \sin(R) * L1 - 2 * (-\cos(Y) * \cos(P) * L1 + xA - LAT2) * \sin(Y) * \sin(P) * L1 + 2 * (- \\
 &\sin(Y) * \cos(P) * L1 + yA - LON2) * \cos(Y) * \sin(P) * L1 - \\
 &2 * (\sin(Y) * \sin(P) * \sin(R) + \cos(Y) * \cos(R)) * L1^2 * \cos(Y) * \cos(P) * \sin(R) + 2 * ((- \\
 &\cos(Y) * \sin(P) * \sin(R) + \sin(Y) * \cos(R)) * L1 + xA - LAT3) * \sin(Y) * \cos(P) * \sin(R) * L1 - 2 * (- \\
 &\cos(Y) * \sin(P) * \sin(R) + \sin(Y) * \cos(R)) * L1^2 * \sin(Y) * \cos(P) * \sin(R) - 2 * ((-\sin(Y) * \sin(P) * \sin(R) - \\
 &\cos(Y) * \cos(R)) * L1 + yA - LON3) * \cos(Y) * \cos(P) * \sin(R) * L1 + 2 * (\cos(Y) * \cos(P) * L1 + xA - \\
 &LAT4) * \sin(Y) * \sin(P) * L1 - 2 * (\sin(Y) * \cos(P) * L1 + yA - LON4) * \cos(Y) * \sin(P) * L1; \\
 H(6,1) &= H(1,6); \\
 H(6,2) &= H(2,6); \\
 H(6,4) &= H(4,6); \\
 H(6,5) &= H(5,6); \\
 H(6,6) &= 2 * (-\sin(Y) * \sin(P) * \sin(R) - \cos(Y) * \cos(R))^2 * L1^2 + 2 * ((\cos(Y) * \sin(P) * \sin(R) - \\
 &\sin(Y) * \cos(R)) * L1 + xA - LAT1) * (-\cos(Y) * \sin(P) * \sin(R) + \sin(Y) * \cos(R)) * L1 + 2 * (\cos(Y) * \sin(P) * \sin(R) - \\
 &\sin(Y) * \cos(R))^2 * L1^2 + 2 * ((\sin(Y) * \sin(P) * \sin(R) + \cos(Y) * \cos(R)) * L1 + yA - LON1) * (- \\
 &\sin(Y) * \sin(P) * \sin(R) - \cos(Y) * \cos(R)) * L1 + 4 * \sin(Y)^2 * \cos(P)^2 * L1^2 + 2 * (-\cos(Y) * \cos(P) * L1 + xA - \\
 &LAT2) * \cos(Y) * \cos(P) * L1 + 4 * \cos(Y)^2 * \cos(P)^2 * L1^2 + 2 * (-\sin(Y) * \cos(P) * L1 + yA - \\
 &LON2) * \sin(Y) * \cos(P) * L1 + 2 * (\sin(Y) * \sin(P) * \sin(R) + \cos(Y) * \cos(R))^2 * L1^2 + 2 * ((- \\
 &\cos(Y) * \sin(P) * \sin(R) + \sin(Y) * \cos(R)) * L1 + xA - LAT3) * (\cos(Y) * \sin(P) * \sin(R) - \sin(Y) * \cos(R)) * L1 + 2 * (- \\
 &\cos(Y) * \sin(P) * \sin(R) + \sin(Y) * \cos(R))^2 * L1^2 + 2 * ((-\sin(Y) * \sin(P) * \sin(R) - \cos(Y) * \cos(R)) * L1 + yA - \\
 &LON3) * (\sin(Y) * \sin(P) * \sin(R) + \cos(Y) * \cos(R)) * L1 - 2 * (\cos(Y) * \cos(P) * L1 + xA - \\
 &LAT4) * \cos(Y) * \cos(P) * L1 - 2 * (\sin(Y) * \cos(P) * L1 + yA - LON4) * \sin(Y) * \cos(P) * L1;
 \end{aligned}$$

```

%***** O Método *****
%* FACTORIZAÇÃO LDU DA MATRIZ H
%* Matriz L
L=eye(6);
for i=2:6
    L(i,1)=H(i,1)/H(1,1);
    for j=1:6
        H(i,j)=H(i,j)-H(1,j)*L(i,1);
    end
end
for i=3:6
    L(i,2)=H(i,2)/H(2,2);
    for j=2:6
        H(i,j)=H(i,j)-H(2,j)*L(i,2);
    end
end
for i=4:6
    L(i,3)=H(i,3)/H(3,3);
    for j=3:6
        H(i,j)=H(i,j)-H(3,j)*L(i,3);
    end
end
for i=5:6

```

```

L(i,4)=H(i,4)/H(4,4);
for j=4:6
    H(i,j)=H(i,j)-H(4,j)*L(i,4);
end
end
for i=6
    L(i,5)=H(i,5)/H(5,5);
    for j=5:6
        H(i,j)=H(i,j)-H(5,j)*L(i,5);
    end
end

%* Matriz D
D=zeros(6);

D(1,1) = H(1,1);
D(2,2) = H(2,2);
D(3,3) = H(3,3);
D(4,4) = H(4,4);
D(5,5) = H(5,5);
D(6,6) = H(6,6);

%* Matriz U
U = inv(D)* H;

%* CONSTRUIR NOVA MATRIZ DIAGONAL QUANDO NECESSÁRIO *
if D(1,1) < delta
    D(1,1) = delta;
end
if D(2,2) < delta
    D(2,2) = delta;
end
if D(3,3) < delta
    D(3,3) = delta;
end
if D(4,4) < delta
    D(4,4) = delta;
end
if D(5,5) < delta
    D(5,5) = delta;
end
if D(6,6) < delta
    D(6,6) = delta;
end

dK = inv(L*D*U) * GradT;

%* APLICAÇÃO DE RESTRIÇÕES *
%* limitar a parâmetro alfa de forma a assegurar que não se avança demasiado na pesquisa linear *
if dK(4) == 0
    alfa_max4 = 1;
else
    if dK(4) > 0
        alfa_max4 = (pi/4)/dK(4);
    else
        alfa_max4 = -(pi/4)/dK(4);
    end
end
if dK(5) == 0
    alfa_max5 = 1;

```

```

else
  if dK(5) > 0
    alfa_max5 = (pi/4)/dK(5);
  else
    alfa_max5 = -(pi/4)/dK(5);
  end
end
end
if dK(6) == 0
  alfa_max6 = 1;
else
  if dK(6) > 0
    alfa_max6 = (pi/4)/dK(6);
  else
    alfa_max6 = -(pi/4)/dK(6);
  end
end
end

q = [alfa_max4, alfa_max5, alfa_max6];
alfa_max = min(q);
if alfa_max > 1
  alfa_max = 1;
end

%* Inicia-se a PESQUISA LINEAR entre 0 e alfa_max
alfa=[0 alfa_max/2 alfa_max];
while sqrt((alfa(1)-alfa(3))^2) >= 0.1*alfa_max
  for i=1:3
    F(i) = ((cos(Y-alfa(i)*dK(6))*sin(P-alfa(i)*dK(5))*sin(R-alfa(i)*dK(4))-sin(Y-alfa(i)*dK(6))*cos(R-
    alfa(i)*dK(4)))*L1+xA-alfa(i)*dK(1)-LAT1)^2+...
    ((sin(Y-alfa(i)*dK(6))*sin(P-alfa(i)*dK(5))*sin(R-alfa(i)*dK(4))+cos(Y-alfa(i)*dK(6))*cos(R-
    alfa(i)*dK(4)))*L1+yA-alfa(i)*dK(2)-LON1)^2+...
    (cos(P-alfa(i)*dK(5))*sin(R-alfa(i)*dK(4))*L1+zA-alfa(i)*dK(3)-ALT1)^2+...
    (-cos(Y-alfa(i)*dK(6))*cos(P-alfa(i)*dK(5))*L1+xA-alfa(i)*dK(1)-LAT2)^2+...
    (-sin(Y-alfa(i)*dK(6))*cos(P-alfa(i)*dK(5))*L1+yA-alfa(i)*dK(2)-LON2)^2+...
    (sin(P-alfa(i)*dK(5))*L1+zA-alfa(i)*dK(3)-ALT2)^2+...
    (-cos(Y-alfa(i)*dK(6))*sin(P-alfa(i)*dK(5))*sin(R-alfa(i)*dK(4))-sin(Y-alfa(i)*dK(6))*cos(R-
    alfa(i)*dK(4)))*L1+xA-alfa(i)*dK(1)-LAT3)^2+...
    (-sin(Y-alfa(i)*dK(6))*sin(P-alfa(i)*dK(5))*sin(R-alfa(i)*dK(4))+cos(Y-alfa(i)*dK(6))*cos(R-
    alfa(i)*dK(4)))*L1+yA-alfa(i)*dK(2)-LON3)^2+...
    (-cos(P-alfa(i)*dK(5))*sin(R-alfa(i)*dK(4))*L1+zA-alfa(i)*dK(3)-ALT3)^2+...
    (cos(Y-alfa(i)*dK(6))*cos(P-alfa(i)*dK(5))*L1+xA-alfa(i)*dK(1)-LAT4)^2+...
    (sin(Y-alfa(i)*dK(6))*cos(P-alfa(i)*dK(5))*L1+yA-alfa(i)*dK(2)-LON4)^2+...
    (-sin(P-alfa(i)*dK(5))*L1+zA-alfa(i)*dK(3)-ALT4)^2;
  end
  x4=0.5*((alfa(2)^2-alfa(3)^2)*F(1)+(alfa(3)^2-alfa(1)^2)*F(2)+(alfa(1)^2-alfa(2)^2)*F(3))*((alfa(2)-
  alfa(3))*F(1)+(alfa(3)-alfa(1))*F(2)+(alfa(1)-alfa(2))*F(3))^(-1);
  if (x4 < 0)|(x4 >= 0.9*alfa(3))
    alfa(2)=alfa(3);
    alfa(1)=alfa(3);
  else
    Fx4 = ((cos(Y-x4*dK(6))*sin(P-x4*dK(5))*sin(R-x4*dK(4))-sin(Y-x4*dK(6))*cos(R-
    x4*dK(4)))*L1+xA-x4*dK(1)-LAT1)^2+...
    ((sin(Y-x4*dK(6))*sin(P-x4*dK(5))*sin(R-x4*dK(4))+cos(Y-x4*dK(6))*cos(R-
    x4*dK(4)))*L1+yA-x4*dK(2)-LON1)^2+...
    (cos(P-x4*dK(5))*sin(R-x4*dK(4))*L1+zA-x4*dK(3)-ALT1)^2+...
    (-cos(Y-x4*dK(6))*cos(P-x4*dK(5))*L1+xA-x4*dK(1)-LAT2)^2+...
    (-sin(Y-x4*dK(6))*cos(P-x4*dK(5))*L1+yA-x4*dK(2)-LON2)^2+...
    (sin(P-x4*dK(5))*L1+zA-x4*dK(3)-ALT2)^2+...
    (-cos(Y-x4*dK(6))*sin(P-x4*dK(5))*sin(R-x4*dK(4))-sin(Y-x4*dK(6))*cos(R-
    x4*dK(4)))*L1+xA-x4*dK(1)-LAT3)^2+...

```

```

        (-sin(Y-x4*dK(6))*sin(P-x4*dK(5))*sin(R-x4*dK(4))+cos(Y-x4*dK(6))*cos(R-
x4*dK(4))*L1+yA-x4*dK(2)-LON3)^2+...
        (-cos(P-x4*dK(5))*sin(R-x4*dK(4))*L1+zA-x4*dK(3)-ALT3)^2+...
        (cos(Y-x4*dK(6))*cos(P-x4*dK(5))*L1+xA-x4*dK(1)-LAT4)^2+...
        (sin(Y-x4*dK(6))*cos(P-x4*dK(5))*L1+yA-x4*dK(2)-LON4)^2+...
        (-sin(P-x4*dK(5))*L1+zA-x4*dK(3)-ALT4)^2;
    if x4 >= alfa(2)
        if Fx4 <= F(2)
            alfa(1) = alfa(2);
            alfa(2) = x4;
        else
            alfa(3) = x4;
        end
    else
        if Fx4 <= F(2)
            alfa(2) = x4;
            alfa(3) = alfa(2);
        else
            alfa(1) = x4;
        end
    end
end
end
end

%* CALCULO DO NOVO PONTO *
X1 = X - alfa(2) *dK;

%* limitar os valores angulares ao intervalo [0,2pi] *
if X1(4) >= 2*pi
    X1(4) = X1(4) - 2*pi;
end
if X1(4) <= -2*pi
    X1(4) = X1(4) + 2*pi;
end
if X1(5) >= 2*pi
    X1(5) = X1(5) - 2*pi;
end
if X1(5) <= -2*pi
    X1(5) = X1(5) + 2*pi;
end
if X1(6) >= 2*pi
    X1(6)=X1(6)-2*pi;
end
if X1(6) <= -2*pi
    X1(6)=X1(6)+2*pi;
end

xA = X1(1);
yA = X1(2);
zA = X1(3);
R = X1(4);
P = X1(5);
Y = X1(6);

%***** Definição da Função F *****
F_novo = ((cos(Y)*sin(P)*sin(R)-sin(Y)*cos(R))*L1+xA-LAT1)^2+...
((sin(Y)*sin(P)*sin(R)+cos(Y)*cos(R))*L1+yA-LON1)^2+...
(cos(P)*sin(R)*L1+zA-ALT1)^2+...
(-cos(Y)*cos(P)*L1+xA-LAT2)^2+...

```

```

(-sin(Y)*cos(P)*L1+yA-LON2)^2+...
(sin(P)*L1+zA-ALT2)^2+...
(-(cos(Y)*sin(P)*sin(R)-sin(Y)*cos(R))*L1+xA-LAT3)^2+...
(-sin(Y)*sin(P)*sin(R)+cos(Y)*cos(R))*L1+yA-LON3)^2+...
(-cos(P)*sin(R)*L1+zA-ALT3)^2+...
(cos(Y)*cos(P)*L1+xA-LAT4)^2+...
(sin(Y)*cos(P)*L1+yA-LON4)^2+...
(-sin(P)*L1+zA-ALT4)^2;

```

%***** Condição de Paragem *****

```

if F_novo-F_velho <= erro_max
    p=0;
end
F_velho = F_novo;

```

%*****

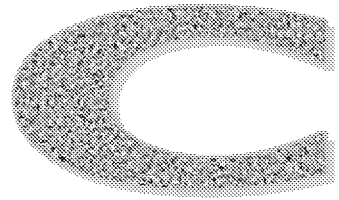
```

    n_iteracoes = n_iteracoes + 1;
    X = X1;
end
total_iteracoes = total_iteracoes + n_iteracoes;

resultados(c,1) = X1(1);
resultados(c,2) = X1(2);
resultados(c,3) = X1(3);
resultados(c,4) = X1(4);
resultados(c,5) = X1(5);
resultados(c,6) = X1(6);
end

```

ANEXO



Cada amostra utilizada para representar o erro característico de cada tipo de receptor utilizado nos ensaios contém 10 000 elementos e apresenta os seguintes valores de variância:

TABELA C.1 – Variância dos erros a adicionar às leituras dos três receptores Motorola de 8 canais

Mot 8 (3GPS)	$\sigma^2_{xA} [m^2]$	$\sigma^2_{yA} [m^2]$	$\sigma^2_{zA} [m^2]$
Receptor1	6.1574	3.2351	43.9675
Receptor2	6.0040	3.2701	44.6080
Receptor3	5.9165	3.2608	45.2404

Quando se utilizam quatro receptores mantém-se as amostras utilizadas para o caso de três receptores e cria-se apenas uma nova amostra para associar ao receptor 4.

TABELA C.2 – Variância dos erros a adicionar às leituras do quarto receptor Motorola de 8 canais

Mot 8 (4GPS)	$\sigma^2_{xA} [m^2]$	$\sigma^2_{yA} [m^2]$	$\sigma^2_{zA} [m^2]$
Receptor4	6.0616	3.3572	44.6112

TABELA C.3 – Variância dos erros a adicionar às leituras dos três receptores a operar no modo RTK

RTK (3GPS)	$\sigma^2_{xA} [m^2]$	$\sigma^2_{yA} [m^2]$	$\sigma^2_{zA} [m^2]$
Receptor1	2.5758e-005	1.0509e-005	4.1564e-005
Receptor2	2.5117e-005	1.0623e-005	4.2169e-005
Receptor3	2.4751e-005	1.0593e-005	4.2767e-005

TABELA C.4 – Variância dos erros a adicionar às leituras dos três receptores a operar no modo RTK

RTK (4GPS)	$\sigma^2_{xA} [m^2]$	$\sigma^2_{yA} [m^2]$	$\sigma^2_{zA} [m^2]$
Receptor4	2.5358e-005	1.0906e-005	4.2172e-005

ANEXO

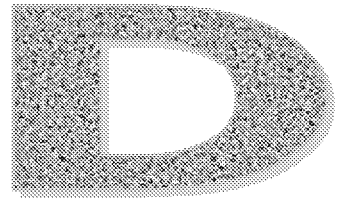


TABELA D.1 – Variância, em função de L, das soluções obtidas para três receptores Motorola de 8 canais

L [m]	σ_{xA}^2 [m ²]	σ_{yA}^2 [m ²]	σ_{zA}^2 [m ²]
8	1,8524	1,0179	14,2175
10	1,8962	1,1040	14,2283
12	1,9395	1,0705	14,7911
15	1,9736	1,0794	15,0169
20	1,9870	1,0852	15,1003
25	1,9899	1,0858	15,1087
30	1,9901	1,0859	15,1089
50	1,9901	1,0859	15,1089
100	1,9901	1,0859	15,1089

L [m]	σ_{γ}^2 [graus ²]	σ_{β}^2 [graus ²]	σ_{α}^2 [graus ²]
8	149,8322	145,6856	133,3925
10	12,2193	10,4887	1,2861
12	9,1633	8,2272	0,8613
15	6,2838	5,8428	0,5260
20	3,7610	3,6424	0,2778
25	2,4870	2,4649	0,1685
30	1,7602	1,7678	0,1127
50	0,6534	0,6685	0,0378
100	0,1655	0,1707	0,0091

TABELA D.2 – Variância, em função de L, das soluções obtidas para quatro receptores Motorola de 8 canais

L [m]	σ_{xA}^2 [m ²]	σ_{yA}^2 [m ²]	σ_{zA}^2 [m ²]
8	1,4049	0,7736	10,8763
10	1,4434	0,8001	11,0965
12	1,4625	0,8157	11,2426
15	1,4753	0,8211	11,3307
20	1,4813	0,8230	11,3541
25	1,4819	0,8233	11,3573
30	1,4819	0,8233	11,3574
50	1,4819	0,8233	11,3574
100	1,4819	0,8233	11,3574

L [m]	σ_{γ}^2 [graus ²]	σ_{β}^2 [graus ²]	σ_{α}^2 [graus ²]
8	149,8875	147,2798	137,1509
10	9,8203	8,6581	0,9394
12	7,2665	6,5689	0,6252
15	4,9351	4,5938	0,3819
20	2,9142	2,8053	0,2003
25	1,9135	1,8735	0,1220
30	1,3492	1,3329	0,0820
50	0,4970	0,4974	0,0279
100	0,1254	0,1262	0,0068

TABELA D.3 – Variância, em função de L, das soluções obtidas para três receptores a operar no modo DGPS

L [m]	σ_{xA}^2 [m ²]	σ_{yA}^2 [m ²]	σ_{zA}^2 [m ²]
1.85	0,2556	0,0673	0,1596
2	0,2608	0,0699	0,1601
3	0,2637	0,0689	0,1672
3,9	0,2648	0,0692	0,1677
4	0,2649	0,0692	0,1677
4.2	0,2649	0,0692	0,1677
4.5	0,265	0,0692	0,1677
5	0,265	0,0692	0,1677
10	0,265	0,0692	0,1677
50	0,265	0,0692	0,1677

L [m]	σ_{γ}^2 [graus ²]	σ_{β}^2 [graus ²]	σ_{α}^2 [graus ²]
1.85	112,519	111,84	106,956
2	6,7894	7,8721	2,8492
3	2,0746	2,3887	1,1102
3,9	1,2139	1,3475	0,6508
4	1,1541	1,2769	0,618
4.2	1,047	1,1518	0,5595
4.5	0,912	0,9961	0,4864
5	0,7388	0,7989	0,3931
10	0,1846	0,193	0,0979
50	0,0074	0,0076	0,0039

TABELA D.4 – Variância, em função de L, das soluções obtidas para quatro receptores a operar no modo DGPS

L [m]	σ_{xA}^2 [m ²]	σ_{yA}^2 [m ²]	σ_{zA}^2 [m ²]
1,7	0,1909	0,0504	0,1211
1,85	0,192	0,051	0,1223
2	0,1936	0,0517	0,124
3	0,1969	0,0524	0,1259
3,9	0,1973	0,0525	0,1261
4	0,1973	0,0525	0,1261
4,2	0,1973	0,0525	0,1261
4,5	0,1973	0,0525	0,1261
5	0,1973	0,0525	0,1261
10	0,1973	0,0525	0,1261
50	0,1973	0,0525	0,1261

L [m]	σ_{γ}^2 [graus ²]	σ_{β}^2 [graus ²]	σ_{α}^2 [graus ²]
1,7	130,025	131,265	126,317
1,85	5,0004	5,7389	2,2455
2	3,967	4,5872	1,8612
3	1,5559	1,7338	0,8186
3,9	0,9202	0,9857	0,4812
4	0,8748	0,9341	0,4571
4,2	0,7935	0,8429	0,4143
4,5	0,6912	0,7294	0,3605
5	0,5598	0,5857	0,2917
10	0,1398	0,1423	0,0729
50	0,0056	0,0056	0,0029

TABELA D.5 – Variância, em função de L, das soluções obtidas para três receptores a operar no modo RTK

L [m]	σ_{xA}^2 [m ²]	σ_{yA}^2 [m ²]	σ_{zA}^2 [m ²]
0.03	8,3215e-006	3,5255e-006	1,4280e-005
0.05	8,3250e-006	3,5268e-006	1,4281e-005
0.1	8,3254e-006	3,5275e-006	1,4283e-005
0.2	8,3254e-006	3,5275e-006	1,4283e-005
0.5	8,3254e-006	3,5275e-006	1,4283e-005
1	8,3254e-006	3,5275e-006	1,4283e-005
2	8,3254e-006	3,5275e-006	1,4283e-005
5	8,3254e-006	3,5275e-006	1,4283e-005
10	8,3254e-006	3,5275e-006	1,4283e-005

L [m]	σ_{γ}^2 [graus ²]	σ_{β}^2 [graus ²]	σ_{α}^2 [graus ²]
0.03	1,7131	1,7704	0,3953
0.05	0,6245	0,6474	0,1375
0.1	0,1547	0,1604	0,0348
0.2	0,0393	0,0406	0,0087
0.5	0,0063	0,0065	0,0014
1	0,0016	0,0016	3,4640e-004
2	3,9265e-004	4,0619e-004	8,6585e-005
5	6,2819e-005	6,4991e-005	1,3853e-005
10	1,5705e-005	1,6248e-005	3,4631e-006

TABELA D.6 – Variância, em função de L, das soluções obtidas para quatro receptores a operar no modo RTK

L [m]	$\sigma_{x\Lambda}^2$ [m ²]	$\sigma_{y\Lambda}^2$ [m ²]	$\sigma_{z\Lambda}^2$ [m ²]
0.03	6,1994e-006	2,6745e-006	1,0736e-005
0.05	6,1994e-006	2,6745e-006	1,0737e-005
0.1	6,1994e-006	2,6745e-006	1,0737e-005
0.2	6,1994e-006	2,6745e-006	1,0737e-005
0.5	6,1994e-006	2,6745e-006	1,0737e-005
1	6,1994e-006	2,6745e-006	1,0737e-005
2	6,1994e-006	2,6745e-006	1,0737e-005
5	6,1994e-006	2,6745e-006	1,0737e-005
10	6,1994e-006	2,6745e-006	1,0737e-005

L [m]	σ_{γ}^2 [graus ²]	σ_{β}^2 [graus ²]	σ_{α}^2 [graus ²]
0.03	1,3018	1,3181	0,2921
0.05	0,4736	0,4783	0,1039
0.1	0,1189	0,1199	0,0259
0.2	0,0297	0,0300	0,0065
0.5	0,0048	0,0048	0,0010
1	0,0012	0,0012	0,0003
2	2,9733e-004	2,9980e-004	6,4480e-005
5	4,7571e-005	4,7967e-005	1,0316e-005
10	1,1893e-005	1,1992e-005	2,5791e-006