



**UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA  
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO**



**Controlo de Veículos Autónomos  
Baseado na Informação Directa de Sensores Acústicos**

Pedro Tiago Martins Batista, n.º 49477 – Sistemas, Decisão e Controlo

**LICENCIATURA EM ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA E DE COMPUTADORES**

**RELATÓRIO DO TRABALHO FINAL DE CURSO**

**014/2005/L**

Prof. Orientador: Doutor Carlos Jorge Ferreira Silvestre

Prof. Acompanhante: Doutor Paulo Jorge Coelho Ramalho Oliveira

**SETEMBRO DE 2005**



# Agradecimentos

O presente documento constitui o relatório de um trabalho que contou com o apoio de diversas pessoas. As primeiras palavras são, naturalmente, para os meus orientadores, os Professores Carlos Silvestre e Paulo Oliveira que, com a sua capacidade, entusiasmo, apoio e amizade me guiaram ao longo deste percurso.

Apesar de, do ponto de vista formal, se tratar de um trabalho individual, gostaria também de agradecer ao meu colega Marco Morgado, cujo trabalho, cooperação, amizade e paciência foram preciosos ao longo de todo o trabalho.

Gostaria também de agradecer a todos os meus amigos, que me apoiam e me proporcionam sempre momentos agradáveis e inestimáveis, vitais para recuperar energias.

Por fim os meus agradecimentos mais profundos vão para minha família, e em particular para o meu pai, que, ao longo de todo este tempo, me apoiaram e incentivaram de forma incondicional.

A todos, Muito Obrigado!



# Resumo

Este relatório aborda o controlo de veículos submarinos autónomos (AUVs, de *Autonomous Underwater Vehicles*) sub-actuados com base na informação directa dos sensores. Os problemas estudados estão relacionados com o retorno do veículo a uma estação base auxiliado por um sistema acústico com tipologia de distâncias de base muito curtas (USBL, de *Ultra-Short Base Line*). O trabalho tem como objectivo o desenvolvimento de novas estratégias de controlo não linear explorando espaços de erros directamente expressos nos dados dos sensores e divide-se em 3 partes: i) é explorada a diversidade espacial do sistema acústico USBL e proposto um algoritmo para eliminar *outliers*; ii) é proposta uma lei de controlo para a aproximação inicial do veículo à base (*homing*); iii) é proposta uma lei de controlo para a manobra de atracar o veículo à base (*docking*). Os resultados teóricos são validados em ambiente de simulação *MATLAB*<sup>®</sup> com o AUV Infante.

Na primeira parte estudam-se sistemas USBL com diferentes distribuições espaciais, quer no que diz respeito ao número de receptores quer à disposição espacial dos mesmos. A sensibilidade ao ruído é avaliada com base no método de Monte Carlo. É ainda proposto um algoritmo para rejeição de *outliers* baseado no método RANSAC (de *RANdom SAmple Consensus*).

Na segunda parte do trabalho propõem-se leis de controlo não-lineares para o problema de *homing* a duas e a três dimensões de AUVs sub-actuados. O controlo é desenvolvido directamente no espaço dos sensores, com recurso à teoria de *Lyapunov* e à técnica de *backstepping*, sendo alcançada estabilidade quase global (almost global) assintótica.

Na última parte do trabalho propõem-se leis de controlo não-lineares para o problema de *docking* a duas e a três dimensões de AUVs sub-actuados. Tal como para o problema de *homing* recorre-se à teoria de *Lyapunov* e à técnica de *backstepping*, sendo o problema de controlo formulado no espaço dos sensores. Na análise de convergência recorre-se ainda a resultados para sistemas lineares variantes no tempo, sendo deduzidas condições de convergência para o caso a duas dimensões.

## Palavras Chave

veículos autónomos submarinos sub-actuados, *sensor-based control*, *homing*, *docking*, *ultra-short base line*

# Abstract

This report addresses the control of underactuated autonomous underwater vehicles (AUVs) based on the direct sensors' data. The problems studied are related to the return of the vehicle to a base station, by means of an acoustic system using an Ultra-Short Base Line (USBL) topology. The main objective of this report is to develop new nonlinear control strategies, exploring error spaces directly expressed in the sensors' data, and is divided into 3 parts: i) the spatial diversity of the USBL system is explored and an algorithm to eliminate outliers is proposed; ii) a control law for the initial approach of the vehicle to the base - homing - is proposed; iii) a control law for the final approach of the vehicle to the base - docking - is proposed. The theoretical developments are validated under the MATLAB<sup>®</sup> simulation environment with the Infante AUV.

In the first part, USBL systems with different spatial distributions, both in the number of receivers and in the spatial disposition, are studied. The noise sensibility is evaluated through Monte Carlo's methods. An algorithm to eliminate outliers, based on the RANSAC (RANdom SAmple Consensus) algorithm, is also proposed.

In the second part of the report, nonlinear control laws are proposed for the 2D and 3D homing problems of underactuated AUVs. The control is directly based on the sensors' information and relies on the Lyapunov theory and backstepping technique. Almost global asymptotic stability is achieved.

In the last part of the report, nonlinear control laws are proposed for the 2D and 3D docking problems of underactuated AUVs. Much alike the homing problem, the Lyapunov theory and backstepping technique are used to reach a solution, and the problem is also posed on the sensors' space. The convergence analysis also resorts to LTVS (linear time variant systems) theory and convergence conditions are presented for the 2D docking control problem.

## Keywords

autonomous underwater vehicles, sensor-based control, homing, docking, ultra-short base line

# Índice

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	iv
Índice	v
Lista de Figuras	vii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Sensor Acústico USBL</b>	<b>3</b>
2.1 Diversidade Espacial do USBL . . . . .	4
2.2 <i>Outliers</i> no sensor USBL . . . . .	11
<b>3 Aproximação à base - <i>Homing</i></b>	<b>13</b>
3.1 <i>Homing</i> a 2 dimensões . . . . .	14
3.1.1 Modelo do veículo . . . . .	14
3.1.2 Modelo do Sensor USBL . . . . .	15
3.1.3 Lei de Controlo . . . . .	17
3.1.4 Análise de Convergência . . . . .	19
3.1.5 Simulações . . . . .	20
3.2 <i>Homing</i> a 3 dimensões . . . . .	21
3.2.1 Modelo do veículo . . . . .	21
3.2.2 Simulações . . . . .	24
<b>4 Manobra de atracar - <i>Docking</i></b>	<b>27</b>
4.1 Formulação do Problema . . . . .	27
4.1.1 Problema de <i>Docking</i> a 2 dimensões . . . . .	27
4.1.2 Problema de <i>Docking</i> a 3 dimensões . . . . .	29
4.2 <i>Docking</i> a 2 dimensões . . . . .	29
4.2.1 Modelo dos Emissores . . . . .	30
4.2.2 Modelo dos Receptores . . . . .	30
4.2.3 Espaço de Erro . . . . .	30
4.2.4 Lei de Controlo . . . . .	31

4.2.5	Análise de Convergência . . . . .	34
4.2.6	Simulações . . . . .	40
4.3	<i>Docking</i> a 3 dimensões . . . . .	41
4.3.1	Modelo dos Emissores . . . . .	41
4.3.2	Modelo dos Receptores . . . . .	42
4.3.3	Espaço de Erro . . . . .	42
4.3.4	Lei de Controlo . . . . .	43
4.3.5	Simulações . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Conclusões e Trabalho Futuro</b>	<b>49</b>
<b>A</b>	<b>Complemento ao estudo do sistema USBL</b>	<b>51</b>
A.1	Dedução de $\theta(d_1, d_2)$ . . . . .	51
A.2	Dedução de $\theta(c, d)$ . . . . .	52
A.3	Mínimos Quadrados aplicados à aproximação planar . . . . .	52
A.4	Mínimos Quadrados Pesados aplicados à Aproximação Planar . . . . .	55
A.5	Sensibilidade espacial do USBL a 3 dimensões . . . . .	56
<b>B</b>	<b>Técnica de <i>Backstepping</i></b>	<b>61</b>
<b>C</b>	<b>Complemento da Secção 3.2</b>	<b>63</b>
C.1	Modelo do Sensor USBL . . . . .	63
C.2	Lei de Controlo . . . . .	65
C.3	Análise de Convergência . . . . .	68
<b>D</b>	<b>Deduções da Secção 4.2</b>	<b>71</b>
D.1	Dedução da dinâmica de $\mathbf{v}_d$ . . . . .	71
D.2	Dedução da dinâmica de $\alpha_1$ . . . . .	73
<b>E</b>	<b>Deduções da Secção 4.3</b>	<b>75</b>
E.1	Dedução da dinâmica de $\mathbf{v}_d$ . . . . .	75
E.2	Dedução de $u_2$ . . . . .	77
<b>F</b>	<b>Modelo para simulação em MATLAB</b>	<b>79</b>
	<b>Referências</b>	<b>81</b>

# Lista de Figuras

2.1	Esquema com 1 Emissor e 2 Receptores. . . . .	4
2.2	Função $\theta(c, d)$ . . . . .	5
2.3	Derivadas parciais de $\theta(c, d)$ para $l = 1$ m. . . . .	5
2.4	Esquema com 1 Emissor e 2 Receptores - aproximação planar. . . . .	6
2.5	Erro introduzido pela aproximação planar a 2D. . . . .	7
2.6	Derivada $\frac{\partial \theta_p(d)}{\partial d}$ . . . . .	7
2.7	Geometrias 2D com igual número de receptores mas diferentes distribuições espaciais. . . . .	8
2.8	Média do erro e desvio padrão do erro para diferentes geometrias com igual número de receptores. . . . .	9
2.9	Geometrias 2D com distribuições espaciais semelhantes mas diferente número de receptores. . . . .	10
2.10	Média do erro e desvio padrão do erro para geometrias com diferente número de receptores. . . . .	11
2.11	Efeito do algoritmo RANSAC. . . . .	12
3.1	Referencial inercial universal e referencial do barco. . . . .	14
3.2	Onda plana incidente no sistema USBL. . . . .	15
3.3	<i>Hovercraft Kelly II - Caltech Multi-Vehicle Wireless Testbed</i> . . . . .	21
3.4	Trajectórias descritas pelo veículo durante a fase de <i>homing</i> . . . . .	22
3.5	Velocidade do veículo durante a aproximação inicial. . . . .	22
3.6	Comando aplicado ao veículo durante a aproximação inicial. . . . .	22
3.7	Referencial universal e referencial associado ao AUV. . . . .	23
3.8	Veículo submarino autónomo sub-actuado INFANTE. . . . .	25
3.9	Trajectória descrita pelo veículo durante a aproximação inicial à base. . . . .	25
3.10	Trajectória descrita pelo veículo no plano XY durante a aproximação inicial à base. . . . .	26
3.11	Trajectória descrita pelo veículo no plano XZ durante a aproximação inicial à base. . . . .	26
3.12	Velocidade do veículo durante a aproximação inicial. . . . .	26
3.13	Comando aplicado ao veículo durante a aproximação inicial. . . . .	26
4.1	Estrutura de emissores necessários para a aproximação final (a 2 dimensões). . . . .	28
4.2	Objectivo durante a aproximação final (a 2 dimensões). . . . .	28
4.3	Estrutura de emissores necessários para a aproximação final. . . . .	29
4.4	Objectivo durante a aproximação final. . . . .	29
4.5	Erro de orientação $\alpha$ . . . . .	32
4.6	Decomposição do erro de orientação $\alpha$ . . . . .	35

4.7	Trajectórias descritas pelo veículo durante a fase de <i>docking</i> . . . . .	40
4.8	Velocidade do veículo durante a aproximação final. . . . .	41
4.9	Comando aplicado ao veículo. . . . .	41
4.10	Exemplo de uma trajectória descrita pelo veículo durante a fase de <i>docking</i> . . . . .	46
4.11	Trajectória descrita pelo veículo no plano XY durante a aproximação final à base. . . . .	46
4.12	Trajectória descrita pelo veículo no plano XZ durante a aproximação final à base. . . . .	46
4.13	Velocidade do veículo durante a aproximação final. . . . .	46
4.14	Comando aplicado ao veículo durante a aproximação final. . . . .	47
A.1	Esquema com 1 Emissor e 2 Receptores. . . . .	51
A.2	Esquema com uma onda plana a incidir em dois receptores. . . . .	54
A.3	Comparação do Métodos dos Mínimos Quadrados Simples com os Mínimos Quadrados Pesados. . . . .	56
A.4	Ângulos de azimute e elevação. . . . .	57
A.5	Geometias 3D com igual número de sensores mas diferente curvatura. . . . .	57
A.6	Resultados sobre o erro do ângulo de azimute. . . . .	58
A.7	Resultados sobre o erro do ângulo de elevação. . . . .	58
A.8	Resultados sobre o erro do ângulo de azimute - Sensibilidade ao número de sensores. . . . .	59
A.9	Resultados sobre o erro do ângulo de elevação - Sensibilidade ao número de sensores. . . . .	59
B.1	Carrinho que se desloca num espaço de dimensão. . . . .	61
C.1	Onda plana incidente no sistema USBL. . . . .	64
F.1	Bloco que implementa o modelo do veículo 3D . . . . .	79
F.2	Implementação do modelo do veículo 3D . . . . .	80

# Capítulo 1

## Introdução

A superfície terrestre é coberta em mais de 70% por água pelo que os mares e oceanos são naturalmente alvo da curiosidade e actividades humanas. Por um lado esta enorme massa de água constitui uma enorme fonte de recursos e é também um importante meio de comunicação. Por outro lado, os mares e oceanos influenciam de uma forma directa ou indirecta a vida de todos nós: O clima e o ecossistema global em que habitamos são por eles grandemente influenciados [1], [2], [3], [4].

Minerais, gás natural e petróleo são apenas alguns dos recursos que os oceanos encerram. A enorme diversidade de vida que os caracterizam constitui não só uma fonte renovável de alimento mas também objecto privilegiado da investigação por parte dos mais variados cientistas, pois os fenómenos que se encontram nas profundezas dos oceanos ultrapassam muitas vezes as barreiras da biologia. Vulcões subaquáticos, falhas entre placas tectónicas e outros fenómenos geológicos são também objecto de investigação por parte de geólogos [5], [6]. Aplicações como a monitorização de lixo tóxico e de cabos submarinos ou ainda aplicações militares como a vigilância de águas territoriais ou a procura e desmantelamento de minas requerem também a intervenção humana nos oceanos.

A exploração económica dos oceanos é realizada desde há muito tempo de forma rentável, existindo actualmente um leque de soluções adequadas às mais variadas actividades marítimas de exploração económica. No entanto, a investigação e exploração do meio submarino tem encontrado obstáculos no passado, essencialmente devido aos elevados custos associados a actividades de investigação neste meio. Soluções tradicionais incluem o recurso a mergulhadores, o uso de navios, bóias e instrumentos rebocados. Com o avanço da tecnologia surgiram mais recentemente os veículos operados remotamente (ROVS, de *Remoted Operated Vehicles*) que, apesar de reduzirem o risco directo para a vida humana, têm ainda elevados custos de operação. Neste contexto, surge agora uma nova geração de veículos submarinos, os veículos submarinos autónomos (AUVs, de *Autonomous Underwater Vehicles*). Por um lado, os custos de fabrico e operação dos AUVs são substancialmente menores que os de soluções tradicionais, permitindo o seu carácter autónomo a aquisição de dados de forma automática. Por outro lado, os AUVs não põem em risco a vida humana.

No controlo de veículos autónomos a informação local fornecida por um conjunto de sensores instalados a bordo tem sido explorada de forma a dotar o veículo da capacidade de percepção do ambiente que o rodeia. De entre os múltiplos sensores disponíveis para controlo, particular ênfase tem sido dado pela comunidade científica na área de controlo com recurso à visão, tendo sido desenvolvidas técnicas e abordagens ao problema de controlo que

se podem dividir em métodos baseados em posição e em métodos baseados directamente na imagem. Nos métodos baseados em posição as medidas obtidas a partir da imagem são convertidas para o referencial do veículo, calculando o sistema de controlo o erro de posição. Nos métodos baseados directamente em imagem o vector de erro, definido no referencial da imagem, é utilizado para alimentar o sistema de controlo.

Apesar dos avanços no que diz respeito à utilização de métodos baseados directamente em imagem, muito pouco tem sido feito no que diz respeito à utilização directa da informação fornecida por outro tipo de sensores. Neste contexto, procura-se com este trabalho desenvolver uma nova abordagem a dois problemas de controlo de AUVs, problemas esses extrapoláveis para outros tipos de veículos autónomos. A operação de AUVs requer frequentemente a acostagem do veículo a uma estação base para realizar tarefas como, por exemplo, a recarga das baterias, transferência de dados ou mudança do conjunto de sensores a bordo. Este requisito/necessidade torna importante a existência de um sistema que permita ao AUV acoplar, de forma autónoma, a uma base fixa. De entre os subsistemas que permitem o AUV realizar a acoplagem automática encontram-se um sistema de controlo para a aproximação inicial à base (*homing*) e um sistema de controlo para a manobra de atracar (*docking*), responsável pela aproximação final, sendo estes sistemas complementares: O sistema de aproximação entra em funcionamento quando se pretende regressar à base e leva o veículo até uma distância suficientemente pequena para que o sistema de aproximação final possa entrar em funcionamento.

Neste trabalho apresentam-se sistemas de controlo para a aproximação de um veículo à base e posterior manobra de atracar à mesma baseados na informação directa dos atrasos de propagação entre um ou mais emissores acústicos e um conjunto de receptores fornecida por um sensor acústico com configuração USBL (*Ultra Short Base Line*). No Capítulo 2 é explorada a diversidade espacial do sensor e é apresentado um algoritmo para rejeição de *outliers* nas diferenças de atrasos entre receptores. Em paralelo e enquadrado com este projecto encontra-se em desenvolvimento um sistema de navegação com utilização também deste tipo de sistema de posicionamento acústico [7] onde são abordadas técnicas de recepção/emissão que permitem melhorar o desempenho no cálculo dos tempos de chegada dos sinais acústicos. No Capítulo 3 é formulado o problema de aproximação à base e apresentadas soluções para o mesmo a duas e a três dimensões, sendo o controlo desenvolvido com recurso à teoria de *Lyapunov* [8], [9] e a técnicas de *backstepping*. É analisada a convergência do controlador proposto e apresentados resultados obtidos em ambiente de simulação. No Capítulo 4 é formulado o problema da manobra de atracar, sendo apresentadas soluções para o mesmo a duas e a três dimensões. É também analisada a convergência dos controladores propostos e apresentados resultados obtidos em ambiente de simulação. Por fim, no Capítulo 5 são apresentadas conclusões relativas ao trabalho realizado e sugeridos tópicos de trabalho futuro.

# Capítulo 2

## Sensor Acústico USBL

Um sensor acústico USBL consiste num conjunto de receptores acústicos (hidrofonos) situados a curta distância entre si, acoplados na mesma peça, que com base nas diferenças de tempo de recepção nos diversos receptores e, eventualmente, nos tempos de propagação da onda entre o emissor e os receptores, estima a direcção em que o emissor se encontra ou, eventualmente, a posição exacta do emissor relativamente ao veículo em que se encontra instalado o sensor USBL. Na fase de *homing* pretende-se apenas orientar o veículo de forma a que este se aproxime do emissor que alimenta os receptores do sistema USBL, que deve estar situado na base a que se pretende que o veículo se aproxime, bastando portanto um emissor. Na fase de *docking* pretende-se não só que o AUV se aproxime da base mas que o execute com uma determinada atitude. Assim, são necessários pelo menos três emissores (com configuração não singular) e o sistema USBL deve determinar não só a direcção em que cada um destes emissores se encontra mas também a distância a que se encontram para alimentar um sistema de controlo. No caso da existência de mais do que um emissor este tipo de sistema acústico é designado por LUSBL, de *Long and Ultra-Short Base Line*.

Um sensor acústico do tipo USBL não constitui solução única, apresentando vantagens e desvantagens relativamente a outros tipos de sensores [10]. Exemplos de outros tipos de sensores são sensores ópticos (imagem) e sensores electromagnéticos. Um sensor do tipo óptico tem como grande vantagem elevadas taxas de actualização. No entanto, a sua utilização é completamente inviável quando a visibilidade é má ou para grandes distâncias, devido à forte atenuação sofrida pelas ondas electromagnéticas no meio aquático, o que o torna pouco apelativo. Um sensor electromagnético tem como vantagens elevadas taxas de actualização e boa robustez sob as mais diversas condições oceânicas. No entanto, é altamente susceptível a anomalias magnéticas. Um sensor do tipo USBL apresenta como vantagens elevado alcance, excelente para a aproximação à base, bem como elevada precisão para distâncias pequenas, ideal para a manobra de atracar. De entre as desvantagens deste tipo de sensor destacam-se as baixas frequências de trabalho e a susceptibilidade a reflexões múltiplas, em especial em águas pouco profundas.

Neste trabalho apresentam-se algumas considerações relativamente a um sistema acústico do tipo USBL. A diversidade espacial da geometria é explorada na Secção 2.1, sendo apresentado um algoritmo para rejeição de *outliers* na Secção 2.2.

## 2.1 Diversidade Espacial do USBL

Considere-se um sistema muito simples a duas dimensões constituído por um emissor e dois receptores, sendo conhecida a distância entre os receptores e os atrasos de propagação entre o emissor e os dois receptores. Conhecida a velocidade de propagação da onda acústica no meio, e assumindo que o meio é homogéneo, podem então calcular-se as distâncias entre o emissor e os dois receptores. Considere-se então a Figura 2.1, onde  $l$  é a distância entre os dois receptores  $R_1$  e  $R_2$  e  $d_1$ ,  $d_2$  representam as distâncias entre o emissor  $E$  e os receptor  $R_1$  e  $R_2$ , respectivamente.

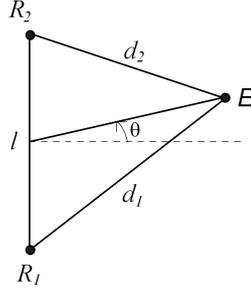


Figura 2.1 - Esquema com 1 Emissor e 2 Receptores.

O ângulo  $\theta$ , tal como definido na Figura 2.1, é dado por (dedução na secção em anexo A.1)

$$\theta = \arctan \left( \frac{d_1^2 - d_2^2}{\sqrt{2l^2(d_1^2 + d_2^2) - l^4 - (d_1^2 - d_2^2)^2}} \right) \quad (2.1)$$

Em geral,  $d_1$  e  $d_2$  são afectados de erro, sendo então conhecidos  $\tilde{d}_1$  e  $\tilde{d}_2$ . No entanto, é expectável que grande parte das fontes de erro afectem de igual forma  $d_1$  e  $d_2$  pois os pontos da frente da onda que chega aos dois receptores estão muito próximos. Por outro lado existem erros intrínsecos à recepção, que afectam essencialmente a diferença entre  $d_1$  e  $d_2$ . Assim, para analisar o erro, é natural separar  $d_1$  e  $d_2$  nas componentes comum e diferencial. Considerem-se então as componentes de modo comum e modo diferencial das distâncias  $d_1$  e  $d_2$

$$\begin{cases} c = \frac{d_1 + d_2}{2} \\ d = d_1 - d_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

O ângulo  $\theta$  é dado, em função da componente comum e da componente diferencial, por (dedução na secção em anexo A.2)

$$\theta(c, d) = \arctan \left( \frac{2cd}{\sqrt{2l^2(2c^2 + \frac{1}{2}d^2) - l^4 - 4(cd)^2}} \right) \quad (2.3)$$

Na Figura 2.2 apresenta-se o gráfico da função  $\theta(c, d)$ . Observando a figura, verifica-se que o ângulo depende essencialmente da diferença de distâncias (e portanto de tempos), não variando significativamente com a componente comum que indica a distância média entre o emissor e os receptores. Assim, é de esperar que erros na componente comum tenham uma influência muito menor que erros na componente diferencial.

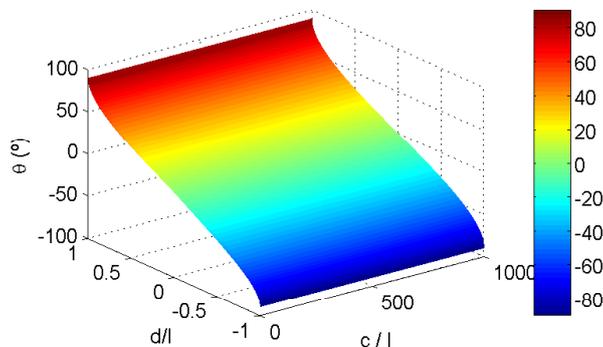


Figura 2.2 - Função  $\theta(c, d)$  para  $(d, c) \in [-l, l] \times [l, 1000l]$ .

Suponha-se então que se conhecem  $\tilde{c} = c + \delta c$  e  $\tilde{d} = d + \delta d$ . Então,

$$\delta\theta \approx \frac{\partial\theta}{\partial c}\delta c + \frac{\partial\theta}{\partial d}\delta d \quad (2.4)$$

Na Figura 2.3 apresentam-se as derivadas parciais de  $\theta(c, d)$ . Comparando a derivada parcial em ordem a  $c$  com a derivada parcial em ordem a  $d$  verifica-se que, de facto, a sensibilidade do ângulo é muito maior face a variações de  $d$  do que a variações de  $c$ , pelo que erros na componente diferencial têm um peso muito maior no erro de  $\theta$  que erros na componente de modo comum.

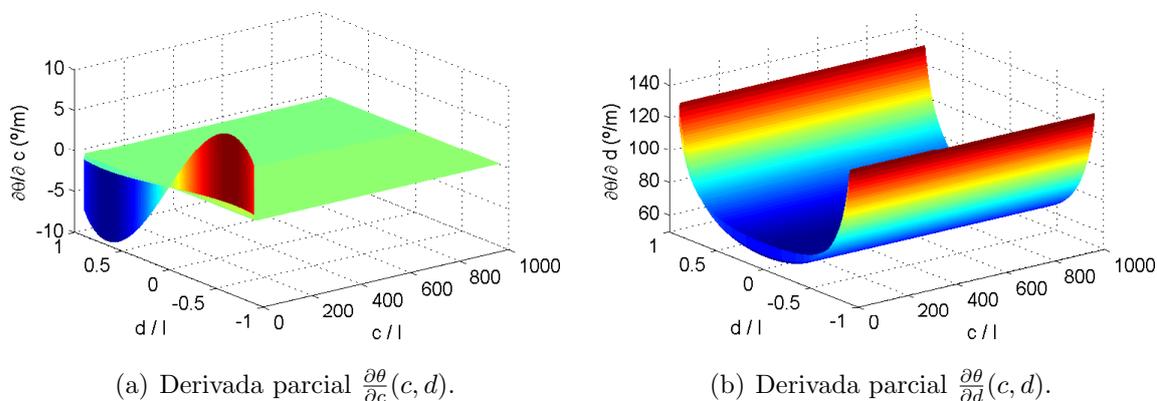


Figura 2.3 - Derivadas parciais de  $\theta(c, d)$  para  $l = 1$  m.

Observando a Figura 2.3(a) verifica-se que derivada parcial em ordem a  $c$  toma valores muito próximos de zero para  $c \gg l$ . Este facto sugere, de alguma forma, que o cálculo do ângulo pouco depende da distância média a que os receptores se encontram do emissor, desde que esta distância seja muito superior à distância entre os receptores. Esta observação têm explicação física: A 2 dimensões a onda acústica emitida por uma fonte pontual tem simetria circular mas, observando apenas uma pequena fracção da onda circular, a aproximação a uma onda paralela é válida, que é o que de facto se passa para  $c \gg l$ .

Observando a Figura 2.3(b) verifica-se que a derivada parcial em ordem a  $d$  explode para  $|d|$  próximo de  $l$ , apresentando os mínimos para valores de  $d$  próximos de zero a que correspondem ângulos próximos de zero. Esta observação permite concluir que o comportamento face a erros desde sistema muito simples varia fortemente com  $\theta$ , apresentando baixa sensibilidade a erros para ângulos próximos de zero e sensibilidade elevada para ângulos afastados da origem, sendo o comportamento particularmente afectado para ângulos em que  $|\theta| > \pi/4$ .

Considere-se a Figura 2.4, que representa o mesmo sistema com um emissor e dois receptores mas em que se considera a aproximação planar. Nesta situação, o ângulo  $\theta_p$ , onde o índice  $p$  se refere à aproximação planar, é dado por

$$\theta_p(d) = \arcsin\left(\frac{d}{l}\right) \quad (2.5)$$

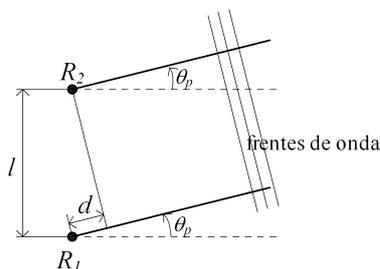


Figura 2.4 - Esquema com 1 Emissor e 2 Receptores - aproximação planar.

Na Figura 2.5 apresentam-se gráficos dos erros originados pela aproximação a uma onda paralela, quer na zona próxima quer na zona distante ( $c > 5l$ ). De facto, na zona distante os erros são praticamente negligenciáveis. Na zona próxima os erros são naturalmente mais elevados. No entanto, para explorar a diversidade espacial deste sensor, dado que a distância  $l$  é muito pequena e em geral muito menor que  $c$ , para zonas de trabalho típicas, é válida a aproximação planar.

Na Figura 2.6 apresenta-se a derivada de  $\theta_p(d)$ . Verifica-se que a comportamento é idêntico ao exibido pelo cálculo exacto do ângulo  $\theta$ , evidenciando-se a elevada sensibilidade a erros para ângulos  $|\theta_p| > \pi/4$ .

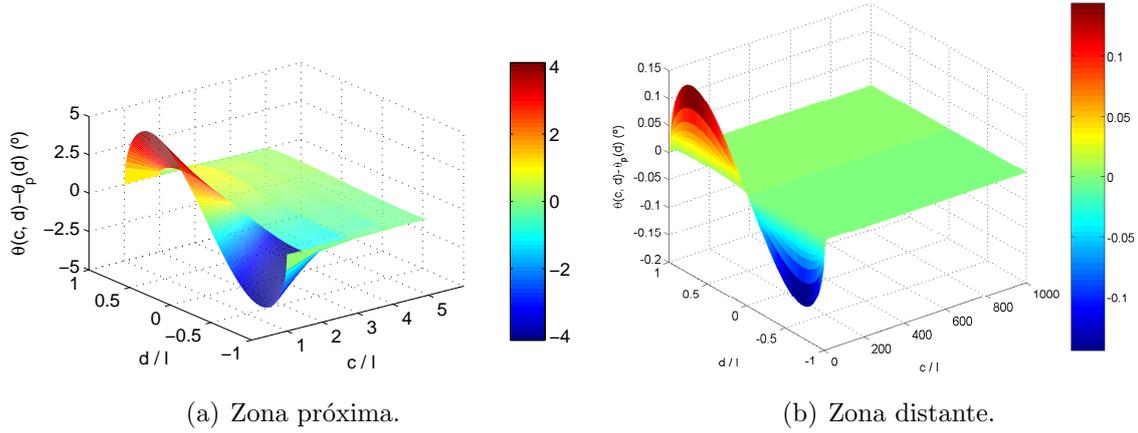


Figura 2.5 - Erro introduzido pela aproximação planar a 2D.

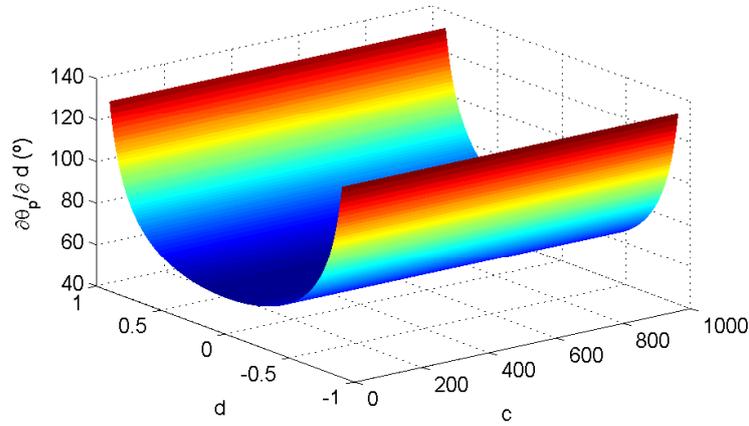


Figura 2.6 -  $\frac{\partial \theta_p(d)}{\partial d}$  para  $d \times c \in [-0.9l, 0.9l] \times [l, 1000l]$  com  $l = 1$ .

O sistema simples composto por 1 emissor e 2 receptores permite evidenciar alguns aspectos relacionados com a elevada direccionalidade do mesmo. De facto, para apenas dois receptores, o sistema revela um bom comportamento para ângulos próximos de zero, mas um mau comportamento para ângulos afastados da origem. Para melhorar o comportamento do sistema é natural introduzir um número de receptores superior ao número mínimo necessário para determinar o ângulo  $\theta$  e procurar tirar partido do maior número de medidas disponíveis para diminuir a sensibilidade do sistema face ao erro, quer para ângulos próximos de zero quer para ângulos mais afastados da origem. Sejam então  $\mathbf{r}_i = [x_i, y_i]' \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  as posições de  $N$  receptores e sejam  $\Delta_1 = t_1 - t_2$ ,  $\Delta_2 = t_1 - t_3$ ,  $\dots$ ,  $\Delta_M = t_{N-1} - t_N$  todas as combinações possíveis de diferenças de atrasos entre dois receptores, sendo portanto  $M = C_2^N$ . Seja ainda  $\mathbf{r}_x = [x_1 - x_2, x_1 - x_3, \dots, x_{N-1} - x_N]'$ ,  $\mathbf{r}_y = [y_1 - y_2, y_1 - y_3, \dots, y_{N-1} - y_N]'$  e  $\mathbf{\Delta} = [\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_M]'$ .

Considere-se uma onda paralela que passa por  $[x_i, y_i]'$  no instante  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , com vector normal (que indica a direcção de propagação)  $\mathbf{d} = [d_x, d_y]'$ , unitário e com sentido

oposto ao do sentido de propagação da onda. Então,

$$V_p \Delta_i = -(d_x \mathbf{r}_{xi} + d_y \mathbf{r}_{yi}) \quad (2.6)$$

em que  $V_p$  é a velocidade de propagação da onda no meio.

Suponha-se que se conhecem os atrasos  $\Delta_i$  afectados de erro, pretendendo-se determinar  $\mathbf{d}$  de forma a minimizar o erro quadrático total

$$J = \sum_{i=1}^M (d_x \mathbf{r}_{xi} + d_y \mathbf{r}_{yi} + V_p \Delta_i)^2 \quad (2.7)$$

A solução do problema de minimização é dada por (dedução na secção em anexo A.3)

$$\mathbf{d} = \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{b} \quad (2.8)$$

onde

$$\mathbf{H}_Q = \begin{bmatrix} \mathbf{r}'_x \mathbf{r}_x & \mathbf{r}'_x \mathbf{r}_y \\ \mathbf{r}'_y \mathbf{r}_x & \mathbf{r}'_y \mathbf{r}_y \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

e

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -V_p \mathbf{r}'_x \Delta \\ -V_p \mathbf{r}'_y \Delta \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Para evidenciar a dependência da sensibilidade do sistema face à configuração espacial dos receptores considerem-se as 3 geometrias apresentadas na Figura 2.7. As 3 geometrias, todas com 21 receptores, apresentam formas semelhantes, sendo construídas com base em fracções de circunferências de raios distintos. A diferença entre as 3 geometrias reside portanto no grau de curvatura, sendo a geometria 1 mais próxima da geometria linear, enquanto que a geometria 3 apresenta maior grau de curvatura.

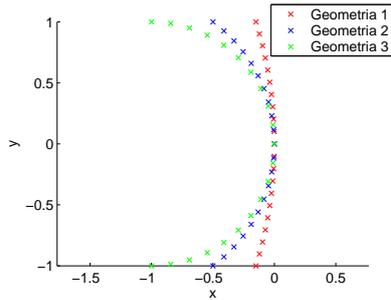


Figura 2.7 - Geometrias 2D com igual número de receptores mas diferentes distribuições espaciais.

Para comparar as 3 geometrias recorreu-se ao método de *Monte Carlo*, efectuando-se 1000 experiências aleatórias, em que se introduziram erros com média nula e desvio padrão  $0.01/V_p$  em todas as diferenças de tempo, registando-se depois a média do erro obtido no cálculo de  $\theta$ , bem como o módulo do desvio padrão do erro. Na Figura 2.8 apresentam-se os resultados obtidos, em que  $r$  representa a distância média entre os receptores e o emissor.

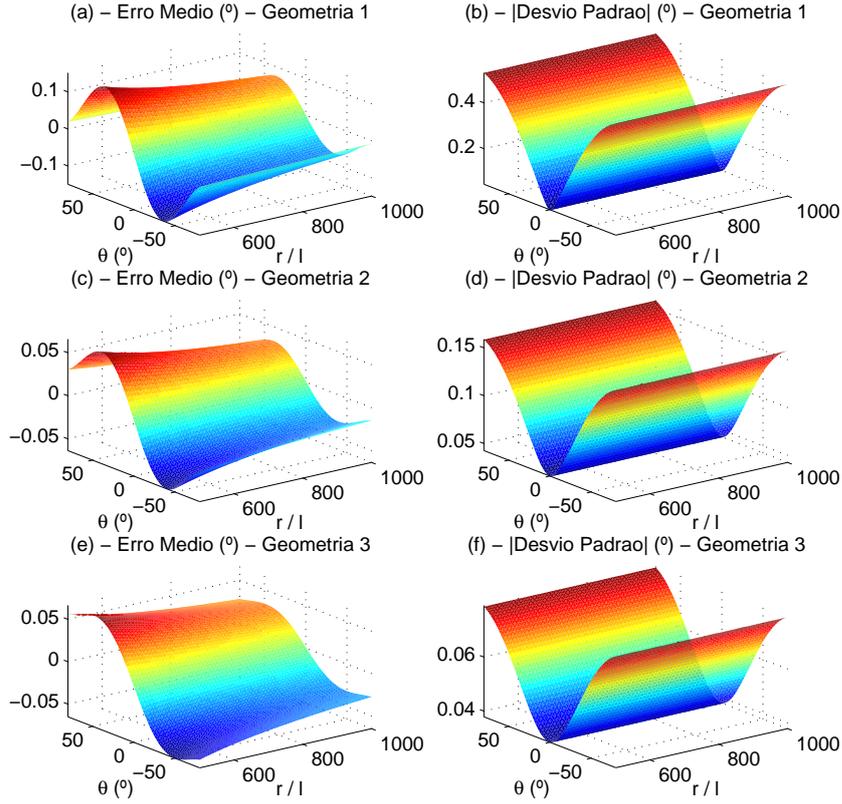


Figura 2.8 - Média do erro e desvio padrão do erro para diferentes geometrias com igual número de receptores.

A geometria quase linear apresenta um erro médio maior, bem como um maior desvio padrão. A geometria com maior grau de curvatura apresenta os melhores resultados. Estes resultados podem ser interpretados com base no estudo efectuado para o sistema mais simples com apenas 2 receptores: A geometria quase linear não introduziu novas direcções significativas, considerando os receptores dois a dois, enquanto que a geometria com maior curvatura introduziu novas direcções preferenciais, considerando os receptores dois a dois. Daí que o comportamento melhora à medida que aumenta a curvatura da geometria. Do ponto de vista estritamente algébrico os resultados podem ser interpretados com base no número de condição da matriz  $\mathbf{H}_Q$ . Seja  $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ , em que  $\Delta\mathbf{b}$  representa o erro do vector  $\mathbf{b}$ . Então,

$$\frac{1}{\text{cond}(\mathbf{H}_Q)} \|\Delta\mathbf{b}\| \leq \|\Delta\mathbf{d}\| \leq \text{cond}(\mathbf{H}_Q) \|\Delta\mathbf{b}\| \quad (2.11)$$

onde  $\text{cond}(\mathbf{H}_Q)$  é o número de condição da matriz  $\mathbf{H}_Q$ . A geometria quase linear apresenta um número de condição muito elevado, indicando mau condicionamento do sistema, isto é, pequenos erros em  $\mathbf{b}$  podem originar erros elevados em  $\mathbf{d}$ . A geometria 3 apresenta um número de condição baixo, próximo da unidade. Relativamente a esta interpretação algébrica baseada no número de condição da matriz  $\mathbf{H}_Q$  importa ainda referir que números de condição demasiado próximos da unidade podem não ser necessariamente os mais indicados e uma geometria que apresente um número de condição mais baixo que outra não tem necessariamente melhor comportamento face a erros, como se demonstra em seguida. De

facto, se por um lado números de condição próximos da unidade diminuem o majorante do erro cometido, por outro lado aumentam o erro mínimo cometido.

Como já se viu, utilizando mais do que 2 receptores conseguem-se geometrias que apresentam um comportamento menos sensível a erros. Importa então verificar de que modo para geometrias com formas semelhantes o número de receptores influencia o comportamento do sistema. Para tal, considere-se a Figura 2.9 em que se apresentam 3 geometrias com distribuição espacial semelhante mas diferente número de receptores: A geometria 1 tem 7 receptores, a geometria 2 tem 21 receptores e a geometria 3 tem 51 receptores. Para observar o efeito do número de receptores realizaram-se de novo 1000 experiências aleatórias, sendo os resultados apresentados na Figura 2.10. Observa-se que a variância do erro é tanto menor quanto maior é o número de receptores. No entanto, a média do erro não varia significativamente. De facto, o aumento do número de receptores melhora a qualidade do sistema na medida em que diminui a variância do erro mas o erro médio não diminui, uma vez que este depende essencialmente do erro cometido pela aproximação planar, dado que a média dos erros introduzidos é nula. Do ponto de vista algébrico este exemplo complementa o anterior. De facto, o número de condição da matriz  $\mathbf{H}_Q$  é tanto maior quanto maior o número de receptores, sendo que este aumento se traduz num erro mínimo menor e não num erro máximo maior.

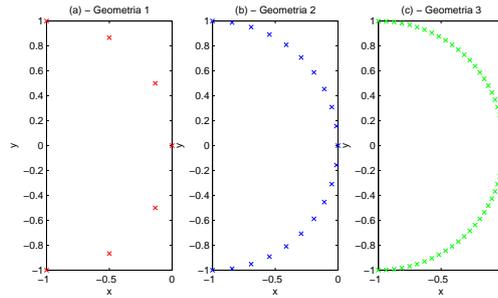


Figura 2.9 - Geometrias 2D com distribuições espaciais semelhantes mas diferente número de receptores.

Os resultados até agora apresentados evidenciam claramente que, para um dado ângulo, os pares de receptores que melhor se adequam ao cálculo desse ângulo têm configuração tal que a recta que passa por ambos é ortogonal à recta cujo ângulo se pretende determinar. Com base nesta observação é possível modificar o método de cálculo de  $\theta$  procurando dar maior importância aos pares de receptores melhor colocados para a determinação desse ângulo. Isto pode ser feito em duas fases: Numa primeira fase calcula-se o ângulo com base no método apresentado anteriormente. Depois, com base nesse ângulo, calculam-se pesos  $w_i > 0$  a atribuir a cada diferença de tempos, introduzindo-se uma nova função de custo

$$J = \sum_{i=1}^M w_i (d_x \mathbf{r}_{xi} + d_y \mathbf{r}_{yi} + V_p \Delta_i)^2 \quad (2.12)$$

A experiência (apresentada na secção em anexo A.4) demonstra no entanto que esta alteração não trás uma melhoria na determinação do ângulo, antes pelo contrário. De

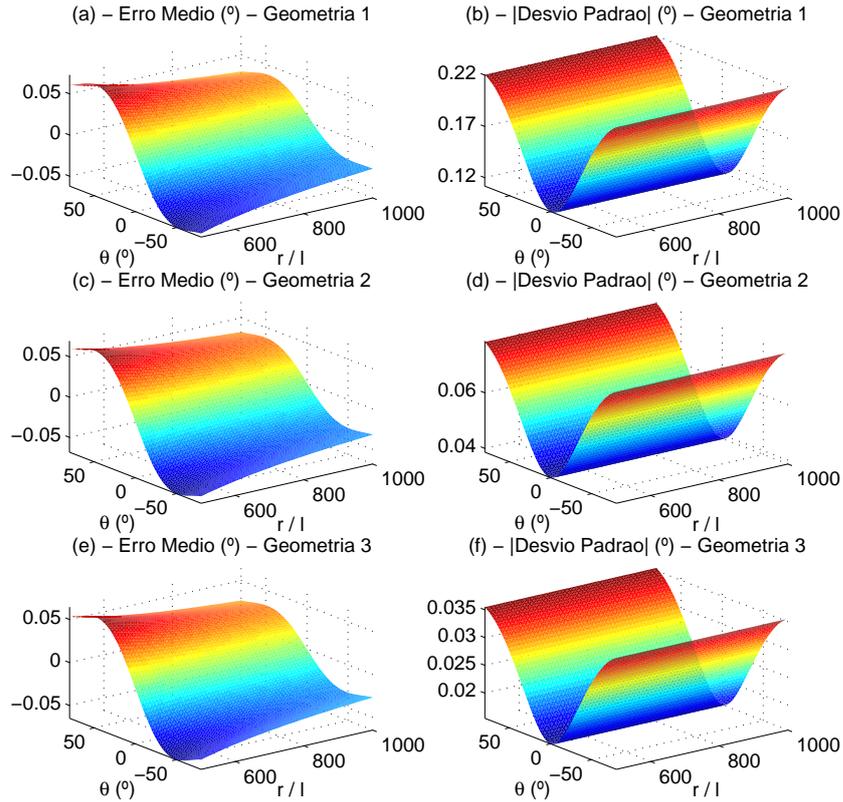


Figura 2.10 - Média do erro e desvio padrão do erro para geometrias com diferente número de receptores.

facto, se é verdade que se atribui uma maior importância aos receptores melhor colocados, na prática esta alteração corresponde a diminuir artificialmente o número de receptores utilizados, efeito este que se sobrepõe à melhoria introduzida pela selecção de pesos diferentes para medidas diferentes.

O estudo até agora apresentado incide apenas em configurações a 2 dimensões. No entanto, os resultados são imediatamente extrapoláveis para o caso a 3 dimensões. Assim, geometrias 3D próximas de uma geometria em que todos os receptores estão aproximadamente no mesmo plano tem comportamentos inferiores a geometrias que apresentem uma maior curvatura. De novo, o comportamento é tanto melhor quanto maior for o número de receptores disponível. Na secção em anexo A.5 apresentam-se os resultados para o caso a 3 dimensões.

## 2.2 *Outliers* no sensor USBL

O meio aquático é especialmente propício ao aparecimento de *outliers*, isto é, medidas cujo erro é muito maior que o normal, não sendo explicado por fontes de erro comuns às outras medidas. A fonte mais comum deste tipo de erros é a existência de múltiplos caminhos para o sinal acústico, em especial em águas pouco profundas. O algoritmo utilizado para processar as diferenças de tempo de chegada entre receptores (mínimos quadrados) é sensível a este tipo de erros pelo que se torna imperativo tentar, de alguma forma, minimizar o efeito destes

*outliers* ou mesmo anulá-lo por completo. Neste sentido apresenta-se de seguida a aplicação de um algoritmo que permite detectar este tipo de *outliers*, conhecido por RANSAC (de *RANdom SAmples Consensus*) [11].

O algoritmo RANSAC é um algoritmo que permite separar um conjunto de dados em dois conjuntos, um conjunto de *inliers* e um conjunto de *outliers*. Numa primeira fase o algoritmo selecciona, de forma aleatória, conjuntos de dados com dimensão mínima suficiente para estimar o resultado pretendido e, para cada conjunto destes dados, determina quais as medidas que são por eles ‘explicadas’, isto é, medidas cujo erro seja inferior a um dado limiar. Estas medidas são consideradas *inliers*, sendo as restantes *outliers*. No fim, o conjunto de *inliers* é o maior dos conjuntos de *inliers* determinados anteriormente, sendo depois, na segunda fase do algoritmo, determinado o resultado pretendido com base apenas no conjunto de *inliers*.

Para demonstrar o funcionamento deste algoritmo realizaram-se 100 experiências aleatórias, em que se introduziram erros aleatórios nos atrasos aos receptores, sendo adicionado a um desses atrasos (determinado também de forma aleatória) um erro muito maior, traduzindo-se na prática num potencial *outlier*. Na Figura 2.11 apresentam-se os resultados obtidos.

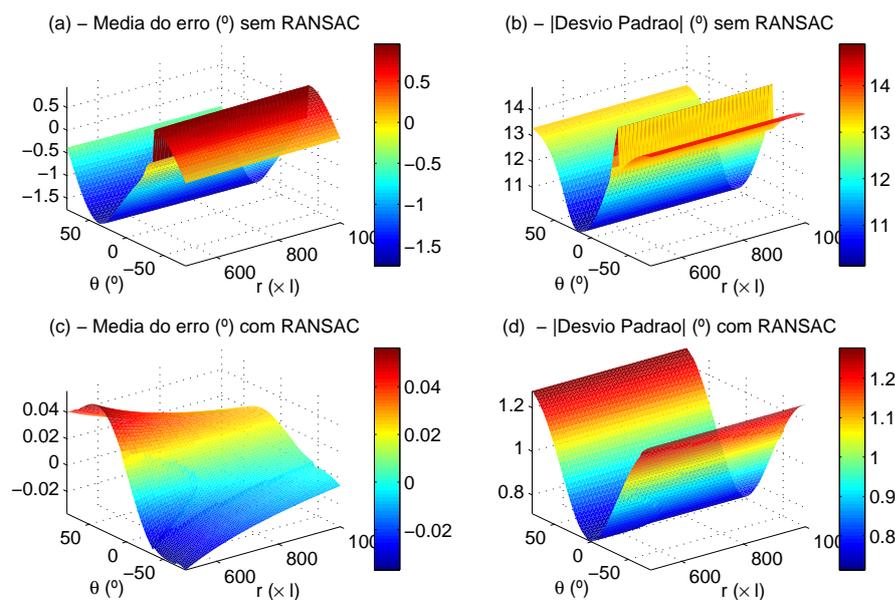


Figura 2.11 - Efeito do algoritmo RANSAC.

Observando os resultados obtidos em ambiente de simulação verifica-se que o algoritmo RANSAC elimina efectivamente grande parte dos *outliers* contribuindo assim para um aumento da robustez do sistema.

# Capítulo 3

## Aproximação à base - *Homing*

Quando um veículo autónomo submarino se encontra a uma grande distância de uma estação base e se pretende o seu regresso é necessário que existam um conjunto de sensores e um sistema de controlo que permitam gerar os sinais de actuação do veículo adequados à realização dessa tarefa. O problema poderia ser posto como um problema de seguimento de uma trajectória num referencial cartesiano, para o qual existem diversas soluções (e.g. [12], [13], [14]). No entanto, em geral não é necessário tal grau de exigência durante a fase de *homing*, uma vez que apenas se pretende que o veículo se aproxime, de alguma forma, da estação base, não sendo nesta fase relevante a orientação do veículo relativamente à base. Assim, durante esta fase o veículo apenas necessita de um sistema sensorial que forneça informação sobre a direcção em que a base se encontra. Um sistema composto por um emissor, colocado na base, estando o veículo equipado com um sensor do tipo USBL, como foi visto no Capítulo 2, permite obter esta informação.

O objectivo deste capítulo é apresentar uma lei de controlo para a fase de *homing* de um AUV que se desloca num espaço a 3 dimensões (3D). No entanto, apresenta-se aqui apenas a dedução para o caso particular de 2 dimensões (2D), evitando-se a complexidade e extensão da dedução para 3D. Realça-se no entanto que a dedução para 3D é apresentada na íntegra no Anexo C. Na Secção 3.1 começa-se por analisar e propor uma solução para o problema de *homing* de um *hovercraft*, que se desloca num espaço de 2 dimensões e que tem dinâmica semelhante à dinâmica do plano horizontal de um AUV. A análise do problema a 2D permite a extrapolação para o problema mais geral a 3 dimensões, cuja solução é apresentada na Secção 3.2. Em ambos os casos é garantida convergência quase global (*almost global*) assintótica das variáveis de erro para zero, sendo a lei de controlo totalmente desenvolvida no espaço dos sensores, i.e., é usada a informação directa dos sensores para alimentar a cadeia de controlo. A dedução da lei de controlo é realizada recorrendo ao método directo de *Lyapunov*, sendo a dinâmica do veículo integrada com recurso à técnica de *backstepping*, descrita de forma sucinta no Anexo B.

## 3.1 *Homing* a 2 dimensões

### 3.1.1 Modelo do veículo

O problema de *homing* a 2 dimensões é desenvolvido para o caso particular de um *hovercraft* sub-actuado que possui, de alguma forma, dinâmica semelhante à dinâmica do plano horizontal de um AUV. Seja  $\{U\}$  um sistema de coordenadas inercial universal e  $\{B\}$  o sistema de coordenadas associado ao veículo autónomo, que se desloca com velocidade linear  $\mathbf{v} = [u, v]'$ , descrita no referencial próprio do veículo, e com velocidade angular  $\omega$ , sendo  $\mathbf{p} = [x, y]'$  a posição da origem do referencial  $\{B\}$  descrita no referencial  $\{U\}$ , coincidente com o centro de massa do veículo, e  $\psi$  a orientação do veículo, também descrita no referencial universal, como se descreve na Figura 3.1.

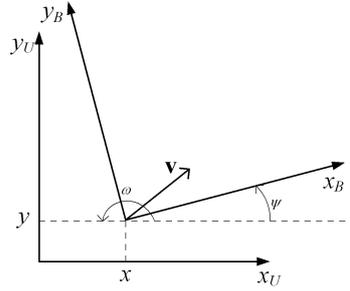


Figura 3.1 - Referencial inercial universal e referencial do barco.

A cinemática do movimento do veículo é dada por

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = {}^U_B \mathbf{R}(\psi) \mathbf{v} \\ \dot{\psi} = \omega \end{cases} \quad (3.1)$$

em que  ${}^U_B \mathbf{R}(\psi) = \mathbf{R}$  é a matriz de rotação do referencial  $\{B\}$  para o referencial  $\{U\}$ ,  ${}^U_B \mathbf{R}(\psi) = {}^U_B \mathbf{R}$ , sendo dada por

$${}^U_B \mathbf{R}(\psi) = {}^U_B \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Pode ainda escrever-se

$${}^U_B \mathbf{R} = ({}^B_U \mathbf{R})' \quad (3.3)$$

e

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \mathbf{S}(\omega) \quad (3.4)$$

em que

$$\mathbf{S}(x) = \begin{bmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

A dinâmica do veículo considera-se dada por

$$\begin{cases} m\dot{u} - mv\omega + d_v u = u_1 \\ m\dot{v} + mu\omega + d_v v = 0 \\ J\dot{\omega} + d_\omega \omega = u_2 \end{cases} \quad (3.6)$$

onde  $m$  é massa do veículo,  $J$  é o momento de inércia,  $d_v$  é o coeficiente de atrito dinâmico de translação e  $d_\omega$  é o coeficiente de atrito dinâmico de rotação.

Na forma compacta, (3.6) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{S}(\omega)\mathbf{M}\mathbf{v} - \mathbf{D}_v\mathbf{v} + \mathbf{g}u_1 \\ J\dot{\omega} = -d_\omega\omega + u_2 \end{cases} \quad (3.7)$$

em que  $\mathbf{M} = \text{diag}\{m, m\}$ ,  $\mathbf{D}_v = \text{diag}\{d_v, d_v\}$  e  $\mathbf{g} = [1, 0]'$ .

### 3.1.2 Modelo do Sensor USBL

Neste capítulo pretende-se desenvolver um sistema de controlo para *homing* baseado na informação directa de um sensor USBL, pelo que é essencial caracterizar este sensor. Sejam então  $\mathbf{r}_i = [x_i, y_i]' \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  as posições de  $N$  receptores acústicos do sistema de recepção USBL. Na fase de *homing* o veículo encontra-se a uma distância considerável do emissor acústico, muito superior à distância entre qualquer par de receptores de um sistema USBL. Logo, e tal como já foi visto no Capítulo 2, é válida a aproximação planar. Considere-se então uma onda paralela, que é recebida pelo receptor  $i$  no instante de tempo  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , e que se desloca com vector normal (que indica a direcção de propagação da onda)  $\mathbf{d} = [d_x, d_y]'$ , unitário e com sentido oposto ao sentido de propagação da onda, como se ilustra na Figura 3.2.

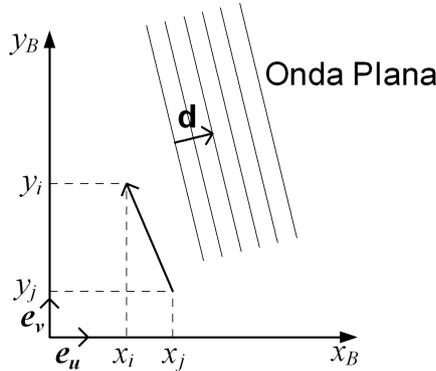


Figura 3.2 - Onda plana incidente no sistema USBL.

Designando por  $V_p$  a velocidade de propagação da onda acústica no meio, que se assume homogéneo, e desprezando a velocidade do veículo autónomo, o que é uma aproximação razoável visto que  $\|\mathbf{v}\| \ll V_p$ , tem-se então

$$V_p(t_i - t_j) = -[d_x(x_i - x_j) + d_y(y_i - y_j)] \quad (3.8)$$

Sejam  $\Delta_1 = t_1 - t_2$ ,  $\Delta_2 = t_1 - t_3$ ,  $\dots$ ,  $\Delta_M = t_{N-1} - t_N$  todas as combinações possíveis de diferenças de atrasos entre dois receptores e definam-se os vectores

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_x = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} - x_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_y = \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1 - y_3 \\ \vdots \\ y_{N-1} - y_N \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Defina-se ainda a matriz  $\mathbf{H}_R \in \mathbb{R}^{M \times 2}$

$$\mathbf{H}_R = [\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y] \quad (3.10)$$

Então, escrevendo (3.8) para todas as combinações de diferenças de atrasos possíveis, tem-se

$$\mathbf{\Delta} = -\frac{1}{V_p} \mathbf{H}_R \mathbf{d} \quad (3.11)$$

Sendo  $\mathbf{d} = \mathbf{R}'^U \mathbf{d}$ , em que  ${}^U \mathbf{d}$  é a direcção de propagação da onda descrita no referencial  $\{\mathbf{U}\}$ , e considerando a aproximação planar, que permite escrever  ${}^U \dot{\mathbf{d}} = 0$ , pode derivar-se a dinâmica de  $\mathbf{\Delta}$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{\Delta}} &= -\frac{1}{V_p} \mathbf{H}_R \dot{\mathbf{d}} = -\frac{1}{V_p} \mathbf{H}_R \frac{d}{dt} (\mathbf{R}'^U \mathbf{d}) = -\frac{1}{V_p} \mathbf{H}_R \dot{\mathbf{R}}'^U \mathbf{d} \\ &= -\frac{1}{V_p} \mathbf{H}_R (\dot{\mathbf{R}}')'^U \mathbf{d} = -\frac{1}{V_p} \mathbf{H}_R [\mathbf{R}\mathbf{S}(\omega)]'^U \mathbf{d} = -\frac{1}{V_p} \mathbf{H}_R \mathbf{S}'(\omega) \mathbf{R}'^U \mathbf{d} \\ &= \frac{1}{V_p} \mathbf{H}_R \mathbf{S}(\omega) \mathbf{d} \end{aligned} \quad (3.12)$$

De forma a expressar a dinâmica de  $\mathbf{\Delta}$  directamente em função dessa variável, considere-se a matriz  $\mathbf{H}_Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\mathbf{H}_Q = \frac{1}{V_p} \mathbf{H}'_R \mathbf{H}_R \quad (3.13)$$

que se admite não singular. Importa salientar que, para que tal se verifique, basta que  $\mathbf{H}_R$  tenha característica máxima, isto é, característica dois, o que acontece desde que existam dois receptores linearmente independentes. Então,

$$\mathbf{d} = -\mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \mathbf{\Delta} \quad (3.14)$$

sendo  $\mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R$  a pseudo-inversa de  $\mathbf{H}_R$ .

Substituindo (3.14) em (3.12) tem-se a dinâmica das diferenças de atrasos dada por

$$\dot{\mathbf{\Delta}} = -\frac{1}{V_p} \mathbf{H}_R \mathbf{S}(\omega) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \mathbf{\Delta} \quad (3.15)$$

### 3.1.3 Lei de Controlo

Quando o emissor se encontra na direcção do veículo tem-se  $\Delta = -\frac{1}{V_p}\mathbf{r}_x$ . Defina-se então a variável de erro

$$\mathbf{z}_1 = \Delta + \frac{1}{V_p}\mathbf{r}_x \quad (3.16)$$

Anular a variável de erro  $\mathbf{z}_1$  não é condição suficiente para que o veículo se aproxime da base, uma vez que apenas se garante o alinhamento do referencial do veículo com a direcção desejada. No entanto, se o veículo se deslocar com velocidade  $\mathbf{v} = [V_d, 0]'$ , em que  $V_d$  é a velocidade desejada de aproximação do veículo à base, estão garantidas condições suficientes para que o veículo se dirija para a base. Para tal, defina-se uma segunda variável de erro

$$z_2 = [1, 0]\mathbf{v} - V_d \quad (3.17)$$

De facto, anular  $\mathbf{z}_1$  e  $z_2$  não garante velocidade lateral do veículo  $v$  nula pelo que não se garante que o veículo se aproxime da base. No entanto, mostra-se que o controlo proposto origina que a velocidade lateral  $v$  convirja exponencialmente para zero, completando assim as condições desejadas para a fase de *homing*.

Considere-se então a função de *Lyapunov*

$$V_1 = \frac{1}{2}\mathbf{z}'_1\mathbf{H}_L\mathbf{z}_1 + \frac{1}{2}z_2^2 \quad (3.18)$$

em que

$$\mathbf{H}_L = (\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R)' (\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R) \quad (3.19)$$

Derivando (3.18) em ordem ao tempo tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \mathbf{z}'_1\mathbf{H}_L\dot{\mathbf{z}}_1 + z_2\dot{z}_2 = \\ &= \mathbf{z}'_1\mathbf{H}_L\dot{\Delta} + z_2[1, 0]\dot{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Substituindo (3.15), (3.16) e (3.19) em (3.20), e tendo em conta a dinâmica de  $\mathbf{v}$  na forma compacta (3.7), pode reescrever-se (3.20)

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\frac{1}{V_p} \left( \Delta + \frac{1}{V_p}\mathbf{r}_x \right)' (\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R)' (\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R) \mathbf{H}_R\mathbf{S}(\omega)\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R\Delta + \\ &\quad + z_2[1, 0]\mathbf{M}^{-1}[-\mathbf{S}(\omega)\mathbf{M}\mathbf{v} - \mathbf{D}_v\mathbf{v} + \mathbf{g}u_1] \end{aligned} \quad (3.21)$$

Substituindo (3.13) em (3.21) e simplificando-se tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= - \left( \Delta' + \frac{1}{V_p}\mathbf{r}'_x \right) (\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R)' \mathbf{S}(\omega)\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R\Delta + \\ &\quad + z_2[1, 0] (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{g}u_1 - \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{S}(\omega)\mathbf{M}\mathbf{v} + \mathbf{D}_v\mathbf{v}]) \\ &= -\Delta' (\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R)' \mathbf{S}(\omega)\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R\Delta - \frac{1}{V_p}\mathbf{r}'_x (\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R)' \mathbf{S}(\omega)\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R\Delta + \\ &\quad + z_2[1, 0] (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{g}u_1 - \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{S}(\omega)\mathbf{M}\mathbf{v} + \mathbf{D}_v\mathbf{v}]) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Sendo  $\mathbf{S}(\omega)$  uma matriz anti-simétrica, pode simplificar-se (3.22)

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= -\frac{1}{V_p} \mathbf{r}'_x (\mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R)' \mathbf{S}(\omega) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta + \\
&\quad + z_2 [1, 0] (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{g} u_1 - \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{S}(\omega) \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{D}_v \mathbf{v}]) \\
&= -\left[ -\mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \left( -\frac{1}{V_p} \mathbf{r}_x \right) \right]' \mathbf{S}(\omega) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta + \\
&\quad + z_2 ([1, 0] \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g} u_1 - [1, 0] \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{S}(\omega) \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{D}_v \mathbf{v}])
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Recordando (3.14), e tendo em conta que a  $\mathbf{d} = [1, 0]'$  corresponde  $\Delta = -\frac{1}{V_p} \mathbf{r}_x$ , pode reescrever-se (3.23), tendo-se finalmente

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= -\omega [1, 0] \mathbf{S}(1) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta + \\
&\quad + z_2 ([1, 0] \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g} u_1 - [1, 0] \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{S}(\omega) \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{D}_v \mathbf{v}])
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Fazendo

$$u_1 = \frac{1}{[1, 0] \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g}} ([1, 0] \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{S}(\omega) \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{D}_v \mathbf{v}] - k_2 z_2) \tag{3.25}$$

e igualando  $\omega$  a  $\omega_d$ , com

$$\omega_d = k_1 [1, 0] \mathbf{S}(1) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta \tag{3.26}$$

com  $k_1, k_2 > 0$ , torna-se  $\dot{V}_1$  negativa semi-definida. Mostra-se no entanto que o ponto de estacionariedade não coincidente com a origem  $(\mathbf{z}_1, z_2) = (\mathbf{0}, 0)$  é um ponto de equilíbrio instável.

Como  $\omega$  não é uma variável de controlo, e seguindo a técnica construtiva de *backstepping*, introduza-se uma terceira variável de erro

$$z_3 = \omega - \omega_d \tag{3.27}$$

e defina-se a função de *Lyapunov* aumentada

$$V_2 = \frac{1}{2} \mathbf{z}'_1 \mathbf{H}_L \mathbf{z}_1 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} z_3^2 \tag{3.28}$$

Derivando (3.28) em ordem ao tempo, e tendo em conta (3.25), (3.26) e (3.27), pode escrever-se

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &= -k_1 ([1, 0] \mathbf{S}(1) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta)^2 - k_2 z_2^2 + \\
&\quad - z_3 [1, 0] \mathbf{S}(1) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta + z_3 \dot{z}_3 \\
&= -k_1 ([1, 0] \mathbf{S}(1) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta)^2 - k_2 z_2^2 + \\
&\quad + z_3 (\dot{\omega} - \dot{\omega}_d - [1, 0] \mathbf{S}(1) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Considerando a dinâmica de  $\omega$  (3.6), pode reescrever-se (3.29)

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= -k_1 ([1, 0]\mathbf{S}(1)\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R\Delta)^2 - k_2 z_2^2 + \\ &+ z_3 \left( \frac{1}{J} (-d_\omega \omega + u_2) - \dot{\omega}_d - [1, 0]\mathbf{S}(1)\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R\Delta \right)\end{aligned}\quad (3.30)$$

Fazendo

$$u_2 = d_\omega \omega + J (\dot{\omega}_d + [1, 0]\mathbf{S}(1)\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R\Delta - k_3 z_3) \quad (3.31)$$

com  $k_3 > 0$ , torna-se  $\dot{V}_2$  negativa semi-definida, com  $\dot{\omega}_d$  dado por

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_d &= k_1 [1, 0]\mathbf{S}(1)\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R\dot{\Delta} \\ &= -\frac{k_1}{V_p} [1, 0]\mathbf{S}(1)\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R\mathbf{H}_R\mathbf{S}(\omega)\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R\Delta \\ &= -k_1 [1, 0]\mathbf{S}(1)\mathbf{S}(\omega)\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R\Delta \\ &= k_1 \omega [1, 0]\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R\Delta\end{aligned}\quad (3.32)$$

### 3.1.4 Análise de Convergência

A função de *Lyapunov* (3.28) é, por construção, positiva definida para valores factíveis de  $\mathbf{z}_1$ . De facto, expandindo (3.18) tem-se

$$\begin{aligned}V_2 &= \frac{1}{2} \left( \Delta + \frac{1}{V_p} \mathbf{r}_x \right)' (\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R)' (\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R) \left( \Delta + \frac{1}{V_p} \mathbf{r}_x \right) + \frac{1}{2} z_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R\Delta + \mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R \left( \frac{1}{V_p} \mathbf{r}_x \right) \right]' \left[ -\mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R\Delta + \mathbf{H}_Q^{-1}\mathbf{H}'_R \left( \frac{1}{V_p} \mathbf{r}_x \right) \right] + \frac{1}{2} z_2^2 \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{d} - [1, 0])' (\mathbf{d} - [1, 0]) + \frac{1}{2} z_2^2 > 0 \quad \forall_{d \neq [1, 0]' \wedge z_2 \neq 0 \Leftrightarrow z_1 \neq 0 \wedge z_2 \neq 0}\end{aligned}\quad (3.33)$$

Por outro lado, a lei de controlo dada por (3.25) e (3.31) torna, por construção,  $\dot{V}_2$  negativa semi-definida. Importa portanto começar por estabelecer que o ponto de estacionariedade não coincidente com a origem em que  $\dot{V}_2$  se anula, correspondente à situação em que o emissor se encontra na direcção oposta à do veículo, à qual corresponde  $\Delta = \frac{1}{V_p} \mathbf{r}_x$ , é um ponto de equilíbrio instável para o controlo definido. Como o problema apenas se verifica na variável de erro  $\mathbf{z}_1$ , considera-se para a prova da instabilidade desse ponto apenas esta variável. Tal verifica-se facilmente definindo a variável de erro

$$\mathbf{z}_i = \Delta - \frac{1}{V_p} \mathbf{r}_x \quad (3.34)$$

e a função de *Lyapunov*

$$V_i = \frac{1}{2} \mathbf{z}_i' \mathbf{H}_L \mathbf{z}_i \quad (3.35)$$

A função de *Lyapunov* (3.35) é positiva definida para valores factíveis de  $\mathbf{z}_i$  e, derivando em ordem ao tempo tem-se, após alguns cálculos algébricos imediatos,

$$\dot{V}_i = \omega [1, 0] \mathbf{S}(1) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta \quad (3.36)$$

Substituindo em (3.37)  $\omega$  por (3.26), verifica-se

$$\dot{V}_i = k_1 ([1, 0] \mathbf{S}(1) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta)^2 \geq 0 \quad (3.37)$$

anulando-se apenas quando  $\mathbf{d} = [1, 0]'$  ou  $\mathbf{d} = [-1, 0]'$ . Logo,  $\dot{V}_i$  é positiva definida numa vizinhança da origem pelo que o ponto de estacionariedade correspondente à situação em que o emissor se encontra na direcção oposta à do veículo é um ponto de equilíbrio instável para o controlo proposto.

Sendo o ponto de estacionariedade não coincidente com a origem um ponto de equilíbrio instável, tem-se que as variáveis de erro  $z_1$  e  $z_2$  convergem global e assintoticamente para zero, com algum abuso de linguagem. De facto apenas se tem convergência quase global (*almost global*), visto que existe um ponto no espaço de erro que é um ponto de equilíbrio, ainda que instável. Para completar a análise de convergência resta provar que a velocidade lateral do veículo  $v$  tende também para zero. Tomando o limite da velocidade angular  $\omega$  tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3) \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})} \omega &= \lim_{(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3) \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})} \omega_d \\ &= \lim_{(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3) \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})} k_1 [1, 0] \mathbf{S}(1) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta \\ &= k_1 [1, 0] \mathbf{S}(1) [-1, 0]' = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Reescrevendo a dinâmica da velocidade lateral  $v$

$$\dot{v} = -u\omega - \frac{d_v}{m}v \quad (3.39)$$

e tomando o limite tem-se

$$\lim_{(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3) \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})} \dot{v} = -\frac{d_v}{m}v \quad (3.40)$$

pelo que  $v$  converge, no limite, exponencialmente para zero. Conclui-se assim que a lei de controlo proposta é adequada à fase de *homing* de um veículo autónomo sub-actuado com dinâmica semelhante à do plano horizontal de um AUV que se desloca num ambiente a duas dimensões.

### 3.1.5 Simulações

Para ilustrar o comportamento do controlador durante a fase de *homing* considera-se o modelo do *hovercraft* experimental MVWT [15], que se apresenta na Figura 3.3. O veículo tem massa  $m = 5.15$  Kg, momento de inércia  $J = 0.050$  Kg m<sup>2</sup>, coeficiente de atrito dinâmico de translação  $d_v = 5.5$  Kg/s e coeficiente de atrito dinâmico de rotação  $d_\omega = 0.084$  Kg m<sup>2</sup>/s. Supõe-se que o veículo está equipado com um sistema USBL constituído por 7 receptores, dispostos segundo a configuração 1 apresentada na Figura 2.9. Considera-se ainda que o veículo inicia a fase de *homing* com velocidade inicial nula, estando o emissor localizado na posição  ${}^U\mathbf{e} = [500, 500]'$  [m]. Para velocidade desejada considere-se  $V_d = 2$  m/s.



Figura 3.3 - *Hovercraft Kelly II - Caltech Multi-Vehicle Wireless Testbed.*

Os parâmetros de controlo  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  permitem escolher a velocidade de convergência desejada: Valores muito elevados destes parâmetros levam a uma convergência muito rápida, ainda que à custa de regimes oscilatórios muito abruptos, não possíveis na prática. Assim, escolheram-se valores para estes parâmetros que permitissem obter boa convergência mas com trajectória e actuações suaves. Fez-se então  $k_1 = 0.0025$ ,  $k_2 = 0.1$  e  $k_3 = 5$ . Os resultados apresentados são obtidos em ambiente de simulação *MATLAB*. Na Figura 3.4 apresentam-se diversas trajectórias descritas pelo veículo durante a fase de *homing*, partindo de diversas posições e orientações iniciais. Como se pode observar, o veículo descreve trajectórias suaves, dirigindo-se em direcção à base. A zona mais próxima do emissor corresponde à zona de *docking*, em que deixa de ser válida a aproximação à onda plana, pelo que o sistema não é simulado nessa zona. Nas Figuras 3.5 e 3.6 apresentam-se a evolução da velocidade do veículo e dos controlos nele aplicados, respectivamente, para o caso em que o veículo parte da posição  $[0, 500]'$  no referencial universal. Verifica-se que a velocidade tende para 2m/s, tal como desejado, anulando-se ainda a velocidade lateral. Observa-se também que o comando aplicado é suave.

## 3.2 *Homing* a 3 dimensões

O problema de *homing* a três dimensões é em tudo semelhante ao problema de *homing* a duas dimensões apresentado na secção anterior, com a diferença de se ter agora mais um grau de liberdade no espaço de erro cartesiano clássico, compensado pela existência de mais uma variável de controlo. Assim, a dedução da lei de controlo e a análise de convergência são apresentados no Anexo C. Na Secção 3.2.1 apresenta-se um modelo simplificado de um veículo autónomo submarino, sendo os resultados obtidos em ambiente de simulação apresentados na Secção 3.2.2.

### 3.2.1 Modelo do veículo

Seja  $\{U\}$  um sistema de coordenadas inercial universal solidário com a Terra <sup>1</sup> e  $\{B\}$  um sistema de coordenadas associado ao veículo autónomo submarino, tal como se ilustra na Figura 3.7.

---

<sup>1</sup>O sistema de coordenadas  $\{U\}$  não é de facto um sistema de coordenadas inercial uma vez que a Terra tem movimento de rotação e sofre acelerações. No entanto, para as velocidades e escalas de tempo consideradas pode considerar-se a Terra um sistema de coordenadas inercial.

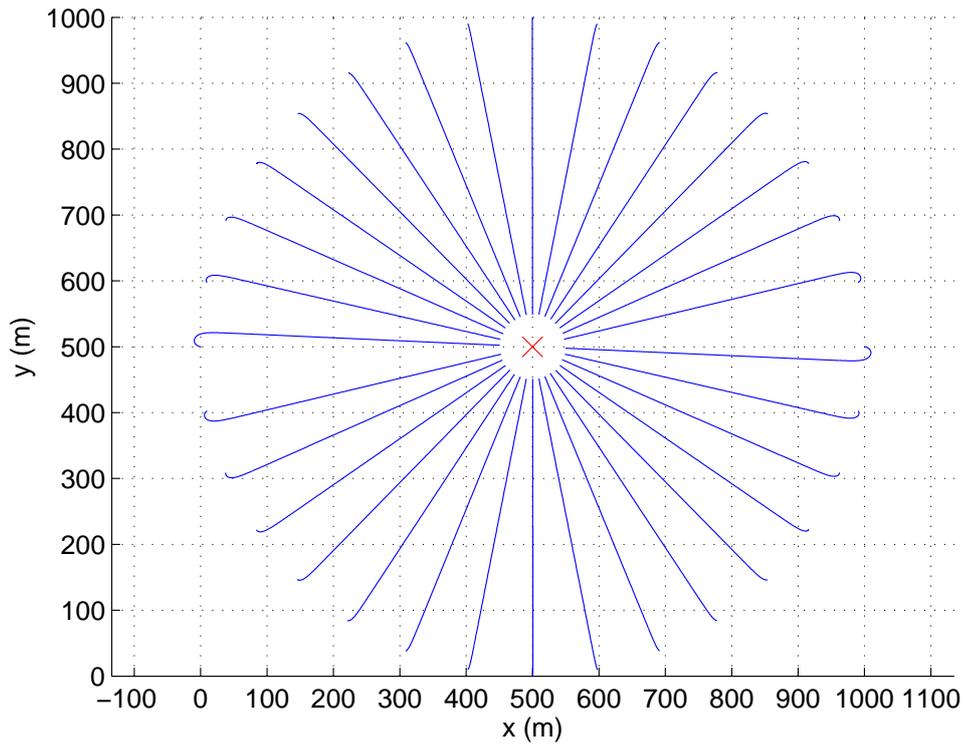


Figura 3.4 - Trajetórias descritas pelo veículo durante a fase de *homing*.

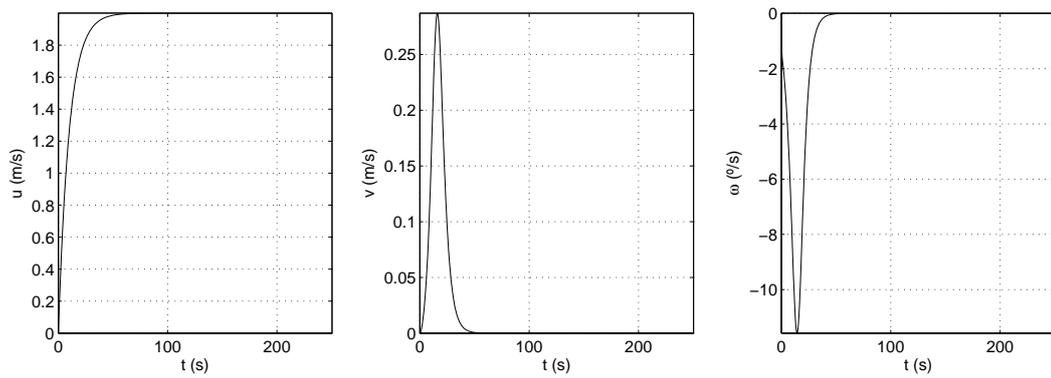


Figura 3.5 - Velocidade do veículo durante a aproximação inicial.

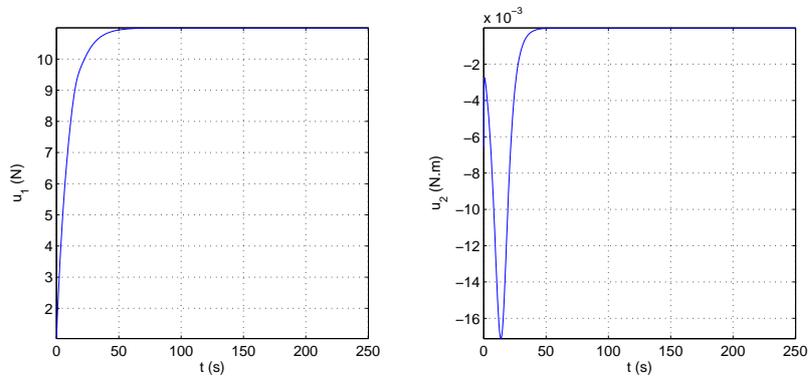


Figura 3.6 - Comando aplicado ao veículo durante a aproximação inicial.

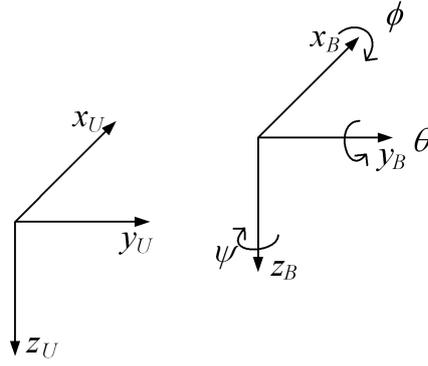


Figura 3.7 - Referencial universal e referencial associado ao AUV.

Considere-se ainda  $\mathbf{p} = [x, y, z]'$  como sendo a posição da origem de  $\{B\}$ , coincidente com o centro de massa do veículo, descrita no referencial  $\{U\}$ ,  $\mathbf{v} = [u, v, w]'$  a velocidade do veículo descrita no referencial próprio do veículo,  $\boldsymbol{\omega} = [p, q, r]'$  a velocidade angular do veículo, também descrita no referencial do veículo e  $\boldsymbol{\lambda} = [\phi, \theta, \psi]'$  o vector dos ângulos de Euler *roll*, *pitch* e *yaw*, sendo  ${}^U_B\mathbf{R}(\boldsymbol{\lambda})$  a matriz de rotação do referencial  $\{B\}$  para o referencial  $\{U\}$ , dada por

$$\mathbf{R} = {}^U_B\mathbf{R}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

em que  $c_x = \cos(x)$  e  $s_x = \sin(x)$ .

A cinemática do movimento do veículo é descrita por

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = {}^U_B\mathbf{R}(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{v} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\omega} \end{cases} \quad (3.42)$$

onde

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\phi) \tan(\theta) & \cos(\phi) \tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)} & \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Pode ainda escrever-se

$${}^U_B\mathbf{R} = ({}^B_U\mathbf{R})' \quad (3.44)$$

e

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \quad (3.45)$$

em que  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  é matriz anti-simétrica

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Relativamente à dinâmica do AUV, considera-se uma dinâmica simplificada dada, na forma compacta, por

$$\begin{cases} \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{M}\mathbf{v} - \mathbf{D}_v(\mathbf{v})\mathbf{v} - \mathbf{g}_1(\mathbf{R}) + \mathbf{b}_1 u_1 \\ \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\mathbf{S}(\mathbf{v})\mathbf{M}\mathbf{v} - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{D}_\omega(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} - \mathbf{g}_2(\mathbf{R}) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_2 \end{cases} \quad (3.47)$$

onde

- $\mathbf{M} = \text{diag}\{m_{11}, m_{22}, m_{33}\}$  é a matriz de massas,
- $\mathbf{J} = \text{diag}\{J_{11}, J_{22}, J_{33}\}$  é a matriz de momentos de inércia,
- $u_1 = \tau_1$  representa a actuação segundo o eixo  $x_V$ ,
- $\mathbf{u}_2 = [\tau_q, \tau_r]$  representa as actuações (binários) que afectam a rotação do veículo em torno dos eixos  $y_V$  e  $z_V$ ,
- $\mathbf{D}_v(\mathbf{v}) = \text{diag}\{X_u + X_{|u|u}|u|, Y_v + Y_{|v|v}|v|, Z_w + Z_{|w|w}|w|\}$  representa os coeficientes de atrito dinâmico translação,
- $\mathbf{D}_\omega(\boldsymbol{\omega}) = \text{diag}\{K_p + K_{|p|p}|p|, M_q + M_{|q|q}|q|, N_r + N_{|r|r}|r|\}$  representa os coeficientes de atrito dinâmico de rotação,
- $\mathbf{b}_1 = [1, 0, 0]'$ ,
- $\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,
- $\mathbf{g}_1(\mathbf{R}) = \mathbf{R}'[0, 0, W - B]'$  representa o efeito da força gravítica e da força de impulsão
- $\mathbf{g}_2(\mathbf{R}) = \mathbf{S}(\mathbf{r}_B)\mathbf{R}'[0, 0, B]'$  corresponde ao efeito do deslocamento do centro de impulsão em relação ao centro de massa do veículo.

As forças gravítica e de impulsão são dadas por  $W = mg$  e  $B = \rho g \nabla$ , onde  $m$  é a massa do veículo,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\rho$  é a densidade da água e  $\nabla$  corresponde ao volume de água deslocado. Assume-se ainda a hipótese de flutuabilidade neutra, ou seja  $W = B$ .

### 3.2.2 Simulações

A existência de mais um grau de liberdade no espaço de erro origina um aumento do número de dimensões dos parâmetros do controlador. Assim, e de acordo com o controlo deduzido no Anexo C, tem-se, para o problema de aproximação inicial a uma estação base a 3 dimensões 3 parâmetros de controlo: Uma matriz  $\mathbf{K}_1 = \text{diag}\{0, k_{12}, k_{13}\}$ ,  $k_{12} > 0$ ,  $k_{13} > 0$ , que afecta a velocidade de convergência da variável de erro  $\mathbf{z}_1$ , um escalar  $k_2 > 0$ , que afecta a velocidade de convergência da variável de erro  $z_2$  e uma matriz  $\mathbf{K}_3 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , positiva definida, que afecta a velocidade de convergência da variável de erro  $\mathbf{z}_3$ . Tal como acontece a 2 dimensões, a valores muito elevados dos parâmetros de controlo correspondem velocidades de convergência elevadas, à custa no entanto de regimes oscilatórios e de controlos muito exigentes.



Figura 3.8 - Veículo submarino autónomo sub-actuado INFANTE.

Para se proceder a simulações considera-se um modelo simplificado do submarino autónomo sub-actuado INFANTE [16], que se apresenta na Figura 3.8, admitindo-se que este é directamente actuado em força e em binário.

Para parâmetros de controlo escolheram-se valores que originam actuações suaves, mantendo ainda assim elevada taxa de convergência. Fez-se então  $\mathbf{K}_1 = \text{diag}\{0, 0.0001, 0.0001\}$ ,  $k_2 = 0.025$  e  $\mathbf{K}_3 = \text{diag}\{30, 30\}$ . Considera-se o veículo inicialmente na posição  $[0, 0, 50]'$ , com orientação  $[\phi, \theta, \psi]' = [0, 0, -145\pi/180]'$ . O emissor encontra-se na posição  ${}^U\mathbf{e} = [500, 500, 10]'$  m. Na Figura 3.9 apresenta-se a trajectória descrita pelo veículo no espaço a 3 dimensões, enquanto que nas Figuras 3.10 e 3.11 se apresentam as projecções da trajectória descrita pelo veículo nos planos XY e XZ, respectivamente.

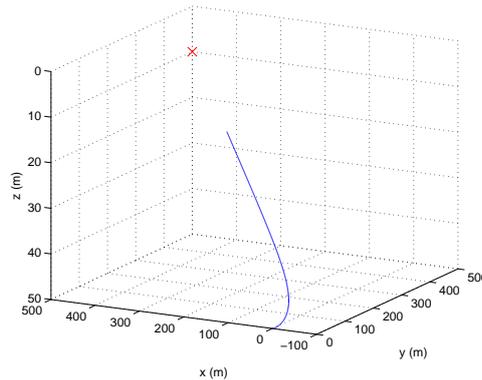


Figura 3.9 - Trajectória descrita pelo veículo durante a aproximação inicial à base.

Como se pode observar, o veículo descreve uma trajectória suave, dirigindo-se em direcção à base.

Na Figura 3.12 apresenta-se a evolução da velocidade do veículo. Observa-se que a velocidade segundo  $x_V$  tende para 2 m/s, tal como pretendido, anulando-se as velocidades laterais. As velocidades angulares do veículo apresentam valores plausíveis para o veículo em causa.

Na Figura 3.13 apresenta-se a evolução do comando aplicado no veículo que, como se pode observar, é suave. O facto do centro de impulsão não coincidir com o centro de massa do veículo origina neste caso que o binário  $\tau_q$  não se anule, para compensar o binário exercido pela força de impulsão.

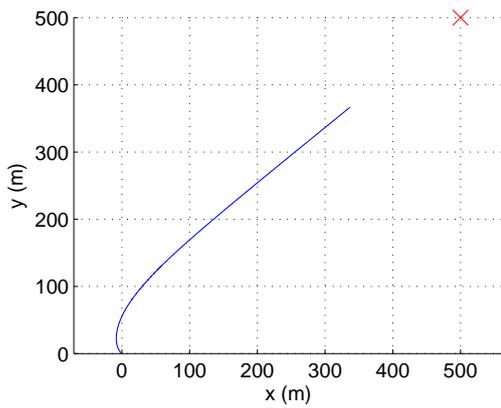


Figura 3.10 - Trajetória descrita pelo veículo no plano XY durante a aproximação inicial à base.

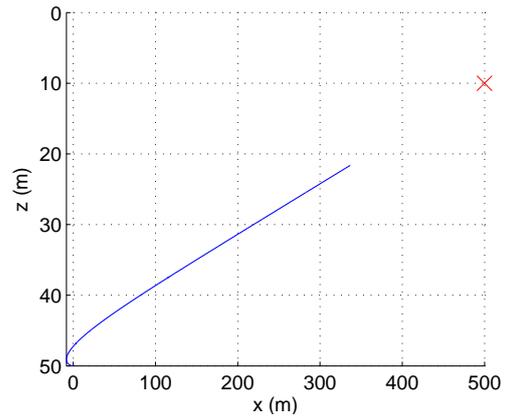


Figura 3.11 - Trajetória descrita pelo veículo no plano XZ durante a aproximação inicial à base.

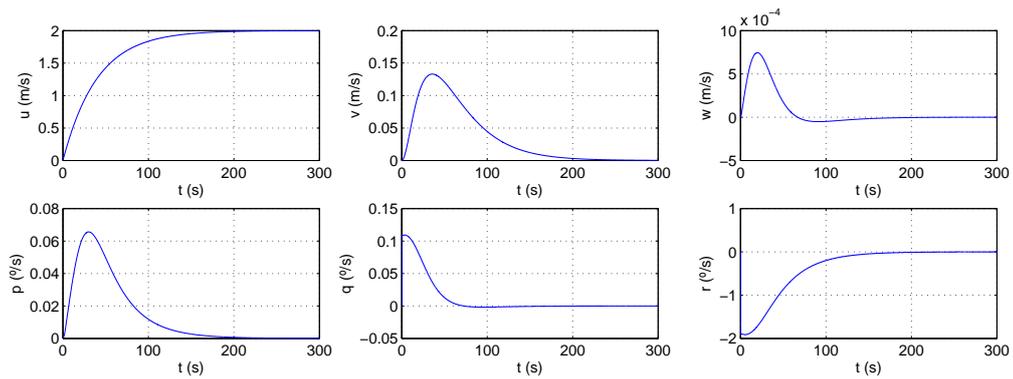


Figura 3.12 - Velocidade do veículo durante a aproximação inicial.

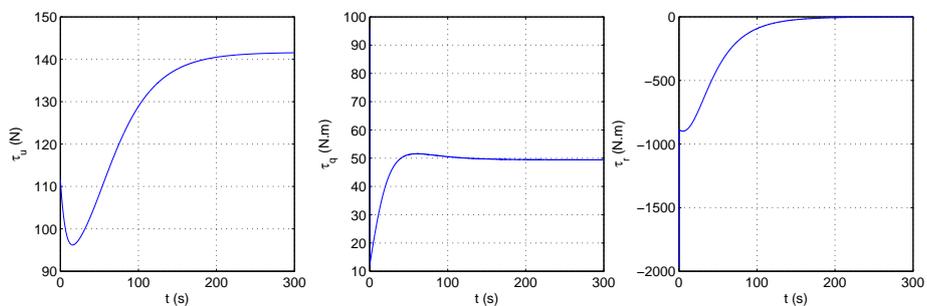


Figura 3.13 - Comando aplicado ao veículo durante a aproximação inicial.

# Capítulo 4

## Manobra de atracar - *Docking*

A fase final de acostagem de um veículo a uma base ou estação de apoio consiste na fase de *docking* (na literatura anglo-saxónica), em que se pretende que o veículo se dirija para uma determinada posição da base com uma determinada orientação e velocidade. A velocidade terminal pretendida poderia ser nula, tratando-se então de um problema de estabilização da posição e orientação de um veículo sub-actuado. Trata-se de um problema de simples formulação mas de resolução complexa, tendo sido demonstrado por *Brockett* [17] que não existe nenhuma lei de controlo suave e invariante no tempo que permita a estabilização de um veículo sub-actuado. Existem no entanto diversas soluções para o referido problema: Em [18] é proposta uma lei de controlo contínua e invariante no tempo que estabiliza assintótica e exponencialmente a posição do veículo para um conjunto de equilíbrio. Em [19] é proposta uma lei de controlo descontínua que permite a convergência exponencial para o ponto de equilíbrio, sob certas condições iniciais, de um navio sub-actuado. Em [20], [21] são propostas leis de controlo variantes no tempo para a estabilização de um navio sub-actuado, alcançando-se estabilidade semi-global exponencial no primeiro caso e estabilidade global assintótica uniforme no segundo caso. Realça-se no entanto que em todas as soluções referidas o problema é colocado num espaço de erro que não o espaço próprio dos sensores. Neste capítulo aborda-se o problema de *docking* em que se pretende ter uma velocidade terminal não nula, situação essa em que não se verificam as hipóteses do teorema de *Brockett*. Note-se que esta restrição não é de facto relevante pois em geral para veículos do tipo considerado no presente trabalho acostar significa entrar num dispositivo próprio, com velocidade e atitude especificadas. Por outro lado o problema é posto directamente no espaço dos sensores. Na Secção 4.1 é formulado o problema, sendo a solução desenvolvida e analisada nas secções 4.2 e 4.3 para os casos a duas e a três dimensões, respectivamente.

### 4.1 Formulação do Problema

#### 4.1.1 Problema de *Docking* a 2 dimensões

Como já foi referido pretende-se, na fase de *docking*, que o veículo se dirija para uma determinada posição na base como uma determinada orientação (em relação à base) e velocidade. O problema poderia certamente ser descrito da forma tradicional, considerando um espaço de erro descrito num referencial inercial, ignorando o conjunto de sensores que

dotam o veículo da capacidade de se orientar de forma autónoma. No entanto, pretende-se aqui explorar uma solução baseada directamente nos sensores disponíveis. No Capítulo 2 são explorados alguns aspectos de um sensor do tipo USBL, que funciona como um receptor de sinais acústicos emitidos por um ou mais emissores, podendo fornecer uma estimativa do tempo de propagação entre cada receptor do sensor USBL e cada emissor. Assim, considera-se que o veículo é dotado de um sistema deste tipo, estando disponíveis os tempos entre cada receptor e um ou mais emissores.

No Capítulo 3, em que se abordou o problema de *homing*, mostrou-se que nessa fase é suficiente a existência de um emissor. O mesmo não se passa na fase de *docking*, uma vez que se pretende que o veículo se dirija não só para uma determinada posição com uma determinada velocidade mas também segundo uma dada direcção, não sendo um emissor suficiente para a definição das condições desejadas. Considere-se então a Figura 4.1, em que se representam dois emissores e o referencial associado ao veículo.

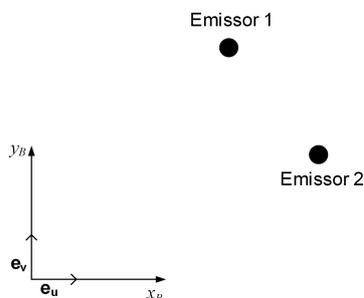


Figura 4.1 - Estrutura de emissores necessários para a aproximação final (a 2 dimensões).

Com base neste cenário existem diversas formas de definir o objectivo. No entanto algumas alternativas fazem mais sentido do ponto de vista físico, considerando o necessário suporte físico dos emissores e a necessidade da existência de um espaço, para lá da posição objectivo, onde o veículo possa parar. Considera-se assim que se pretende que o veículo se desloque para a posição intermédia entre os dois emissores, segundo uma direcção ortogonal à direcção da recta definida pelos dois emissores, tal como exemplificado na Figura 4.2. O sentido é tal que o emissor 1 tem coordenada  $y$  positiva no referencial do veículo e o emissor 2 tem coordenada  $y$  negativa, também no referencial do veículo.

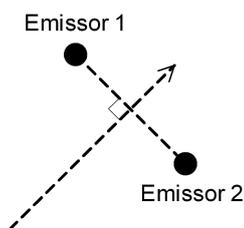


Figura 4.2 - Objectivo durante a aproximação final (a 2 dimensões).

### 4.1.2 Problema de *Docking* a 3 dimensões

O problema de *docking* a 3 dimensões é semelhante ao problema a duas dimensões, com a diferença da necessidade da existência de um terceiro emissor acústico, essencial para definir a direcção desejada. De facto, se se considerar o mesmo problema apenas com 2 emissores, apenas se consegue definir um plano. No entanto, e apenas por uma questão de simplificação, considera-se a existência de 4 emissores, dispostos no mesmo plano e em rectas ortogonais, como se ilustra na Figura 4.3.

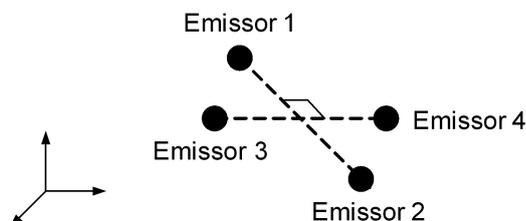


Figura 4.3 - Estrutura de emissores necessários para a aproximação final.

O objectivo do sistema de controlo surge naturalmente da extrapolação da situação a 2 dimensões, pretendendo-se agora que o veículo se dirija para a posição intermédia entre os emissores 1 e 2, que coincide, por construção, com a posição intermédia entre os emissores 3 e 4, com velocidade ortogonal ao plano definido pelos 4 emissores, tal como se ilustra na Figura 4.4.

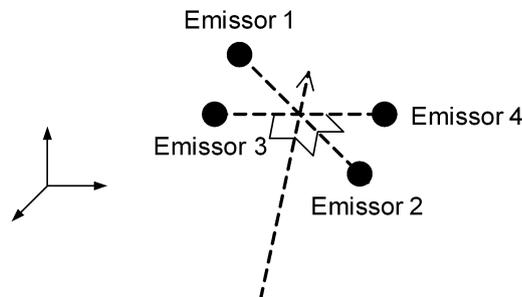


Figura 4.4 - Objectivo durante a aproximação final.

O sentido da velocidade desejada coincide com o sentido do vector resultante do produto externo de  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$  com  $\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$ , ou seja  $(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \times (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)$ , em que  $\mathbf{e}_i$  representa a posição do emissor  $i$  descrita no referencial associado ao veículo.

## 4.2 *Docking* a 2 dimensões

O problema de *docking* a 2 dimensões é desenvolvido, tal como o problema de *homing* a 2 dimensões, para um *hovercraft* que se desloca a 2 dimensões, com dinâmica semelhante à dinâmica do plano horizontal de um AUV. O modelo seguido é o mesmo, tendo sido descrito na Secção 3.1.1.

### 4.2.1 Modelo dos Emissores

Considerem-se dois emissores fixos (no referencial inercial do mundo  $\{U\}$ ) descritos por  ${}^U\mathbf{e}_1$  e  ${}^U\mathbf{e}_2$  no referencial  $\{U\}$ . Sejam  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  as posições dos dois emissores descritas no referencial do veículo  $\{B\}$ . Então,

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{R}' ({}^U\mathbf{e}_i - \mathbf{p}), \quad i = 1, 2 \quad (4.1)$$

Derivando (4.1) em ordem ao tempo tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_i &= \dot{\mathbf{R}}' ({}^U\mathbf{e}_i - \mathbf{p}) + \mathbf{R}' ({}^U\dot{\mathbf{e}}_i - \dot{\mathbf{p}}) = \left(\dot{\mathbf{R}}\right)' ({}^U\mathbf{e}_i - \mathbf{p}) - \mathbf{R}'\dot{\mathbf{p}} \\ &= [\mathbf{RS}(\omega)]' ({}^U\mathbf{e}_i - \mathbf{p}) - \mathbf{R}'\mathbf{R}\mathbf{v} = -\mathbf{v} + \mathbf{S}'(\omega)\mathbf{R}' ({}^U\mathbf{e}_i - \mathbf{p}) \\ &= -\mathbf{v} - \mathbf{S}(\omega)\mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Defina-se ainda a constante  $Y$  como metade da distância entre os dois emissores, que será utilizada na dedução da lei de controlo

$$Y = \frac{\|\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\|}{2} \quad (4.3)$$

### 4.2.2 Modelo dos Receptores

Considerem-se  $N$  receptores instalados no veículo, constituintes do sistema de recepção acústica USBL, com posições  $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , descritas no referencial do veículo. Supõem-se ainda que existe  $\mathbf{k}_r = [k_{r1}, k_{r2}, \dots, k_{rN}]' \in \mathbb{R}^N$  tal que

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N k_{ri}\mathbf{r}_i = 0 \\ \sum_{i=1}^N k_{ri} = 1 \end{cases} \quad (4.4)$$

O sistema de recepção USBL pode então estimar os tempos de propagação de uma onda acústica entre cada receptor e cada emissor. Assumindo constante a velocidade de propagação da onda acústica, estão directamente disponíveis a partir de sistema USBL as distâncias entre cada receptor e cada emissor. Sejam então  $d_{i,1}^2$  e  $d_{i,2}^2$  os quadrados das distâncias entre os emissores 1 e 2, respectivamente, e o receptor  $i$ ,

$$\begin{cases} d_{i,1}^2 = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{r}_i)' (\mathbf{e}_1 - \mathbf{r}_i) = \mathbf{e}_1'\mathbf{e}_1 + \mathbf{r}_i'\mathbf{r}_i - 2\mathbf{e}_1'\mathbf{r}_i \\ d_{i,2}^2 = (\mathbf{e}_2 - \mathbf{r}_i)' (\mathbf{e}_2 - \mathbf{r}_i) = \mathbf{e}_2'\mathbf{e}_2 + \mathbf{r}_i'\mathbf{r}_i - 2\mathbf{e}_2'\mathbf{r}_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.5)$$

Sejam ainda  $\Delta_i$  a diferença entre os quadrados das distâncias entre o receptor  $i$  e cada um dos emissores,

$$\Delta_i = d_{i,1}^2 - d_{i,2}^2 = \mathbf{e}_1'\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2'\mathbf{e}_2 - 2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)'\mathbf{r}_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.6)$$

### 4.2.3 Espaço de Erro

Considere-se um vector  $\mathbf{k}_r$  que satisfaz (4.4). Define-se a variável de erro  $e$  como

$$e = \sum_{i=1}^N k_{ri}\Delta_i \quad (4.7)$$

Substituindo (4.6) em (4.7) e tendo em conta a hipótese (4.4) conclui-se que

$$\begin{aligned}
e &= \sum_{i=1}^N k_{ri} [\mathbf{e}_1' \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2' \mathbf{e}_2 - 2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \mathbf{r}_i] \\
&= (\mathbf{e}_1' \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2' \mathbf{e}_2) \sum_{i=1}^N k_{ri} - 2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \sum_{i=1}^N k_{ri} \mathbf{r}_i \\
&= \mathbf{e}_1' \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2' \mathbf{e}_2
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Derivando (4.8) em ordem ao tempo e tendo em conta (4.2) tem-se

$$\begin{aligned}
\dot{e} &= 2(\mathbf{e}_1' \dot{\mathbf{e}}_1 - \mathbf{e}_2' \dot{\mathbf{e}}_2) = 2(\mathbf{e}_1' [-\mathbf{v} - \mathbf{S}(\omega) \mathbf{e}_1] - \mathbf{e}_2' [-\mathbf{v} - \mathbf{S}(\omega) \mathbf{e}_2]) \\
&= -2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \mathbf{v} - 2\mathbf{e}_1' \mathbf{S}(\omega) \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2' \mathbf{S}(\omega) \mathbf{e}_2
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Como  $\mathbf{S}(\omega)$  é uma matriz anti-simétrica, e portanto  $\mathbf{x}' \mathbf{S}(\omega) \mathbf{x} = 0$ ,  $\forall \mathbf{x}$ , pode simplificar-se (4.9), tendo-se finalmente

$$\dot{e} = -2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \mathbf{v} \tag{4.10}$$

*Nota:* Embora anular a variável de erro  $e$  não seja condição suficiente para garantir o alinhamento exigido na fase de *docking*, mostra-se que o controlo proposto baseado nesta variável de erro leva efectivamente à convergência da velocidade e atitude do veículo para a velocidade e atitude desejadas.

#### 4.2.4 Lei de Controlo

Considere-se a função de *Lyapunov*

$$V_1 = \frac{1}{2} e^2 \tag{4.11}$$

Derivando (4.11) em ordem ao tempo tem-se

$$\dot{V}_1 = e \dot{e} = -2e (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \mathbf{v} \tag{4.12}$$

A velocidade  $\mathbf{v}$  pode ser interpretada como uma entrada virtual que se pode usar para tornar  $\dot{V}_1$  negativa definida. Tal pode ser conseguido igualando, por exemplo,  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{v}_d$ , com

$$\mathbf{v}_d = \frac{V_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2}} \left[ \frac{1}{4Y} k_e e \mathbf{I} - \mathbf{S}(1) \right] \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} \tag{4.13}$$

em que  $k_e$  é uma constante positiva e  $V_d$  é o valor do módulo da velocidade a que se pretende que o veículo se desloque durante a aproximação final à base. Analisando (4.13) verifica-se que a velocidade desejada é composta por duas componentes perpendiculares: Uma componente, perpendicular à direcção da velocidade final que se anula com o erro  $e$ ; Outra componente, paralela à velocidade final que se pretende, tende, em módulo, para  $V_d$ , à medida que o erro  $e$  tende para zero. Esta componente é fundamental para a resolução do problema tal como este foi posto, uma vez que permite que a velocidade final do veículo não seja nula.

Na ausência de velocidade lateral do veículo, igualar  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{v}_d$  corresponde a fazer  $\mathbf{v}_d = [V_d, 0]'$ , com  $u = V_d$ . Em [22] é apresentada uma estratégia em que se define o erro de orientação  $\alpha$  do veículo como o ângulo entre a velocidade segundo  $\mathbf{e}_u$  e o vector  $\mathbf{v}_d$ , como se ilustra na Figura 4.5. De facto, anular o erro de orientação  $\alpha$  não garante convergência de  $\mathbf{v}$  para  $\mathbf{v}_d$ . No entanto, com base nessa estratégia os autores provam então ser possível, por escolha apropriada dos parâmetros de controlo, levar à convergência da velocidade lateral do veículo para zero, pelo que  $\mathbf{v}$  converge efectivamente para  $\mathbf{v}_d$ .

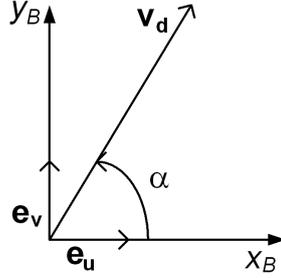


Figura 4.5 - Erro de orientação  $\alpha$ .

A definição de uma variável de erro angular traz no entanto algumas dificuldades no que diz respeito à generalização do problema para o caso 3D. Definam-se então as variáveis de erro

$$\begin{cases} z_1 = [1, 0]\mathbf{v} - V_d \\ \mathbf{z}_2 = \mathbf{v}_d - V_d[1, 0]' \end{cases} \quad (4.14)$$

em que se recorre, ao invés do erro de orientação angular, a um erro de orientação definido de forma vectorial.

Derivando (4.14) em ordem ao tempo tem-se

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = [1, 0]\dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{z}}_2 = \dot{\mathbf{v}}_d \end{cases} \quad (4.15)$$

onde a dinâmica da velocidade desejada é dada por (demonstração na secção em anexo D.1)

$$\dot{\mathbf{v}}_d = - \left[ \omega + \frac{k_e}{4Y} \frac{2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)'\mathbf{v}}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \right] \mathbf{S}(1)\mathbf{v}_d \quad (4.16)$$

Defina-se então a função de *Lyapunov*

$$V_2 = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}\mathbf{z}_2'\mathbf{z}_2 \quad (4.17)$$

Derivando (4.17) em ordem ao tempo obtém-se

$$\dot{V}_2 = z_1\dot{z}_1 + \mathbf{z}_2'\dot{\mathbf{z}}_2 \quad (4.18)$$

Substituindo (4.15) em (4.18), sendo as dinâmicas de  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}_d$  dadas por (3.7) e (4.16), respectivamente, pode reescrever-se (4.18) como

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= z_1 [1, 0] \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{z}'_2 \dot{\mathbf{v}}_d \\ &= z_1 [1, 0] \mathbf{M}^{-1} [-\mathbf{S}(\omega)\mathbf{M}\mathbf{v} - \mathbf{D}_v\mathbf{v} + \mathbf{g}u_1] + \\ &\quad - \left[ \omega + \frac{k_e}{4Y} \frac{2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \mathbf{v}}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \right] \mathbf{z}'_2 \mathbf{S}(1)\mathbf{v}_d\end{aligned}\quad (4.19)$$

Expandindo (4.19) e tendo em conta que  $\mathbf{S}(1)$  é anti-simétrica, pode reescrever-se

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= z_1 [1, 0] \mathbf{M}^{-1} [-\mathbf{S}(\omega)\mathbf{M}\mathbf{v} - \mathbf{D}_v\mathbf{v} + \mathbf{g}u_1] + \\ &\quad - \left[ \omega + \frac{k_e}{4Y} \frac{2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \mathbf{v}}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \right] (\mathbf{v}'_d - V_d[1, 0]) \mathbf{S}(1)\mathbf{v}_d \\ &= z_1 [1, 0] \mathbf{M}^{-1} [-\mathbf{S}(\omega)\mathbf{M}\mathbf{v} - \mathbf{D}_v\mathbf{v} + \mathbf{g}u_1] + \\ &\quad + V_d \left[ \omega + \frac{k_e}{4Y} \frac{2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \mathbf{v}}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \right] [1, 0] \mathbf{S}(1)\mathbf{v}_d \\ &= z_1 [1, 0] \mathbf{M}^{-1} [-\mathbf{S}(\omega)\mathbf{M}\mathbf{v} - \mathbf{D}_v\mathbf{v} + \mathbf{g}u_1] + \\ &\quad - V_d \left[ \omega + \frac{k_e}{4Y} \frac{2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \mathbf{v}}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \right] [0, 1] \mathbf{v}_d\end{aligned}\quad (4.20)$$

Fazendo

$$u_1 = \frac{1}{[1, 0] \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g}} \left( [1, 0] \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{S}(\omega)\mathbf{M}\mathbf{v} + \mathbf{D}_v\mathbf{v}] - k_1 z_1 \right) \quad (4.21)$$

e igualando  $\omega$  a  $\omega_d$ , sendo

$$\omega_d = -\frac{k_e}{4Y} \frac{2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \mathbf{v}}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} + k_2 [0, 1] \mathbf{v}_d \quad (4.22)$$

com  $k_1, k_2 > 0$ , torna-se  $\dot{V}_2$  negativa semi-definida. Mostra-se no entanto que o ponto de estacionariedade não coincidente com a origem  $(z_1, \mathbf{z}_2) = (0, \mathbf{0})$  é um ponto de equilíbrio instável

Como  $\omega$  não é uma entrada de controlo real, e seguindo a técnica de *backstepping*, introduza-se a variável de erro

$$z_3 = \omega - \omega_d \quad (4.23)$$

e defina-se a função de *Lyapunov* aumentada

$$V_3 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} \mathbf{z}'_2 \mathbf{z}_2 + \frac{1}{2} z_3^2 \quad (4.24)$$

Derivando (4.24) em ordem ao tempo e substituindo  $u_1$ ,  $\omega_d$  e  $\omega$  por (4.21), (4.22) e (4.23), respectivamente, tem-se

$$\begin{aligned}\dot{V}_3 &= -k_1 z_1^2 - k_2 V_d ([0, 1] \mathbf{v}_d)^2 - z_3 V_d [0, 1] \mathbf{v}_d + z_3 \dot{z}_3 \\ &= -k_1 z_1^2 - k_2 V_d ([0, 1] \mathbf{v}_d)^2 + z_3 (\dot{\omega} - \dot{\omega}_d - V_d [0, 1] \mathbf{v}_d) \\ &= -k_1 z_1^2 - k_2 V_d ([0, 1] \mathbf{v}_d)^2 + z_3 \left( \frac{1}{J} [-d_\omega \omega + u_2] - \dot{\omega}_d - V_d [0, 1] \mathbf{v}_d \right)\end{aligned}\quad (4.25)$$

Fazendo

$$u_2 = d_\omega \omega + J (\dot{\omega}_d + V_d [0, 1] \mathbf{v}_d - k_3 z_3) \quad (4.26)$$

com  $k_3 > 0$ , torna-se  $\dot{V}_3$  negativa semi-definida, sendo a dinâmica de  $\omega_d$  dada por

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_d &= -\frac{k_e (\dot{\mathbf{e}}_1 - \dot{\mathbf{e}}_2)' \mathbf{v} + (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \dot{\mathbf{v}}}{2Y \left[ 1 + \left( \frac{k_e}{4Y} \right)^2 e^2 \right]} + \frac{k_e (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \mathbf{v} \left( \frac{k_e}{4Y} \right)^2 e \dot{e}}{Y \left[ 1 + \left( \frac{k_e}{4Y} \right)^2 e^2 \right]^2} + k_2 [0, 1] \dot{\mathbf{v}}_d \\ &= -\frac{k_e [-\mathbf{S}(\omega) (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)]' \mathbf{v} + (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \dot{\mathbf{v}}}{2Y \left[ 1 + \left( \frac{k_e}{4Y} \right)^2 e^2 \right]} - 2 \frac{k_e \left( \frac{k_e}{4Y} \right)^2 \left[ \frac{(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \mathbf{v}}{1 + \left( \frac{k_e}{4Y} \right)^2 e^2} \right]^2}{Y} e + \\ &\quad + k_2 [0, 1] \dot{\mathbf{v}}_d \\ &= -\frac{k_e (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \mathbf{S}(\omega) \mathbf{v} + (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \dot{\mathbf{v}}}{2Y \left[ 1 + \left( \frac{k_e}{4Y} \right)^2 e^2 \right]} - 8 \left( \frac{k_e}{4Y} \right)^3 \left[ \frac{(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \mathbf{v}}{1 + \left( \frac{k_e}{4Y} \right)^2 e^2} \right]^2 e + \\ &\quad + k_2 [0, 1] \dot{\mathbf{v}}_d\end{aligned}\quad (4.27)$$

## 4.2.5 Análise de Convergência

A função de *Lyapunov* aumentada  $V_3$  é, por construção, uma função positiva definida, contínua e coerciva, tornando o controlo definido por (4.21) e (4.26)  $\dot{V}_3$  negativa semi-definida. Importa portanto começar por estabelecer que o ponto de estacionariedade não coincidente com a origem, correspondente à situação em que  $\mathbf{v}_d = -[V_d, 0]'$ , é um ponto de equilíbrio instável. Como o problema apenas se põe na variável de erro  $\mathbf{z}_2$ , considera-se para a prova de instabilidade apenas esta variável. Defina-se então a variável de erro

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{v}_d - [-V_d, 0]' \quad (4.28)$$

e a função de *Lyapunov*

$$V_i = \frac{1}{2} \mathbf{z}_i' \mathbf{z}_i \quad (4.29)$$

A função de *Lyapunov* (4.29) é positiva definida e derivando em ordem ao tempo tem-se, após alguns cálculos algébricos imediatos,

$$\begin{aligned}\dot{V}_i &= \mathbf{z}_i' \dot{\mathbf{z}}_i \\ &= - \left[ \omega + \frac{k_e}{4Y} \frac{2 (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \mathbf{v}}{1 + \left( \frac{k_e}{4Y} \right)^2 e^2} \right] (\mathbf{v}'_d - [-V_d, 0]) \mathbf{S}(1) \mathbf{v}_d \\ &= V_d \left[ \omega + \frac{k_e}{4Y} \frac{2 (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \mathbf{v}}{1 + \left( \frac{k_e}{4Y} \right)^2 e^2} \right] [0, 1] \mathbf{v}_d\end{aligned}\quad (4.30)$$

Substituindo em (4.31)  $\omega$  por (4.22) verifica-se

$$\dot{V}_i = k_2 V_d ([0, 1] \mathbf{v}_d)^2 \quad (4.31)$$

pelo que  $\dot{V}_i$  é positiva definida numa vizinhança da origem  $\mathbf{z}_i = [0, 0]'$ . Logo o ponto de estacionariedade de  $V_3$  não coincidente com a origem é um ponto de equilíbrio instável para o controlo proposto.

Sendo o ponto de estacionariedade não coincidente com a origem um ponto de equilíbrio instável tem-se portanto estabilidade quase global assintótica do ponto de equilíbrio  $(z_1, z_2, z_3) = (0, \mathbf{0}, 0)$ . No entanto, e como já foi referido, tal não é suficiente para garantir, em geral, a adequação do controlo proposto à fase de aproximação final do veículo à estação base. Também não se garante que o erro  $e$  converge para zero, visto que não se garante o alinhamento da velocidade do veículo com a velocidade desejada mas sim o alinhamento da velocidade do veículo segundo  $\mathbf{e}_u$  e a velocidade desejada.

Para provar que o erro  $e$  converge para zero basta no entanto provar que a velocidade lateral do veículo  $v$  também converge para zero com o controlo proposto, visto que nessa situação a velocidade do veículo coincide com a velocidade do veículo segundo  $\mathbf{e}_u$ . Para tal, considere-se a Figura 4.6, em que se decompõe o erro de orientação  $\alpha$  na soma de dois ângulos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (4.32)$$

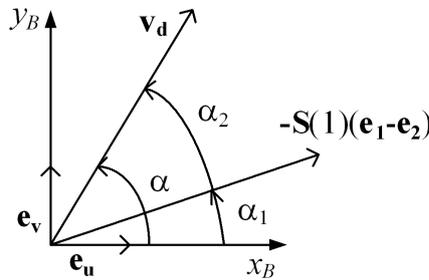


Figura 4.6 - Decomposição do erro de orientação  $\alpha$ .

De forma a provar que  $v$  converge para zero analisa-se a estabilidade do sistema linear variante no tempo

$$\lim_{(z_1, z_2, z_3) \rightarrow (0, 0, 0)} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\alpha}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}(t) \begin{bmatrix} v \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

A derivada em ordem ao tempo de  $\alpha_1$  é dada por (demonstração em anexo na Secção D.2)

$$\dot{\alpha}_1 = -\omega \quad (4.34)$$

A dinâmica da velocidade lateral  $v$  do veículo pode ser escrita na forma

$$\dot{v} = -u\omega - \frac{d_v}{m}v \quad (4.35)$$

Tomando o limite de (4.35)

$$\begin{aligned} \lim_{(z_1, z_2, z_3) \rightarrow (0,0,0)} \dot{v} &= -V_d \lim_{(z_1, z_2, z_3) \rightarrow (0,0,0)} \omega - \frac{d_v}{m}v \\ &= -V_d \lim_{(z_1, z_2, z_3) \rightarrow (0,0,0)} \omega_d - \frac{d_v}{m}v \\ &= -V_d \lim_{(z_1, z_2, z_3) \rightarrow (0,0,0)} \left( -\frac{k_e}{4Y} \frac{2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \mathbf{v}}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} + k_2[0, 1]\mathbf{v}_d \right) - \frac{d_v}{m}v \\ &= \frac{k_e V_d^2}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \frac{[1 \ 0](\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{2Y} + \\ &\quad + \left[ \frac{k_e V_d}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \frac{[0 \ 1](\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{2Y} - \frac{d_v}{m} \right] v \end{aligned} \quad (4.36)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} [1 \ 0]' \cdot \left[ -\frac{\mathbf{S}(1)(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{2Y} \right] = \cos(\alpha_1) \\ [0 \ 1]' \cdot \left[ -\frac{\mathbf{S}(1)(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{2Y} \right] = \sin(\alpha_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{[1 \ 0]\mathbf{S}(1)(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{2Y} = \cos(\alpha_1) \\ -\frac{[0 \ 1]\mathbf{S}(1)(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{2Y} = \sin(\alpha_1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \cos(\alpha_1) = \frac{[0 \ 1](\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{2Y} \\ \sin(\alpha_1) = -\frac{[1 \ 0](\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{2Y} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Substituindo (4.37) em (4.36) pode então reescrever-se

$$\begin{aligned} \lim_{(z_1, z_2, z_3) \rightarrow (0,0,0)} \dot{v} &= -\frac{k_e V_d^2}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \sin(\alpha_1) + \\ &\quad + \left[ \frac{k_e V_d}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \cos(\alpha_1) - \frac{d_v}{m} \right] v \end{aligned} \quad (4.38)$$

Tomando o limite de (4.34) tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{(z_1, z_2, z_3) \rightarrow (0,0,0)} \dot{\alpha}_1 &= - \lim_{(z_1, z_2, z_3) \rightarrow (0,0,0)} \dot{\omega}_d \\ &= \frac{k_e V_d}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \frac{[1 \ 0](\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{2Y} + \\ &\quad + \frac{k_e}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \frac{[0 \ 1](\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{2Y} v \end{aligned} \quad (4.39)$$

De novo, substituindo (4.37) em (4.39) pode reescrever-se

$$\lim_{(z_1, z_2, z_3) \rightarrow (0, 0, 0)} \dot{\alpha}_1 = -\frac{k_e V_d}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \sin(\alpha_1) + \frac{k_e}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \cos(\alpha_1) v \quad (4.40)$$

A matriz  $\mathbf{A}(t)$  pode então ser escrita na forma

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

com

$$\begin{cases} a_{11}(t) = \frac{k_e V_d}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \cos(\alpha_1) - \frac{d_v}{m} \\ a_{12}(t) = -\frac{k_e V_d^2}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \frac{\sin(\alpha_1)}{\alpha_1} \\ a_{21}(t) = \frac{k_e}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \cos(\alpha_1) \\ a_{22}(t) = -\frac{k_e V_d}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \frac{\sin(\alpha_1)}{\alpha_1} \end{cases} \quad (4.42)$$

O sistema linear variante no tempo (4.33) é assintoticamente estável se os valores próprios da matriz

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} [\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}'(t)] \quad (4.43)$$

que são todos reais, são menores que uma constante estritamente negativa para todo o tempo [9].

O polinómio característico de  $\mathcal{E}$  é dado por

$$p(\lambda) = \lambda^2 + p_1 \lambda + p_0 \quad (4.44)$$

com

$$\begin{aligned} p_0 &= a_{11} a_{22} - \frac{1}{4} (a_{12} + a_{21})^2 \\ &= -\frac{k_e V_d}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \frac{\sin(\alpha_1)}{\alpha_1} \left[ \frac{k_e V_d}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \cos(\alpha_1) - \frac{d_v}{m} \right] + \\ &\quad -\frac{1}{4} \left( \frac{k_e}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \right)^2 \left[ V_d^2 \frac{\sin(\alpha_1)}{\alpha_1} - \cos(\alpha_1) \right]^2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

e

$$p_1 = -a_{11} - a_{22} = \frac{k_e V_d}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \left( -\cos(\alpha_1) + \frac{\sin(\alpha_1)}{\alpha_1} \right) + \frac{d_v}{m} \quad (4.46)$$

Os valores próprios de  $\mathcal{E}$  são dados por

$$\lambda = \frac{-p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_0}}{2} \quad (4.47)$$

pelo que se garante que o sistema (4.33) é assintoticamente estável se se verificar

$$\begin{cases} p_1 \geq \epsilon, & \epsilon > 0 \\ p_0 > 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

O domínio de  $\alpha_1$  é agora necessário para que se possam determinar condições de convergência. Quando  $\mathbf{z}_2$  se anula, o erro de orientação  $\alpha$  também se anula pelo que no limite, quando as variáveis de erro convergem para a origem, o domínio de  $\alpha_1$  é idêntico ao de  $\alpha_2$ . Considere-se então o produto interno

$$\mathbf{v}_d \cdot \left[ -\mathbf{S}(1) \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} \right] = V_d \cos(\alpha_2) \quad (4.49)$$

Substituindo (4.13) em (4.49) tem-se

$$\begin{aligned} & \left( \frac{V_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2}} \left[ \frac{1}{4Y} k_e e \mathbf{I} - \mathbf{S}(1) \right] \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} \right) \cdot \left[ -\mathbf{S}(1) \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} \right] = V_d \cos(\alpha_2) \\ \Leftrightarrow \cos(\alpha_2) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2}} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Observando (4.50) pode constatar-se imediatamente que

$$\alpha_2 \in ]-\pi/2, \pi/2[ \quad (4.51)$$

pelo que, no limite

$$\alpha_1 \in ]-\pi/2, \pi/2[ \quad (4.52)$$

Assim,

$$0 \leq \cos(\alpha_1) \leq 1 \quad (4.53)$$

e

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin(\alpha_1)}{\alpha_1} \leq 1 \quad (4.54)$$

Por outro lado, tem-se ainda que

$$0 < \frac{k_e V_d}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \leq k_e V_d \quad (4.55)$$

Relativamente a  $p_1$  pode então escrever-se

$$p_1 \geq -\frac{k_e V_d}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \cos(\alpha_1) + \frac{d_v}{m} \geq -k_e V_d + \frac{d_v}{m} \quad (4.56)$$

pelo que, para que a condição em  $p_1$  se verifique, basta que

$$\frac{d_v}{m} > k_e V_d \quad (4.57)$$

A condição em  $p_0$  pode escrever-se na forma

$$\begin{aligned}
& -\frac{k_e V_d}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \frac{\sin(\alpha_1)}{\alpha_1} \left[ \frac{k_e V_d}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \cos(\alpha_1) - \frac{d_v}{m} \right] > \\
& > \frac{1}{4} \left( \frac{k_e}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \right)^2 \left[ V_d^2 \frac{\sin(\alpha_1)}{\alpha_1} - \cos(\alpha_1) \right]^2 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow V_d \frac{\sin(\alpha_1)}{\alpha_1} \left[ -\frac{k_e V_d}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \cos(\alpha_1) + \frac{d_v}{m} \right] > \\
& > \frac{1}{4} \frac{k_e}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \left[ V_d^2 \frac{\sin(\alpha_1)}{\alpha_1} - \cos(\alpha_1) \right]^2 \tag{4.58}
\end{aligned}$$

De novo, usando as desigualdades (4.53), (4.54) e (4.55) pode escrever-se

$$V_d \frac{\sin(\alpha_1)}{\alpha_1} \left[ -\frac{k_e V_d}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \cos(\alpha_1) + \frac{d_v}{m} \right] \geq V_d \frac{2}{\pi} \left( \frac{d_v}{m} - k_e V_d \right) \tag{4.59}$$

e

$$\frac{1}{4} \frac{k_e}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \left[ V_d^2 \frac{\sin(\alpha_1)}{\alpha_1} - \cos(\alpha_1) \right]^2 \leq \frac{k_e}{4} \max \left\{ (1 - V_d^2)^2, \left( \frac{2}{\pi} V_d^2 \right)^2 \right\} \tag{4.60}$$

Assim, desde que

$$\begin{aligned}
& V_d \frac{2}{\pi} \left( \frac{d_v}{m} - k_e V_d \right) > \frac{k_e}{4} \max \left\{ (1 - V_d^2)^2, \left( \frac{2}{\pi} V_d^2 \right)^2 \right\} \\
& \Leftrightarrow \frac{d_v}{m} > k_e \left( V_d + \frac{\pi}{8V_d} \max \left\{ (1 - V_d^2)^2, \left( \frac{2}{\pi} V_d^2 \right)^2 \right\} \right) \tag{4.61}
\end{aligned}$$

verifica-se a condição em  $p_0$ . Comparando as condições resultantes (4.57) e (4.61) constata-se que de facto basta que se verifique (4.61) para que os valores próprios de  $\mathcal{E}$  sejam estritamente negativos para todo o tempo, garantindo que o sistema (4.33) é assintoticamente estável.

A condição (4.61) é uma condição suficiente que garante que a velocidade lateral  $v$  do veículo converge assintoticamente para zero, pelo que, no limite, a velocidade do veículo  $\mathbf{v}$  converge para a velocidade desejada  $\mathbf{v}_d$ , o que garante que o erro  $e$  converge global e assintoticamente para zero. Por outro lado, também  $\alpha_1$  converge para zero o que garante o alinhamento desejado durante a aproximação final do veículo à base. Prova-se portanto que, por escolha apropriada de parâmetros do controlador, nomeadamente por escolha apropriada de  $k_e$ , a lei de controlo proposta é adequada à fase de *docking*, sendo garantida convergência quase global assintótica nestas condições.

*Nota:* A condição usada para garantir a estabilidade assintótica do sistema (4.33) é apenas uma condição suficiente pelo que podem eventualmente existir valores de  $k_e$  que não satisfazem (4.61) mas que ainda assim garantem a estabilidade quase global assintótica do sistema.

## 4.2.6 Simulações

Para ilustrar o comportamento do controlador considera-se o mesmo modelo do veículo utilizado para a avaliação do desempenho do controlador desenvolvido para a fase de *homing* (a 2 dimensões). Considera-se ainda o veículo com velocidade inicial de 2 m/s, sem velocidade lateral. Os emissores estão localizados nas posições  ${}^U\mathbf{e}_1 = [50, 2]'$  m  ${}^U\mathbf{e}_2 = [50, -2]'$  m.

Para velocidade desejada fez-se  $V_d = 1$  m/s. Nestas condições, a condição (4.61) traduz-se em  $k_e < 0.92$ . Os resultados de simulação mostram que se tem convergência para valores superiores a este, o que não contraria os resultados demonstrados visto que a condição referida garante apenas a suficiência, não sendo uma condição necessária. Experimentalmente verifica-se que para  $k_e$  mais elevado a convergência é mais rápida, podendo ter-se um regime oscilatório. Para valores de  $k_e$  muito superiores aos estabelecidos pela condição derivada não se tem convergência. Fez-se assim  $k_e = 0.2$ , com  $k_1 = 0.75$ ,  $k_2 = 0.05$  e  $k_3 = 10$ . Na Figura 4.7 apresentam-se várias trajectórias descritas pelo veículo, partindo de diferentes posições e orientações iniciais..

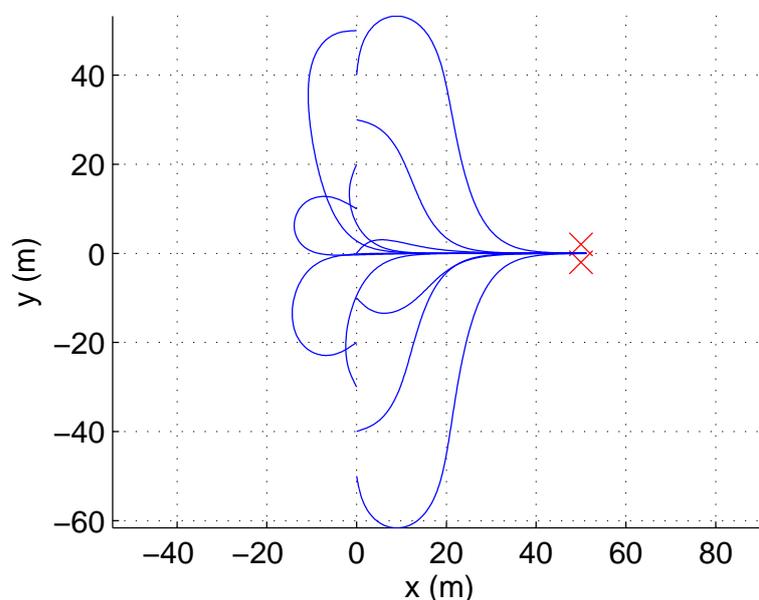


Figura 4.7 - Trajectórias descritas pelo veículo durante a fase de *docking*.

Como se pode observar, o veículo descreve trajectórias bastante suaves, dirigindo-se para a posição desejada segundo o alinhamento pretendido. Repare-se ainda que, mesmo em situações em que o veículo se encontra orientado no sentido oposto ao da base, o controlador permite que o veículo rode a fim de se dirigir para a base, mantendo sempre velocidade  $u$  positiva.

Nas Figuras 4.8 e 4.9 apresentam-se a evolução da velocidade do veículo e do comando nele aplicado, respectivamente, para a situação em que o veículo começa na origem do referencial universal. Como se pode observar, o comando aplicado é também suave.

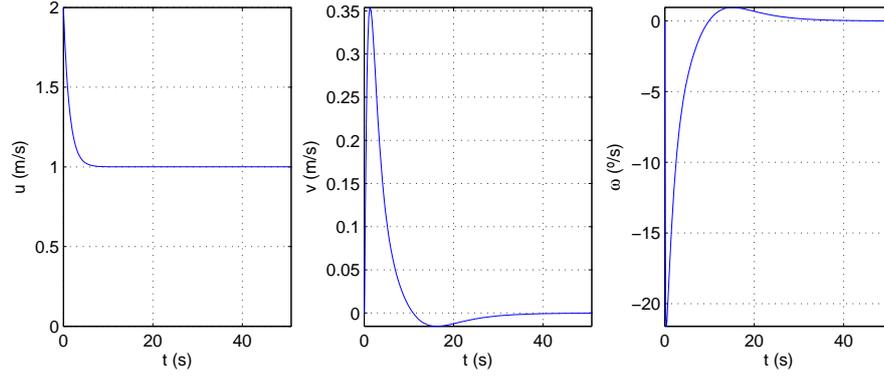


Figura 4.8 - Velocidade do veículo durante a aproximação final.

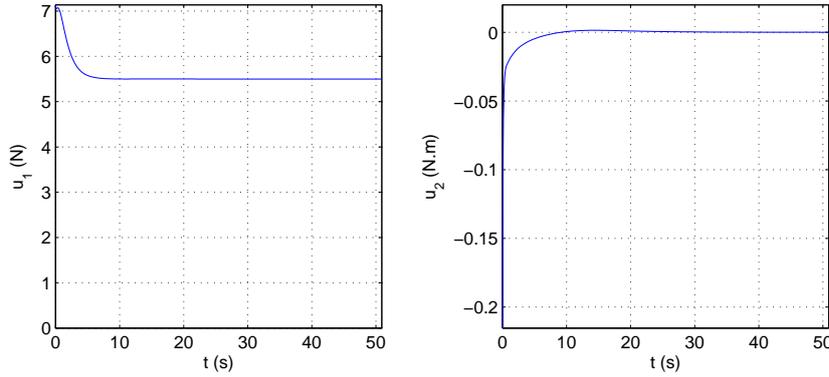


Figura 4.9 - Comando aplicado ao veículo.

### 4.3 Docking a 3 dimensões

O problema de *docking* a duas dimensões é facilmente extrapolável em termos de modelo de receptores, emissores e espaço de erro para o caso 3D, sendo também possível obter uma expressão equivalente a (4.13) para a velocidade desejada. A dedução da lei de controlo segue os mesmos passos do caso 2D, sendo no entanto bastante mais extensa. A prova de estabilidade pode também seguir os mesmos passos da prova a 2D, não sendo no entanto apresentada devido à complexidade e extensão dos respectivos cálculos. Nas secções 4.3.1 e 4.3.2 apresentam-se os modelos dos emissores e receptores, respectivamente. O espaço de erro é apresentado na Secção 4.3.3, sendo a lei de controlo deduzida na Secção 4.3.4. Na Secção 4.3.5 apresentam-se alguns resultados obtidos em ambiente de simulação que evidenciam o correcto funcionamento do controlador proposto.

#### 4.3.1 Modelo dos Emissores

Considerem-se quatro emissores fixos (no referencial inercial do mundo  $\{U\}$ ) descritos por  ${}^U\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  no referencial  $\{U\}$ . Sejam  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  as posições dos emissores descritas no referencial do veículo  $\{B\}$ . Então,

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{R}' ({}^U\mathbf{e}_i - \mathbf{p}), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (4.62)$$

Derivando (4.62) em ordem ao tempo tem-se

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e}}_i &= \dot{\mathbf{R}}' ({}^U \mathbf{e}_i - \mathbf{p}) + \mathbf{R}' ({}^U \dot{\mathbf{e}}_i - \dot{\mathbf{p}}) = \left( \dot{\mathbf{R}} \right)' ({}^U \mathbf{e}_i - \mathbf{p}) - \mathbf{R}' \dot{\mathbf{p}} \\
&= [\mathbf{RS}(\omega)]' ({}^U \mathbf{e}_i - \mathbf{p}) - \mathbf{R}' \mathbf{R} \mathbf{v} = -\mathbf{v} + \mathbf{S}'(\omega) \mathbf{R}' ({}^U \mathbf{e}_i - \mathbf{p}) \\
&= -\mathbf{v} - \mathbf{S}(\omega) \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Defina-se ainda a constante  $Y$  como metade da distância entre os emissores  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ , idêntica por construção a metade da distância entre os emissores  $\mathbf{e}_3$  e  $\mathbf{e}_4$ , que será utilizada na dedução da lei de controle

$$Y = \frac{\|\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\|}{2} = \frac{\|\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4\|}{2} \tag{4.64}$$

### 4.3.2 Modelo dos Receptores

Considerem-se  $N$  receptores instalados no veículo, constituintes do sistema de recepção acústica USBL, com posições  $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , descritas no referencial do veículo. Supõem-se ainda que existe  $\mathbf{k}_r = [k_{r1}, k_{r2}, \dots, k_{rN}]' \in \mathbb{R}^N$  tal que

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N k_{ri} \mathbf{r}_i = 0 \\ \sum_{i=1}^N k_{ri} = 1 \end{cases} \tag{4.65}$$

O sistema de recepção USBL pode então estimar os tempos de propagação de uma onda acústica entre cada receptor e cada emissor. Assumindo constante a velocidade de propagação da onda acústica, estão directamente disponíveis a partir de sistema USBL as distâncias entre cada receptor e cada emissor. Seja  $d_{i,j}^2$  o quadrado da distância entre o emissor  $j$  e o receptor  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ .

$$\begin{cases} d_{i,1}^2 = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{r}_i)' (\mathbf{e}_1 - \mathbf{r}_i) = \mathbf{e}_1' \mathbf{e}_1 + \mathbf{r}_i' \mathbf{r}_i - 2\mathbf{e}_1' \mathbf{r}_i \\ d_{i,2}^2 = (\mathbf{e}_2 - \mathbf{r}_i)' (\mathbf{e}_2 - \mathbf{r}_i) = \mathbf{e}_2' \mathbf{e}_2 + \mathbf{r}_i' \mathbf{r}_i - 2\mathbf{e}_2' \mathbf{r}_i \\ d_{i,3}^2 = (\mathbf{e}_3 - \mathbf{r}_i)' (\mathbf{e}_3 - \mathbf{r}_i) = \mathbf{e}_3' \mathbf{e}_3 + \mathbf{r}_i' \mathbf{r}_i - 2\mathbf{e}_3' \mathbf{r}_i \\ d_{i,4}^2 = (\mathbf{e}_4 - \mathbf{r}_i)' (\mathbf{e}_4 - \mathbf{r}_i) = \mathbf{e}_4' \mathbf{e}_4 + \mathbf{r}_i' \mathbf{r}_i - 2\mathbf{e}_4' \mathbf{r}_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{4.66}$$

### 4.3.3 Espaço de Erro

Considere-se um vector  $\mathbf{k}_r$  que satisfaz (4.65). Definem-se as variáveis de erro  $e_1$  e  $e_2$  como

$$\begin{cases} e_1 = \sum_{i=1}^N k_{ri} (d_{i,1}^2 - d_{i,2}^2) \\ e_2 = \sum_{i=1}^N k_{ri} (d_{i,3}^2 - d_{i,4}^2) \end{cases} \tag{4.67}$$

Substituindo (4.66) em (4.67) e tendo em conta a hipótese (4.65) conclui-se, após cálculos algébricos imediatos, que

$$\begin{cases} e_1 = \mathbf{e}_1' \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2' \mathbf{e}_2 \\ e_2 = \mathbf{e}_3' \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4' \mathbf{e}_4 \end{cases} \tag{4.68}$$

Derivando (4.68) em ordem ao tempo e tendo em conta (4.63) tem-se

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \mathbf{v} - 2\mathbf{e}_1' \mathbf{S}(\omega) \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2' \mathbf{S}(\omega) \mathbf{e}_2 \\ \dot{e}_2 = -2(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)' \mathbf{v} - 2\mathbf{e}_3' \mathbf{S}(\omega) \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_4' \mathbf{S}(\omega) \mathbf{e}_4 \end{cases} \quad (4.69)$$

Como  $\mathbf{S}(\omega)$  é uma matriz anti-simétrica, e portanto  $\mathbf{x}' \mathbf{S}(\omega) \mathbf{x} = 0 \forall \mathbf{x}$ , pode simplificar-se (4.69), tendo-se finalmente

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \mathbf{v} \\ \dot{e}_2 = -2(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)' \mathbf{v} \end{cases} \quad (4.70)$$

*Nota:* Tal como acontece na situação a 2D, anular as variáveis de erro  $e_1$  e  $e_2$  não é condição suficiente para garantir o alinhamento exigido na fase de *docking*. No entanto, e apesar de não se apresentar a prova de estabilidade devido à extensão e complexidade da mesma, as simulações evidenciam que tal como acontece no caso 2D, também no caso 3D o controlo baseado nestas variáveis de erro é apropriado à manobra de atracar o AUV na base.

### 4.3.4 Lei de Controlo

Considere-se a função de *Lyapunov*

$$V_1 = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 \quad (4.71)$$

Derivando (4.71) em ordem ao tempo tem-se

$$\dot{V}_1 = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 = -[2e_1(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + 2e_2(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)]' \mathbf{v} \quad (4.72)$$

A velocidade  $\mathbf{v}$  pode ser interpretada como uma entrada virtual que se pode usar para tornar  $\dot{V}_1$  negativa definida. Tal pode ser conseguido igualando, por exemplo,  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{v}_d$ , com

$$\mathbf{v}_d = \frac{V_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_{e1}}{2Y}\right)^2 e_1^2 + \left(\frac{k_{e2}}{2Y}\right)^2 e_2^2}} \left[ \frac{k_{e1}}{2Y} e_1 \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} + \frac{k_{e2}}{2Y} e_2 \frac{\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4}{2Y} + \frac{(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \times (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)}{(2Y)^2} \right] \quad (4.73)$$

em que  $k_e$  é uma constante positiva e  $V_d$  é o valor do módulo da velocidade a que se pretende que o veículo se desloque durante a aproximação final à base. Analisando (4.73) verifica-se que a velocidade desejada é composta por três componentes perpendiculares: Duas componentes, perpendiculares à direcção da velocidade final que se pretende, que se anulam com os erros  $e_1$  e  $e_2$ ; Outra componente, paralela à velocidade final que se pretende, tende, em módulo, para  $V_d$ , à medida que o erros  $e_1$  e  $e_2$  tendem para zero. Esta componente, tal como acontecia no caso 2D, é fundamental para a resolução do problema tal como este foi posto, uma vez que permite que a velocidade final do veículo não se anule.

À semelhança do caso 2D, pretende-se agora que a velocidade desejada convirja para o vector  $[V_d, 0, 0]'$ . Define-se então a variável de erro vectorial

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{v}_d - [V_d, 0, 0]' \quad (4.74)$$

Tal como se fez em 2D, define-se ainda a variável de erro

$$z_2 = [1, 0, 0]\mathbf{v} - V_d \quad (4.75)$$

que traduz o erro na velocidade desejada  $u = V_d$ . Seguindo o método directo de *Lyapunov* define-se a função

$$V_2 = \frac{1}{2}z_1'z_1 + \frac{1}{2}z_2^2 \quad (4.76)$$

Derivando (4.76) em ordem ao tempo

$$\dot{V}_2 = z_1'z_1 + z_2z_2 = z_1'\dot{\mathbf{v}}_d + z_2[1, 0, 0]\dot{\mathbf{v}} \quad (4.77)$$

A dinâmica de  $\mathbf{v}_d$  pode ser escrita na forma (demonstração na secção em anexo E.1)

$$\dot{\mathbf{v}}_d = (-\boldsymbol{\omega} + \mathbf{v}_{dv}) \times \mathbf{v}_d \quad (4.78)$$

com  $\mathbf{v}_{dv}$  dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{dv} = & -\frac{k_{e2}}{2Y} \frac{\dot{e}_2 + \left(\frac{k_{e1}e_1}{2Y}\right)^2 \dot{e}_2 - \left(\frac{k_{e1}}{2Y}\right)^2 e_1 e_2 \dot{e}_1}{1 + \left(\frac{k_{e1}e_1}{2Y}\right)^2 + \left(\frac{k_{e2}e_2}{2Y}\right)^2} \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} + \\ & + \frac{k_{e1}}{2Y} \frac{\dot{e}_1 + \left(\frac{k_{e2}e_2}{2Y}\right)^2 \dot{e}_1 - \left(\frac{k_{e2}}{2Y}\right)^2 e_1 e_2 \dot{e}_2}{1 + \left(\frac{k_{e1}e_1}{2Y}\right)^2 + \left(\frac{k_{e2}e_2}{2Y}\right)^2} \frac{\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4}{2Y} \end{aligned} \quad (4.79)$$

Substituindo (4.74), (4.78) e a dinâmica de  $\mathbf{v}$  (3.47) em (4.77) pode reescrever-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & (\mathbf{v}'_d - [V_d, 0, 0]) [(-\boldsymbol{\omega} + v_{dv}) \times \mathbf{v}_d] + \\ & + z_2[1, 0, 0]\mathbf{M}^{-1} [-\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{M}\mathbf{v} - \mathbf{D}_v(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{b}_1 u_1] \end{aligned} \quad (4.80)$$

em que se assumiu, tal como na fase de *homing*, flutuabilidade neutra. Tendo em conta as propriedades do produto externo, e escrevendo este na forma matricial, pode simplificar-se (4.80) tendo-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -[V_d, 0, 0] [(-\boldsymbol{\omega} + v_{dv}) \times \mathbf{v}_d] + \\ & + z_2[1, 0, 0]\mathbf{M}^{-1} [-\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{M}\mathbf{v} - \mathbf{D}_v(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{b}_1 u_1] \\ = & -[V_d, 0, 0]\mathbf{S}(-\boldsymbol{\omega} + v_{dv}) \mathbf{v}_d + \\ & + z_2[1, 0, 0]\mathbf{M}^{-1} [-\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{M}\mathbf{v} - \mathbf{D}_v(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{b}_1 u_1] \\ = & V_d(-\boldsymbol{\omega} + v_{dv})' \mathbf{S}([1, 0, 0])\mathbf{v}_d + \\ & + z_2 ([1, 0, 0]\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}_1 u_1 - [1, 0, 0]\mathbf{M}^{-1} [\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{M}\mathbf{v} + \mathbf{D}_v(\mathbf{v})\mathbf{v}]) \end{aligned} \quad (4.81)$$

Fazendo

$$u_1 = \frac{1}{[1 \ 0 \ 0]\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}_1} ([1 \ 0 \ 0]\mathbf{M}^{-1} [\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{M}\mathbf{v} + \mathbf{D}_v(\mathbf{v})\mathbf{v}] - k_2 z_2) \quad (4.82)$$

e igualando  $\mathbf{B}_2'\boldsymbol{\omega}$  a  $\mathbf{B}_2'\boldsymbol{\omega}_d$ ,

$$\boldsymbol{\omega}_d = \mathbf{v}_{dv} + \mathbf{K}_1 V_d \mathbf{S}([1, 0, 0])\mathbf{v}_d \quad (4.83)$$

com  $\mathbf{K}_1 = \text{diag}\{0, k_{12}, k_{13}\}$ ,  $k_{12} > 0$ ,  $k_{13} > 0$ ,  $k_2 > 0$ , torna-se  $\dot{V}_1$  negativa semi-definida. Mostra-se no entanto que o ponto não coincidente com a origem  $(z_1, z_2) = (\mathbf{0}, 0)$  em que  $\dot{V}_1 = 0$  é um ponto de equilíbrio instável, tal como acontecia na fase de *homing* a 3D.

Como  $\omega$  não é uma entrada real de controlo surge a necessidade de integrar a dinâmica desta variável. Tal pode ser conseguido recorrendo à técnica de *backstepping*, deduzindo-se uma lei de controlo para  $u_2$  que, em conjunto com a lei já definida para  $u_1$  tornam a derivada temporal da função de *Lyapunov* aumentada

$$V_3 = \frac{1}{2} \mathbf{z}'_1 \mathbf{H}_L \mathbf{z}_1 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} \mathbf{z}'_3 \mathbf{z}_3 \quad (4.84)$$

negativa semi-definida (demonstração na secção em anexo E.2), sendo o ponto não coincidente com a origem  $(\mathbf{z}_1, z_2, \mathbf{z}_3) = (\mathbf{0}, 0, \mathbf{0})$  em que  $\dot{V}_3$  se anula um ponto de equilíbrio instável, tal como acontece a 2D. A variável de erro  $z_3$  representa o erro entre a velocidade angular  $\omega$  e a velocidade angular desejada  $\omega_d$ .

Como foi referido na introdução do capítulo, uma prova de convergência consistiria em seguir os mesmos passos da prova para o caso 2D. No entanto, dada a complexidade dos cálculos envolvidos, não foi possível no âmbito deste trabalho a sua realização. Propõe-se no entanto um solução numérica que permite determinar um conjunto de ganhos tal que a matriz generalizada (4.43) para o caso 3D seja negativa definida no respectivo domínio dos seus parâmetros.

### 4.3.5 Simulações

Para ilustrar o comportamento do controlador considera-se o mesmo modelo do veículo utilizado para a avaliação do desempenho do controlador desenvolvido para a fase de *homing* (a 3 dimensões). Considera-se ainda o veículo com velocidade inicial de 2m/s, sem velocidade lateral, pretendendo-se ter  $V_d = 1\text{m/s}$ . Para parâmetros de controlo escolheram-se valores que originam actuações suaves, mantendo ainda assim elevada taxa de convergência. Fez-se então  $k_{e1} = k_{e2} = 0.015$ ,  $\mathbf{K}_1 = \text{diag}\{0, 0.25, 0.25\}$ ,  $k_2 = 0.03$  e  $\mathbf{K}_3 = \text{diag}\{5, 5\}$ . Considera-se o veículo inicialmente na posição  $[0, 0, 20]'\text{m}$ , com orientação  $[\phi, \theta, \psi]' = [0, 0, 0]'$ . Os emissores encontram-se nas posições  ${}^U \mathbf{e}_1 = [200, 10, 15]'\text{m}$ ,  ${}^U \mathbf{e}_2 = [200, 10, 5]'\text{m}$ ,  ${}^U \mathbf{e}_3 = [200, 5, 10]'\text{m}$  e  ${}^U \mathbf{e}_4 = [200, 15, 10]'\text{m}$ . Na Figura 4.10 apresenta-se a trajectória descrita pelo veículo no espaço a 3 dimensões, enquanto que nas Figuras 4.11 e 4.12 se apresentam as projecções da trajectória descrita pelo veículo nos planos XY e XZ, respectivamente.

Como se pode observar, o veículo descreve uma trajectória suave, dirigindo-se em direcção à base.

Na Figura 4.13 apresenta-se a evolução da velocidade do veículo. Observa-se que a velocidade segundo  $x_V$  tende para 1m/s, tal como pretendido, anulando-se as velocidades laterais. As velocidades angulares do veículo apresentam valores plausíveis para o veículo em causa.

Na Figura 4.14 apresenta-se a evolução do comando aplicado no veículo que, como se pode observar, é suave. O facto do centro de impulsão não coincidir com o centro de massa do veículo origina neste caso que o binário  $\tau_q$  não se anule, para compensar o binário exercido pela força de impulsão.

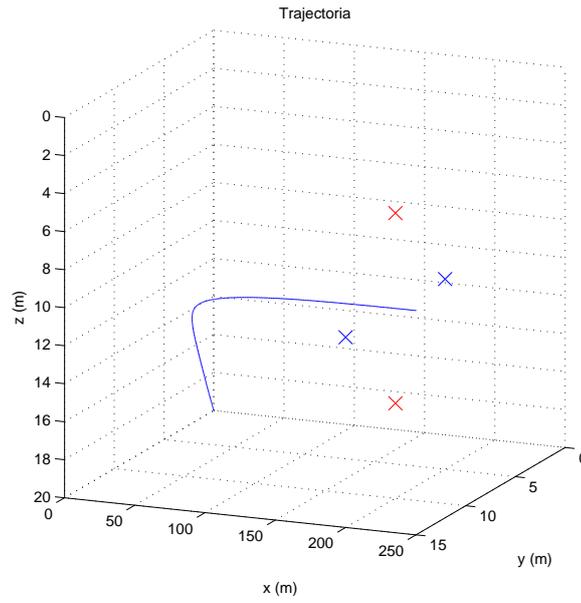


Figura 4.10 - Exemplo de uma trajetória descrita pelo veículo durante a fase de *docking*.

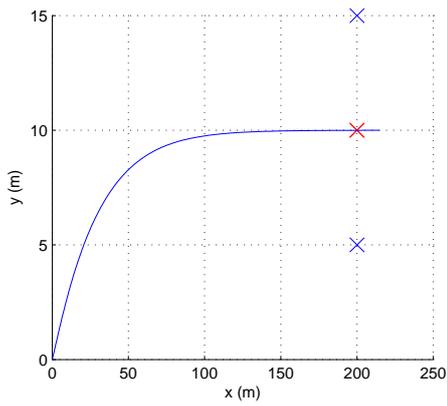


Figura 4.11 - Trajetória descrita pelo veículo no plano XY durante a aproximação final à base.

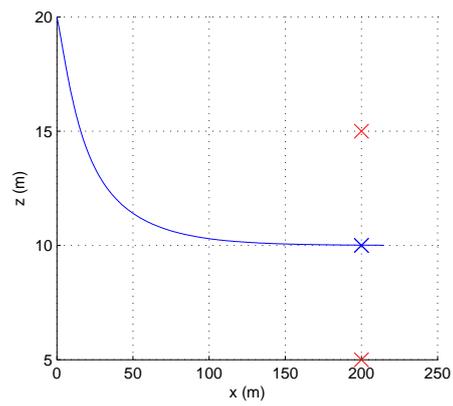


Figura 4.12 - Trajetória descrita pelo veículo no plano XZ durante a aproximação final à base.

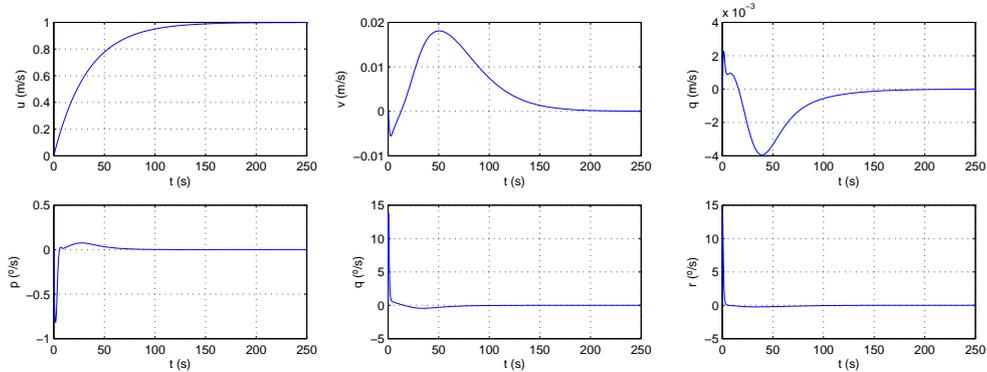


Figura 4.13 - Velocidade do veículo durante a aproximação final.

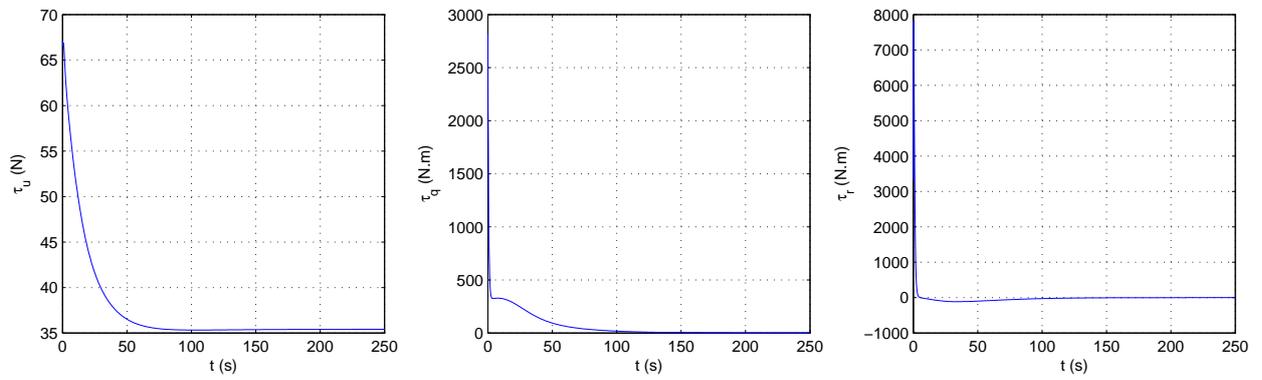


Figura 4.14 - Comando aplicado ao veículo durante a aproximação final.



# Capítulo 5

## Conclusões e Trabalho Futuro

O objectivo deste trabalho é o desenvolvimento de novas estratégias de controlo, baseadas directamente no espaço dos sensores, com aplicação a veículos submarinos autónomos. Em particular, abordam-se os problemas de controlo durante a aproximação inicial do veículo a uma estação base (*docking*) e a manobra de atracar do veículo (*docking*), com recurso a um sensor acústico do tipo USBL. Da mesma forma que os métodos baseados directamente em imagem vieram revolucionar o controlo baseado em visão espera-se que a nova abordagem introduzida por este trabalho venha abrir caminho para a utilização de outros sistemas sensoriais utilizados na condução e controlo de veículos autónomos de forma alternativa.

Na primeira parte do trabalho foi efectuado um estudo do sensor USBL, que se divide em 2 partes: i) foi estudada a diversidade espacial do sistema USBL, quer no que diz respeito à disposição espacial quer no que diz respeito ao número de receptores do sistema. Verificou-se que a sensibilidade a erros se degrada à medida que a geometria se aproxima de uma geometria planar, bem como à medida que o número de sensores diminui. Verificou-se ainda que o sistema apresenta sensibilidades diferentes ao ruído dependendo da zona de trabalho do mesmo; ii) foi proposto um algoritmo para rejeição de *outliers* nos vários receptores do sistema USBL, sendo validado em ambiente de simulação MATLAB. Por fim salienta-se que o estudo efectuado não se restringe a sistemas acústicos, sendo também válido para sistemas electromagnéticos, podendo ser utilizado para o controlo e navegação de outros veículos como por exemplo helicópteros ou aviões.

Na segunda parte do trabalho abordou-se o problema de controlo de um AUV sub-actuado durante a sua aproximação inicial à estação base. São propostas leis de controlo não lineares, contínuas e invariantes no tempo para os problemas a 2 e 3 dimensões. É garantida estabilidade quase global assintótica, sendo o controlo desenvolvido directamente no espaço dos sensores. As leis de controlo foram validadas em ambiente de simulação MATLAB, tendo-se verificado que, por escolha adequada dos parâmetros de controlo, se têm trajectórias e comandos suaves.

Na última parte do trabalho abordou-se o problema de controlo de AUVs sub-actuados durante a fase de *docking*. O problema é também formulado directamente no espaço dos sensores, sendo propostas leis de controlo não lineares, contínuas e invariantes no tempo para os problemas a 2 e a 3 dimensões. São deduzidas condições suficientes de convergência para o caso 2D, sendo alcançada estabilidade quase global assintótica. As leis de controlo propostas foram validadas em ambiente de simulação MATLAB, tendo-se observado trajectórias e actuações suaves por escolha apropriadas dos parâmetros de

controlo. Salienta-se ainda que o veículo se reorienta correctamente quando se encontra numa direcção oposta à da base, não se exigindo portanto que o veículo se possa deslocar para trás.

Como trabalho futuro sugere-se a análise da sensibilidade das leis de controlo propostas face à variação de parâmetros do veículo e a sensibilidade ao ruído dos sensores. Por outro lado pode ainda aprofundar-se o estudo efectuado para casos em que existam forças exteriores como por exemplo correntes marítimas. A ausência de informação em tempo contínuo do sistema USBL abre espaço para o desenvolvimento de um estimador ou a eventual discretização do modelo. Por fim refere-se ainda o problema mais genérico de condução de um veículo ao longo de um campo de faróis acústicos ou electromagnéticos, sendo o controlo descrito directamente em função das distâncias a cada farol acústico.

# Apêndice A

## Complemento ao estudo do sistema USBL

### A.1 Dedução de $\theta(d_1, d_2)$

Considere-se a Figura A.1, em que  $d_1$  e  $d_2$  representam as distâncias entre o emissor e os receptores 1 e 2, respectivamente,  $l$  a distância entre os receptores e  $\theta$  o ângulo que se pretende determinar. Por inspecção directa da figura tem-se

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{h}{d} \\ \sin(\theta) = \frac{i-l/2}{d} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

pelo que

$$\theta = \arctan\left(\frac{i-l/2}{h}\right) \quad (\text{A.2})$$

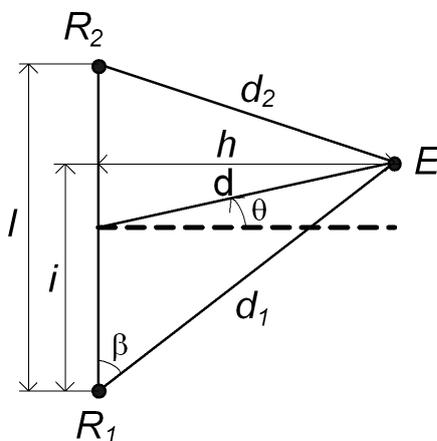


Figura A.1 - Esquema com 1 Emissor e 2 Receptores.

Por outro lado, e também por inspeção directa da Figura A.1, verifica-se

$$\begin{cases} h = d_1 \sin(\beta) \\ i = d_1 \cos(\beta) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Recorrendo ao teorema de *Carnot* pode escrever-se

$$d_2^2 = d_1^2 + l^2 - 2d_1l \cos(\beta) \quad (\text{A.4})$$

donde, para  $d_1, d_2 \neq 0$ ,

$$\begin{cases} \cos(\beta) = \frac{d_1^2 + l^2 - d_2^2}{2d_1l} \\ \sin(\beta) = \sqrt{1 - \left(\frac{d_1^2 + l^2 - d_2^2}{2d_1l}\right)^2} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Substituindo (A.5) em (A.3) e tendo em conta (A.2) tem-se finalmente

$$\theta = \arctan \left( \frac{d_1^2 - d_2^2}{\sqrt{2l^2(d_1^2 + d_2^2) - l^4 - (d_1^2 - d_2^2)^2}} \right) \quad (\text{A.6})$$

como se pretende demonstrar.

## A.2 Dedução de $\theta(c, d)$

Sejam

$$\begin{cases} c = \frac{d_1 + d_2}{2} \\ d = d_1 - d_2 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

as componentes de modo comum e modo diferencial de  $d_1$  e  $d_2$ . Manipulando (A.7) pode expressar-se  $d_1$  e  $d_2$  em função das componentes de modo comum  $c$  e de modo diferencial  $d$

$$\begin{cases} d_1 = c + \frac{1}{2}d \\ d_2 = c - \frac{1}{2}d \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Substituindo (A.8) em (A.6) e simplificando tem-se imediatamente

$$\theta(c, d) = \arctan \left( \frac{2cd}{\sqrt{2l^2 \left(2c^2 + \frac{1}{2}d^2\right) - l^4 - 4(cd)^2}} \right) \quad (\text{A.9})$$

## A.3 Mínimos Quadrados aplicados à aproximação planar

Para aplicar o método dos mínimos quadrados na determinação dos parâmetros de uma onda paralela (ou planar, no caso a a 3 dimensões), apresenta-se primeiro uma forma mais

geral do método dos mínimos quadrados. Seja então  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função genérica da forma

$$f(\mathbf{x}) = c_1\phi_1(\mathbf{x}) + c_2\phi_2(\mathbf{x}) + \dots + c_m\phi_m(\mathbf{x}) \quad (\text{A.10})$$

onde  $\phi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  são funções de base conhecidas, não necessariamente lineares, e  $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$  são parâmetros da função.

Suponha-se que se conhecem pontos  $(\mathbf{x}_i, f_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $r > m$  afectados de erro, i.e.,  $f_i = f(\mathbf{x}_i) + \epsilon_i$ . O método dos mínimos quadrados permite estimar os parâmetros  $c_1, c_2, \dots, c_m$  que minimizam o erro quadrático total

$$q(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^r [f(\mathbf{x}_i) - f_i]^2 \quad (\text{A.11})$$

com  $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_m]'$ .

O mínimo do erro quadrático total corresponde ao ponto de estacionariedade  $\mathbf{c}^*$  em que se verifica

$$\left. \frac{\partial q}{\partial c_j} \right|_{\mathbf{c}=\mathbf{c}^*} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (\text{A.12})$$

Substituindo (A.10) em (A.11) pode escrever-se

$$q(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^r [c_1\phi_1(\mathbf{x}_i) + c_2\phi_2(\mathbf{x}_i) + \dots + c_m\phi_m(\mathbf{x}_i) - f_i]^2 \quad (\text{A.13})$$

Derivando (A.13) em ordem a  $c_j$  tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial c_j} &= 2 \sum_{i=1}^r \phi_j(\mathbf{x}_i) [c_1\phi_1(\mathbf{x}_i) + c_2\phi_2(\mathbf{x}_i) + \dots + c_m\phi_m(\mathbf{x}_i) - f_i] \\ &= 2c_1 \sum_{i=1}^r \phi_1(\mathbf{x}_i)\phi_j(\mathbf{x}_i) + 2c_2 \sum_{i=1}^r \phi_2(\mathbf{x}_i)\phi_j(\mathbf{x}_i) + \dots + 2c_m \sum_{i=1}^r \phi_m(\mathbf{x}_i)\phi_j(\mathbf{x}_i) + \\ &\quad -2 \sum_{i=1}^r f_i\phi_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Igualando (A.14) a zero pode reescrever-se (A.12), tendo-se

$$\begin{aligned} c_1^* \sum_{i=1}^r \phi_1(\mathbf{x}_i)\phi_j(\mathbf{x}_i) + c_2^* \sum_{i=1}^r \phi_2(\mathbf{x}_i)\phi_j(\mathbf{x}_i) + \dots + c_m^* \sum_{i=1}^r \phi_m(\mathbf{x}_i)\phi_j(\mathbf{x}_i) = \\ = \sum_{i=1}^r f_i\phi_j(\mathbf{x}_i), \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

A solução óptima  $\mathbf{c}^*$  do problema de minimização do erro quadrático total corresponde então à solução do sistema de equações

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b} \quad (\text{A.16})$$

com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \phi_1^2(\mathbf{x}_i) & \sum_{i=1}^r \phi_1(\mathbf{x}_i)\phi_2(\mathbf{x}_i) & \dots & \sum_{i=1}^r \phi_1(\mathbf{x}_i)\phi_m(\mathbf{x}_i) \\ \sum_{i=1}^r \phi_2(\mathbf{x}_i)\phi_1(\mathbf{x}_i) & \sum_{i=1}^r \phi_2^2(\mathbf{x}_i) & \dots & \sum_{i=1}^r \phi_2(\mathbf{x}_i)\phi_m(\mathbf{x}_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^r \phi_m(\mathbf{x}_i)\phi_1(\mathbf{x}_i) & \sum_{i=1}^r \phi_m(\mathbf{x}_i)\phi_2(\mathbf{x}_i) & \dots & \sum_{i=1}^r \phi_m^2(\mathbf{x}_i) \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

e

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \phi_1(\mathbf{x}_i)f_i \\ \sum_{i=1}^r \phi_2(\mathbf{x}_i)f_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^r \phi_m(\mathbf{x}_i)f_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Considere-se agora o problema representado na Figura A.2, em que se tem uma onda paralela que passa em  $(x_i, y_i)$  no instante  $t_i$  e no ponto  $(x_j, y_j)$  no instante  $t_j$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ , com vector normal (que indica a direcção de propagação)  $\mathbf{d} = [d_x, d_y]'$ , unitário e com sentido oposto ao do sentido de propagação da mesma. Sejam ainda  $\Delta_1 = t_1 - t_2$ ,  $\Delta_2 = t_1 - t_3$ ,  $\dots$ ,  $\Delta_M = t_{N-1} - t_N$  todas as combinações possíveis de diferenças de atrasos entre dois receptores. Então,

$$V_p \Delta_i = -[d_x(x_i - x_j) + d_y(y_i - y_j)] \quad (\text{A.19})$$

A expressão (A.19) está na forma (A.10), tendo-se  $c_0 = d_x$ ,  $c_1 = d_y$ . Fazendo  $\mathbf{r}_x = [x_1 - x_2, x_1 - x_3, \dots, x_{N-1} - x_N]'$ ,  $\mathbf{r}_y = [y_1 - y_2, y_1 - y_3, \dots, y_{N-1} - y_N]'$  e  $\Delta = [\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_M]'$  obtém-se então (2.9) e (2.10).

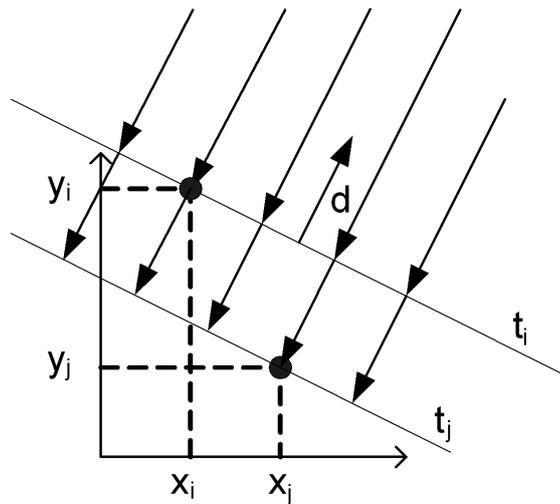


Figura A.2 - Esquema com uma onda plana a incidir em dois receptores.

## A.4 Mínimos Quadrados Pesados aplicados à Aproximação Planar

O método dos mínimos quadrados, na sua forma mais simples, atribui igual importância a todas as medidas, o que pode nem sempre corresponder à melhor solução. Por exemplo, quando existem pontos em que se sabe à partida que a variância do erro é superior, seria expectável atribuir a esses pontos uma importância menor pois são pontos mais ruidosos. Na Secção 2.1 verifica-se que, apesar de não se conhecerem à partida quais as medidas mais ruidosas, conhecem-se quais os pares de receptores melhor colocados para calcular os parâmetros de uma determinada onda paralela (ou plana), o que permite obter um quantificador da importância de cada receptor. Assim, é possível aplicar o chamado método dos mínimos quadrados pesados.

No método dos mínimos quadrados pesados atribui-se um peso  $w_i > 0, i = 1, 2, \dots, r$  a cada medida, reescrevendo-se a função de custo (A.11)

$$q(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^r w_i [f(\mathbf{x}_i) - f_i]^2 \quad (\text{A.20})$$

A dedução do método é semelhante à apresentada na Secção A.3, correspondendo o conjunto de parâmetros  $\mathbf{c}^*$  que minimizam o erro quadrático total à solução do sistema

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b} \quad (\text{A.21})$$

mas agora com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N w_i \phi_1(\mathbf{x}_i) \phi_1(\mathbf{x}_i) & \dots & \sum_{i=1}^N w_i \phi_1(\mathbf{x}_i) \phi_m(\mathbf{x}_i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^N w_i \phi_m(\mathbf{x}_i) \phi_1(\mathbf{x}_i) & \dots & \sum_{i=1}^N w_i \phi_m(\mathbf{x}_i) \phi_m(\mathbf{x}_i) \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

e

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N w_i \phi_1(\mathbf{x}_i) f_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N w_i \phi_m(\mathbf{x}_i) f_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Para comparar o método dos mínimos quadrados pesados com o método dos mínimos quadrados simples efectuaram-se 1000 experiências aleatórias, em que se introduziu ruído com média nula nas diferenças de atrasos, apresentando-se na Figura A.3 os resultados obtidos. Como se pode observar, a aplicação do método dos mínimos quadrados pesados não introduziu uma melhoria nos resultados, antes pelo contrário. Tal deve-se, como já foi referido na Secção 2.1, ao facto da aplicação deste método se traduzir neste caso particular numa diminuição artificial do número de receptores disponíveis, efeito esse que se contrapõe à melhoria provocada pelo uso dos receptores mais adequados para a estimação dos parâmetros de cada onda paralela.

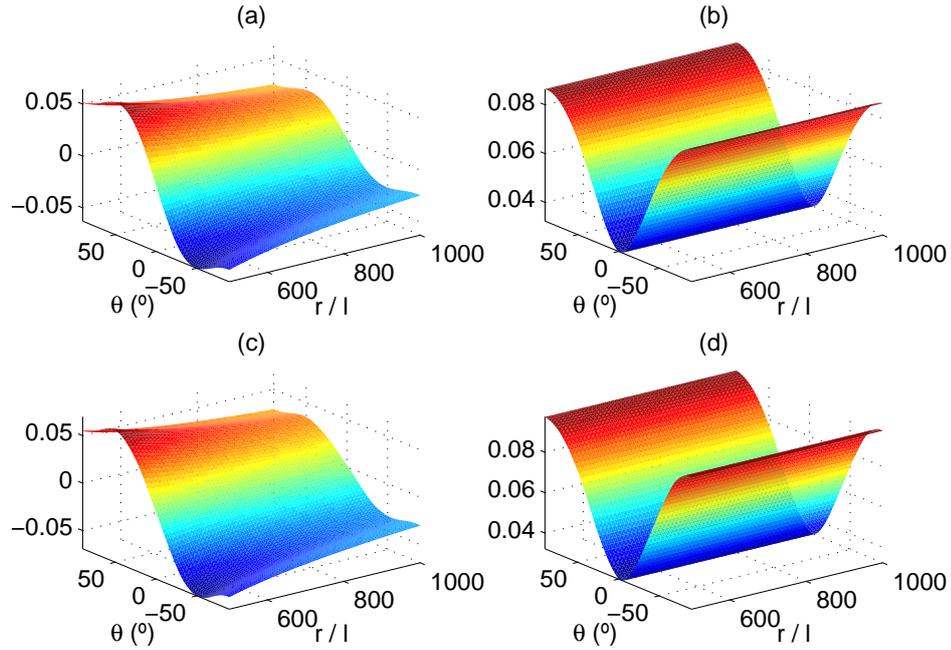


Figura A.3 - Comparação do Métodos dos Mínimos Quadrados Simples com os Mínimos Quadrados Pesados: (a) e (b) - Média e desvio padrão (em graus), respectivamente, do erro em  $\theta$  com Mínimos Quadrados Simples; (c) e (d) - Média e desvio padrão (em graus), respectivamente, do erro em  $\theta$  com Mínimos Quadrados Pesados.

## A.5 Sensibilidade espacial do USBL a 3 dimensões

Tal como acontece a 2 dimensões, para distâncias entre os receptores e o emissor muito superiores à distância entre qualquer par de receptores, é válida a aproximação planar a 3D. Assim, e tal como se faz no caso a 2 dimensões, calcula-se o vector  $\mathbf{d}$ , unitário e ortogonal à frente da onda plana, com sentido oposto ao sentido de propagação da onda, recorrendo ao método dos mínimos quadrados. Para analisar o comportamento do sistema face a diferentes distribuições espaciais a 3 dimensões considerem-se as geometrias apresentadas na Figura A.5, todas com igual número de receptores mas diferentes graus de curvatura. De novo, recorre-se ao método de *Monte Carlo*, realizando-se 100 experiências aleatórias, introduzindo-se erro com média nula nas diferenças de atrasos entre o emissor e cada par de receptores. Em cada experiência calculam-se os ângulos de azimute  $\theta$  e elevação  $\phi$  tal como definidos da Figura A.4.

Nas Figuras A.6 e A.7 apresentam-se os resultados obtidos para o erro no cálculo do azimute e da elevação, respectivamente. Como se pode observar os resultados obtidos em 2D repetem-se a 3 dimensões: Geometrias próximas da geometria planar apresentam desempenhos inferiores aos de geometrias com maior grau de curvatura.

Para verificar o efeito do número de receptores consideraram-se 3 geometrias com forma semelhante à geometria 3 da Figura A.5 (a geometria que apresenta melhores resultados) mas com diferente número de receptores, apresentando 9 receptores a geometria 1, 25 a geometria 2 e 41 a geometria 3. Nas Figuras A.8 e A.9 apresentam-se os resultados obtidos

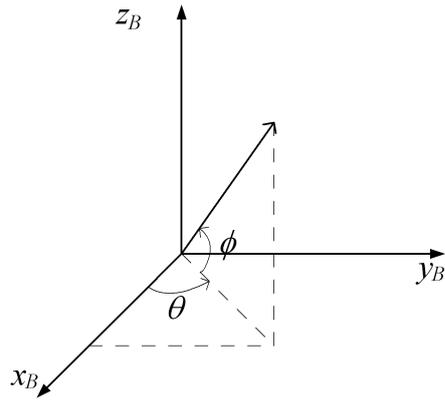


Figura A.4 - Ângulos de azimute  $\theta$  e elevação  $\phi$ .

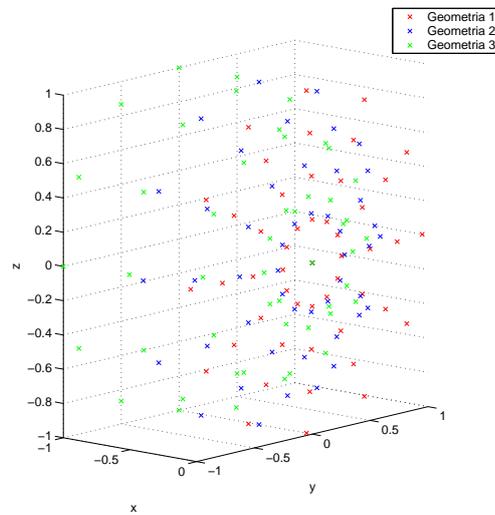


Figura A.5 - Geometrias 3D com igual número de sensores mas diferente curvatura.

após se realizarem 100 experiências aleatórias, em que se introduziu erro de média nula em todas as diferenças de atrasos. De novo se verifica que que os resultados obtidos a 2D são extrapoláveis para 3D. Quanto maior o número de receptores melhor o desempenho do sistema perante erros nas diferenças de atrasos.

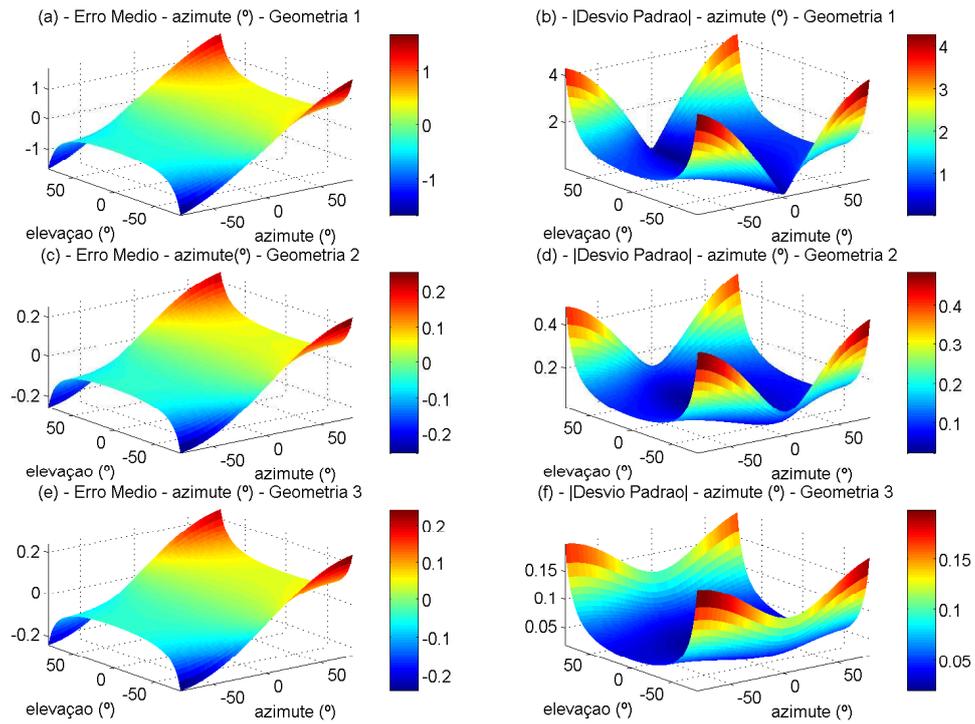


Figura A.6 - Resultados sobre o o erro do ângulo de azimute para as geometrias da Figura A.5.

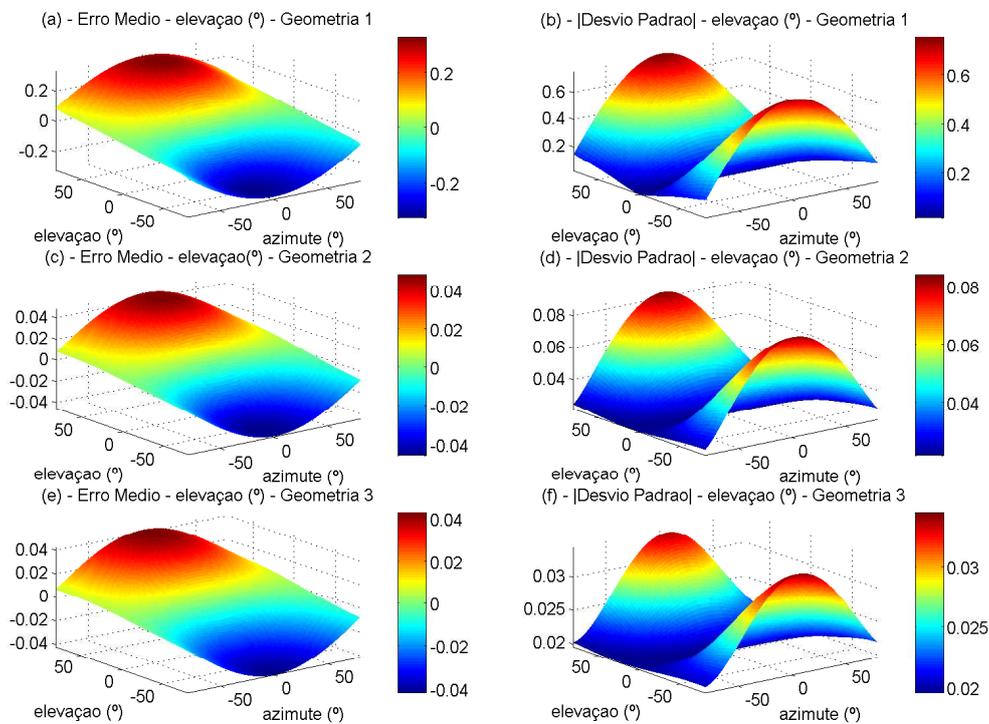


Figura A.7 - Resultados sobre o erro do ângulo de elevação para as geometrias da Figura A.5.

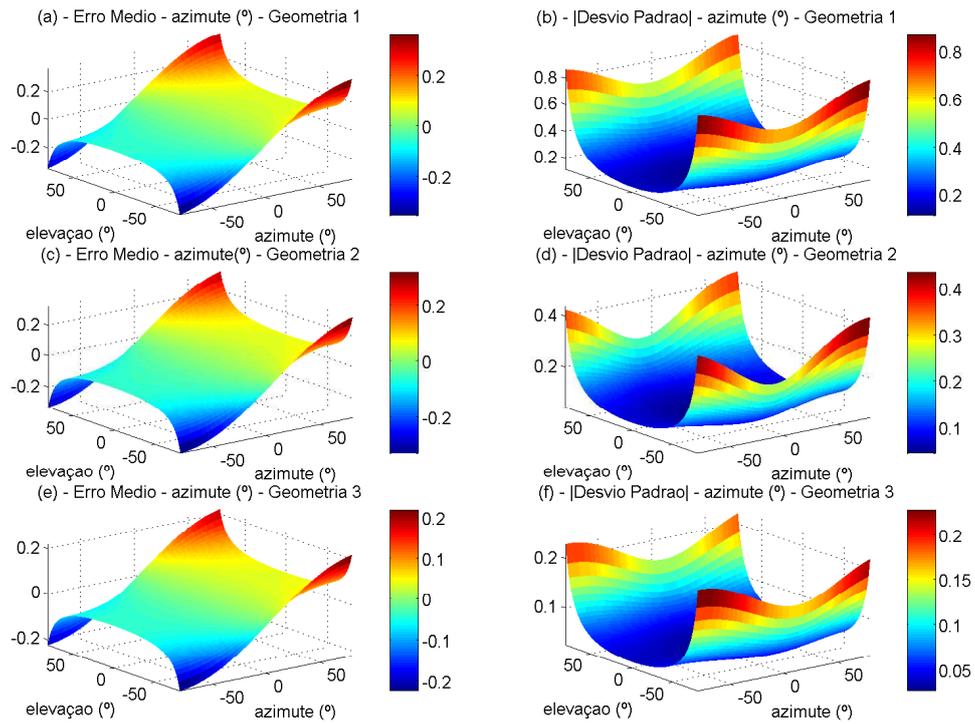


Figura A.8 - Resultados sobre o erro do ângulo de azimuth para geometrias com diferente número de sensores.

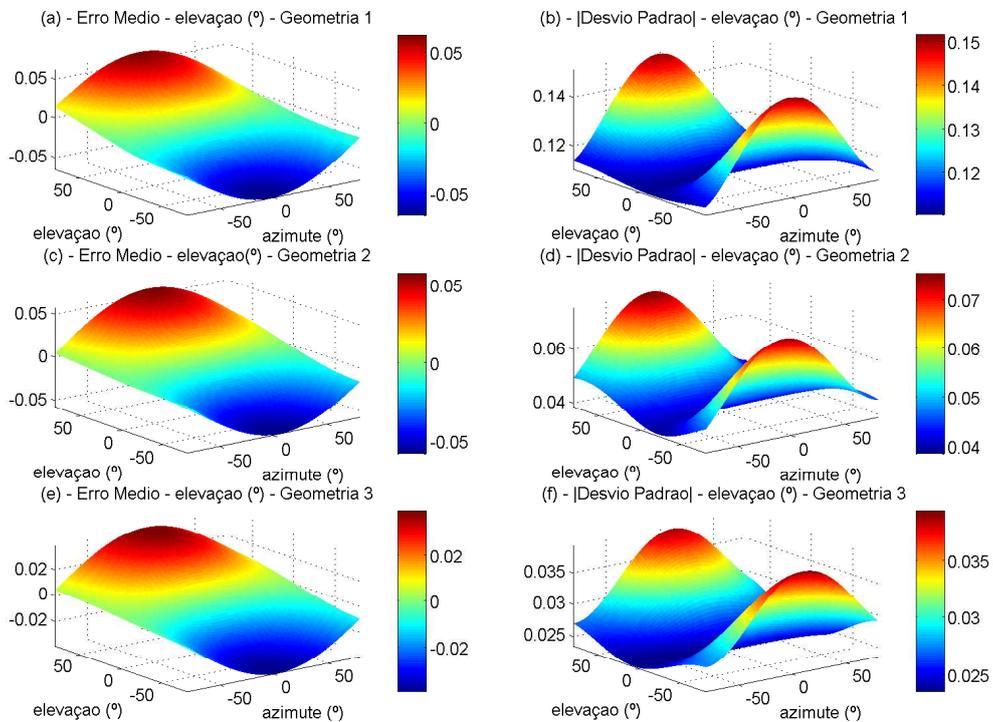


Figura A.9 - Resultados sobre o erro do ângulo de elevação para geometrias com diferente número de sensores.



# Apêndice B

## Técnica de *Backstepping*

A técnica de *backstepping* é uma técnica simples frequentemente utilizada quando se deduzem leis de controlo baseadas no método directo de *Lyapunov* e que permite, a partir de uma lei de controlo desejada mas proposta para uma variável que não é uma entrada real de controlo, deduzir uma lei de controlo aplicada a uma entrada real do sistema. Para ilustrar esta técnica considere-se um sistema físico muito simples constituído por um carrinho que se desloca num espaço de dimensão unitária, sob a acção de uma força  $u$ , e que sofre a acção de uma força de atrito  $f_a = -d_v v$ , em que  $v$  é a velocidade do carrinho, tal como se ilustra na Figura B.1.

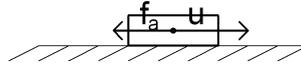


Figura B.1 - Carrinho que se desloca num espaço de dimensão.

As equações que regem o movimento do carrinho são

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \frac{u - d_v v}{m} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

onde  $x$  representa a posição do carrinho num referencial inercial universal. Como objectivo de controlo considere-se que se pretende levar a posição do carrinho  $x$  para a origem. Para tal, defina-se a variável de erro

$$z_1 = x \quad (\text{B.2})$$

e a função de *Lyapunov*

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 \quad (\text{B.3})$$

A função de *Lyapunov* (B.3) é positiva definida e as suas curvas de nível são fechadas pelo que se garante estabilidade global assintótica da origem  $z_1 = 0$  se  $\dot{V}_1$  for negativa definida. Derivando (B.3) em ordem ao tempo tem-se

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 = z_1 \dot{x} = z_1 v \quad (\text{B.4})$$

Igualando  $v$  a  $v_d$ , com  $v_d$  definido por

$$v_d := -k_1 z_1 \quad (\text{B.5})$$

torna-se então  $\dot{V}_1$  negativa definida. Acontece no entanto que  $v$  não é uma entrada real do sistema, tendo aqui sido interpretada como uma entrada virtual, e é aqui que a técnica de *backstepping* se revela útil. Recorrendo a este método, define-se uma nova variável de erro que consiste na diferença entre a variável real e o valor desejado para a essa variável, no caso, a diferença entre a velocidade  $v$  e a velocidade desejada  $v_d$

$$z_2 = v - v_d \quad (\text{B.6})$$

O passo seguinte consiste na definição da função de *Lyapunov* aumentada

$$V_2 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 \quad (\text{B.7})$$

Tal como acontece com  $V_1$ , também  $V_2$  é positiva definida com curvas de nível fechadas, pelo que basta que  $\dot{V}_2$  seja negativa definida para que se verifique estabilidade global assintótica da origem  $(z_1, z_2) = (0, 0)$ . Derivando (B.7) em ordem ao tempo tem-se

$$\dot{V}_2 = z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 = z_1 v + z_2 (\dot{v} - \dot{v}_d) \quad (\text{B.8})$$

De acordo com (B.6) pode escrever-se

$$v = z_2 + v_d \quad (\text{B.9})$$

Substituindo (B.9) em (B.8), e tendo ainda em conta (B.5), pode reescrever-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 + z_2 (\dot{v} - \dot{v}_d) \\ &= -k_1 z_1^2 + z_2 (\dot{v} - \dot{v}_d + z_1) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Substituindo agora a dinâmica do carrinho (B.1) em (B.10) tem-se

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 + z_2 \left( \frac{u - d_v v}{m} - \dot{v}_d + z_1 \right) \quad (\text{B.11})$$

Aplicando então à entrada do sistema

$$u = d_v v + m (\dot{v}_d - z_1 - k_2 z_2) \quad (\text{B.12})$$

com

$$\dot{v}_d = -k_1 \dot{z}_1 = -k_1 \dot{x} = -k_1 v \quad (\text{B.13})$$

tem-se finalmente

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 \quad (\text{B.14})$$

que é negativa definida, tal como pretendido. A técnica de *backstepping* permitiu assim passar do controlo definido sobre uma variável de controlo virtual para uma variável de controlo real, mantendo-se neste caso estabilidade global assintótica.

# Apêndice C

## Complemento da Secção 3.2

Neste capítulo apresenta-se a dedução da lei de controlo para o problema de *homing* a 3 dimensões, seguindo a dedução os mesmos passos da solução apresentada para o mesmo problema a 2 dimensões na Secção 3.1. O modelo do veículo é o apresentado na Secção 3.2.1. Na Secção C.1 começa-se por apresentar o modelo dos receptores. A lei de controlo é deduzida na Secção C.2. Por fim a análise de convergência é apresentada na Secção C.3. Tal como acontece para o caso 2D, a lei de controlo é deduzida de forma construtiva usando o método directo de *Lyapunov*, recorrendo-se também à técnica de *backstepping* para integração da dinâmica do veículo. Por fim apresenta-se a análise de convergência na Secção C.3.

### C.1 Modelo do Sensor USBL

Sejam  $\mathbf{r}_i = [x_i, y_i, z_i]' \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  as posições de  $N$  receptores acústicos do sistema de recepção USBL. Na fase de *homing* o veículo encontra-se a uma distância considerável do emissor acústico, muito superior à distância entre qualquer par de receptores de um sistema USBL. Logo, e tal como já foi visto no Capítulo 2, é válida a aproximação planar. Considere-se então uma onda paralela, recebida pelo receptor  $i$  no instante de tempo  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , que se desloca com vector normal (que indica a direcção de propagação da onda)  $\mathbf{d} = [d_x, d_y, d_z]'$ , unitário e com sentido oposto ao sentido de propagação da onda, como se ilustra na Figura C.1.

Designando por  $V_p$  a velocidade de propagação da onda acústica no meio, que se assume homogéneo, e desprezando a velocidade do veículo autónomo, o que é uma aproximação razoável visto que  $\|\mathbf{v}\| \ll V_p$ , tem-se então

$$V_p(t_i - t_j) = -[d_x(x_i - x_j) + d_y(y_i - y_j) + d_z(z_i - z_j)] \quad (\text{C.1})$$

Sejam  $\Delta_1 = t_1 - t_2$ ,  $\Delta_2 = t_1 - t_3$ ,  $\dots$ ,  $\Delta_M = t_{N-1} - t_N$  todas as combinações possíveis de diferenças de atrasos entre dois receptores e definam-se os vectores

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_M \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

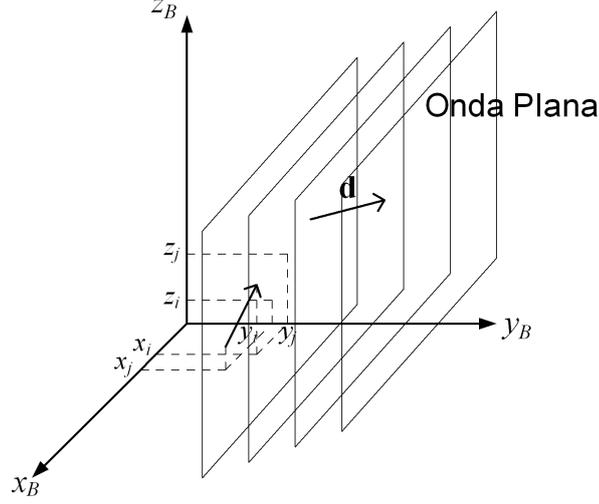


Figura C.1 - Onda plana incidente no sistema USBL.

e

$$\mathbf{r}_x = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ \dots \\ x_{N-1} - x_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_y = \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1 - y_3 \\ \dots \\ y_{N-1} - y_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_z = \begin{bmatrix} z_1 - z_2 \\ z_1 - z_3 \\ \dots \\ z_{N-1} - z_N \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Defina-se ainda a matriz  $\mathbf{H}_R \in \mathbb{R}^{N \times 3}$

$$\mathbf{H}_R = [\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y, \mathbf{r}_z] \quad (\text{C.4})$$

Então, escrevendo (C.1) para todas as combinações de diferenças de atrasos possíveis, tem-se

$$\Delta = -\frac{1}{V_p} \mathbf{H}_R \mathbf{d} \quad (\text{C.5})$$

Sendo  $\mathbf{d} = \mathbf{R}^U \mathbf{d}$ , em que  ${}^U \mathbf{d}$  representa a direção de propagação da onda descrita no referencial  $\{U\}$ , e considerando a aproximação planar, que garante,  ${}^U \mathbf{d} = 0$ , pode derivar-se

a dinâmica de  $\Delta$

$$\begin{aligned}
\dot{\Delta} &= -\frac{1}{V_p} \mathbf{H}_R \dot{\mathbf{d}} \\
&= -\frac{1}{V_p} \mathbf{H}_R \frac{d}{dt} (\mathbf{R}'^U \mathbf{d}) \\
&= -\frac{1}{V_p} \mathbf{H}_R \dot{\mathbf{R}}'{}^U \mathbf{d} \\
&= -\frac{1}{V_p} \mathbf{H}_R (\dot{\mathbf{R}})'{}^U \mathbf{d} \\
&= -\frac{1}{V_p} \mathbf{H}_R [\mathbf{R}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})]'{}^U \mathbf{d} \\
&= -\frac{1}{V_p} \mathbf{H}_R \mathbf{S}'(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{R}'{}^U \mathbf{d} \\
&= \frac{1}{V_p} \mathbf{H}_R \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{d}
\end{aligned} \tag{C.6}$$

De forma a expressar a dinâmica de  $\Delta$  directamente em função dessa variável, considere-se a matriz

$$\mathbf{H}_Q = \frac{1}{V_p} \mathbf{H}'_R \mathbf{H}_R \tag{C.7}$$

que se admite não singular. Importa salientar que, para que tal se verifique, basta que  $\mathbf{H}_R$  tenha característica máxima, isto é, característica três, o que acontece desde que existam três receptores linearmente independentes. Então,

$$\mathbf{d} = -\mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta \tag{C.8}$$

Substituindo (C.8) em (C.6) tem-se finalmente

$$\dot{\Delta} = -\frac{1}{V_p} \mathbf{H}_R \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta \tag{C.9}$$

## C.2 Lei de Controlo

Quando o emissor se encontra na direcção do veículo tem-se  $\Delta = -\frac{1}{V_p} \mathbf{r}_x$ . Defina-se então a variável de erro

$$\mathbf{z}_1 = \Delta + \frac{1}{V_p} \mathbf{r}_x \tag{C.10}$$

Anular a variável de erro  $\mathbf{z}_1$ , tal como acontecia a 2 dimensões, não é condição suficiente para que o veículo se aproxime da base. No entanto, e seguindo os mesmos passos da dedução a 2 dimensões, defina-se uma segunda variável de erro

$$z_2 = [1, 0, 0] \mathbf{v} - V_d \tag{C.11}$$

Mostra-se que o controlo deduzido baseado nestas duas variáveis de erro leva a que a velocidade do veículo converga para  $[V_d, 0, 0]'$ , orientando-se o veículo em direcção ao emissor, sendo portanto apropriado à fase de *oming*.

Considere-se então a função de *Lyapunov*

$$V_1 = \frac{1}{2} \mathbf{z}'_1 \mathbf{H}_L \mathbf{z}_1 + \frac{1}{2} z_2^2 \quad (\text{C.12})$$

em que

$$\mathbf{H}_L = (\mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R)' (\mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R) \quad (\text{C.13})$$

Derivando (C.12) em ordem ao tempo tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \mathbf{z}'_1 \mathbf{H}_L \dot{\mathbf{z}}_1 + z_2 \dot{z}_2 \\ &= \mathbf{z}'_1 \mathbf{H}_L \dot{\Delta} + z_2 [1 \ 0 \ 0] \dot{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Substituindo (C.9), (C.10) e (C.13) em (C.14), e tendo em conta a dinâmica de  $\mathbf{v}$  (3.47), pode reescrever-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\frac{1}{V_p} \left( \Delta + \frac{1}{V_p} \mathbf{r}_x \right)' (\mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R)' (\mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R) \mathbf{H}_R \mathbf{S}(\omega) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta + \\ &\quad + z_2 [1 \ 0 \ 0] \mathbf{M}^{-1} [-\mathbf{S}(\omega) \mathbf{M} \mathbf{v} - \mathbf{D}_v(\mathbf{v}) \mathbf{v} + \mathbf{g}_1(\mathbf{R}) + \mathbf{b}_1 u_1] \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Substituindo (C.7) em (C.15) e simplificando tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\left( \Delta' + \frac{1}{V_p} \mathbf{r}'_x \right) (\mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R)' \mathbf{S}(\omega) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta + \\ &\quad + z_2 [1 \ 0 \ 0] (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_1 u_1 - \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{S}(\omega) \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{D}_v(\mathbf{v}) \mathbf{v} + \mathbf{g}_1(\mathbf{R})]) \\ &= -\frac{1}{V_p} \mathbf{r}'_x (\mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R)' \mathbf{S}(\omega) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta - \Delta' (\mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R)' \mathbf{S}(\omega) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta \\ &\quad + z_2 [1 \ 0 \ 0] (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_1 u_1 - \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{S}(\omega) \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{D}_v(\mathbf{v}) \mathbf{v} + \mathbf{g}_1(\mathbf{R})]) \\ &= -\frac{1}{V_p} \mathbf{r}'_x (\mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R)' \mathbf{S}(\omega) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta - (\mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta)' \mathbf{S}(\omega) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta \\ &\quad + z_2 [1 \ 0 \ 0] (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_1 u_1 - \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{S}(\omega) \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{D}_v(\mathbf{v}) \mathbf{v} + \mathbf{g}_1(\mathbf{R})]) \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Sendo  $\mathbf{S}(\omega)$  uma matriz anti-simétrica, pode simplificar-se (C.16), tendo-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\frac{1}{V_p} \mathbf{r}'_x (\mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R)' \mathbf{S}(\omega) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta + \\ &\quad z_2 ([1 \ 0 \ 0] \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_1 u_1 - [1 \ 0 \ 0] \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{S}(\omega) \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{D}_v(\mathbf{v}) \mathbf{v} + \mathbf{g}_1(\mathbf{R})]) \\ &= -\left[ -\mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \left( -\frac{1}{V_p} \mathbf{r}_x \right) \right]' \mathbf{S}(\omega) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta + \\ &\quad z_2 ([1 \ 0 \ 0] \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_1 u_1 - [1 \ 0 \ 0] \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{S}(\omega) \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{D}_v(\mathbf{v}) \mathbf{v} + \mathbf{g}_1(\mathbf{R})]) \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Recordando (C.8), e tendo em conta que a  $\mathbf{d} = [1, 0, 0]'$  corresponde  $\Delta = -\frac{1}{V_p} \mathbf{r}_x$ , pode reescrever-se (C.17), tendo-se finalmente

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -[1 \ 0 \ 0] \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta + \\ &\quad z_2 \left( [1 \ 0 \ 0] \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_1 u_1 - [1 \ 0 \ 0] \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{D}_v(\mathbf{v}) \mathbf{v} + \mathbf{g}_1(\mathbf{R})] \right) \\ &= \boldsymbol{\omega}' \mathbf{S}([1 \ 0 \ 0]') \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta + \\ &\quad z_2 \left( [1 \ 0 \ 0] \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_1 u_1 - [1 \ 0 \ 0] \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{D}_v(\mathbf{v}) \mathbf{v} + \mathbf{g}_1(\mathbf{R})] \right) \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Fazendo

$$u_1 = \frac{1}{[1 \ 0 \ 0] \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_1} \left( [1 \ 0 \ 0] \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{D}_v(\mathbf{v}) \mathbf{v} + \mathbf{g}_1(\mathbf{R})] - k_2 z_2 \right) \quad (\text{C.19})$$

e igualando  $\mathbf{B}_2' \boldsymbol{\omega}$  a  $\mathbf{B}_2' \boldsymbol{\omega}_d$ ,

$$\boldsymbol{\omega}_d = -\mathbf{K}_1 \mathbf{S}([1 \ 0 \ 0]') \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta \quad (\text{C.20})$$

com  $\mathbf{K}_1 = \text{diag}\{0, k_{12}, k_{13}\}$ ,  $k_{12} > 0$ ,  $k_{13} > 0$ ,  $k_2 > 0$ , torna-se  $\dot{V}_1$  negativa semi-definida. Mostra-se no entanto que o ponto não coincidente com a origem  $(z_1, z_2) = (\mathbf{0}, 0)$  em que  $\dot{V}_1 = 0$  é um ponto de equilíbrio instável.

Como  $\boldsymbol{\omega}$  não é uma entrada de controlo, e seguindo a técnica construtiva de *backstepping*, introduza-se uma terceira variável de erro

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{B}_2' (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d) \quad (\text{C.21})$$

e defina-se a função de *Lyapunov* aumentada

$$V_2 = \frac{1}{2} \mathbf{z}_1' \mathbf{H}_L \mathbf{z}_1 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} \mathbf{z}_3' \mathbf{z}_3 \quad (\text{C.22})$$

Derivando (C.22) em ordem ao tempo, e tendo em conta (C.19), (C.20) e (C.21), pode escrever-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -[\mathbf{S}([1 \ 0 \ 0]') \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta]' \mathbf{K}_1 [\mathbf{S}([1 \ 0 \ 0]') \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta] + \\ &\quad -k_2 z_2^2 + \mathbf{z}_3' \mathbf{B}_2' \mathbf{S}([1 \ 0 \ 0]') \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta + \\ &\quad + \mathbf{z}_3' \mathbf{B}_2' (\dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_d) \\ &= -[\mathbf{S}([1 \ 0 \ 0]') \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta]' \mathbf{K}_1 [\mathbf{S}([1 \ 0 \ 0]') \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta] + \\ &\quad -k_2 z_2^2 + \mathbf{z}_3' \mathbf{B}_2' [\dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{S}([1 \ 0 \ 0]') \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta] \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Considerando a dinâmica de  $\boldsymbol{\omega}$  (3.47) pode reescrever-se (C.23)

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= [\mathbf{S}([1 \ 0 \ 0]') \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta]' \mathbf{K}_1 [\mathbf{S}([1 \ 0 \ 0]') \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta] - k_2 z_2^2 + \\ &\quad + \mathbf{z}_3' [\mathbf{B}_2' \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_2 - \mathbf{B}_2' \mathbf{J}^{-1} [\mathbf{S}(\mathbf{v}) \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{D}_\omega(\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} + \mathbf{g}_2(\mathbf{R})] + \\ &\quad - \mathbf{B}_2' \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{B}_2' \mathbf{S}([1 \ 0 \ 0]') \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \Delta] \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Fazendo

$$\mathbf{u}_2 = (\mathbf{B}_2' \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}_2)^{-1} [\mathbf{B}_2' (\mathbf{J}^{-1} [\mathbf{S}(\mathbf{v}) \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{D}_\omega(\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} + \mathbf{g}_2(\mathbf{R})] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \mathbf{S}([1 \ 0 \ 0]') \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \boldsymbol{\Delta}) - \mathbf{K}_3 \mathbf{z}_3] \quad (\text{C.25})$$

com  $\mathbf{K}_3 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  positiva definida, torna-se  $\dot{V}_2$  negativa semi-definida, com  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_d$  dado por

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d &= -\mathbf{K}_1 \mathbf{S}([1 \ 0 \ 0]') \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \boldsymbol{\Delta} = \\ &= \frac{1}{V_p} \mathbf{K}_1 \mathbf{S}([1 \ 0 \ 0]') \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \mathbf{H}_R \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \boldsymbol{\Delta} = \\ &= \mathbf{K}_1 \mathbf{S}([1 \ 0 \ 0]') \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \boldsymbol{\Delta} \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

### C.3 Análise de Convergência

Na análise de convergência assume-se a hipótese de fluatibilidade neutra, i.e., assume-se que a força de impulsão do veículo submarino autónomo iguala a força gravítica nele exercida. Trata-se de uma hipótese plausível uma vez que, para veículos com fluatibilidade não neutra, existe necessidade de, quando se pretende que o veículo se mantenha imóvel, compensar a diferença de forças e portanto gastar energia, o que não é de todo aconselhável neste tipo de veículos, que possuem normalmente recursos limitados. A existência de uma diferença entre a força gravítica e a força de impulsão pode ser interpretada, para fins de controlo, como a existência de uma força exterior, como as correntes no oceanos, ou o vento em veículos de superfície, situações que não são abordadas neste trabalho devido á complexidade acrescida. Sob esta hipótese o termo  $\mathbf{g}_1(\mathbf{R})$  na dinâmica do veículo é nulo.

A função de *Lyapunov* (C.22) é, por construção, positiva definida para os valores factíveis da variável de erro  $\mathbf{z}_1$ , tal como acontece no caso 2D. Por outro lado, a lei de controlo dada por (C.19) e (C.25) torna, por construção,  $\dot{V}_2$  negativa semi-definida, sendo o ponto não interessante em que  $\dot{V}_2$  também se anula um ponto de equilíbrio instável (a dedução é idêntica para o caso 2D), pelo que as variáveis de erro  $\mathbf{z}_1$  e  $z_2$  convergem global e assintoticamente para zero, com algum abuso de linguagem, uma vez que existe outro ponto de equilíbrio para além da origem. Tem-se assim convergência quase global (*almost global*) assintótica. Resta portanto provar que a velocidade lateral do veículo  $[v \ w]'$  também converge para zero. Tomando o limite das velocidades angulares  $[q \ r]'$  tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{(\mathbf{z}_1, z_2, z_3) \rightarrow (\mathbf{0}, 0, 0)} \begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} &= \lim_{(\mathbf{z}_1, z_2, z_3) \rightarrow (\mathbf{0}, 0, 0)} \begin{bmatrix} q_d \\ r_d \end{bmatrix} \\ &= \lim_{(\mathbf{z}_1, z_2, z_3) \rightarrow (\mathbf{0}, 0, 0)} -\mathbf{B}_2' \mathbf{K}_1 \mathbf{S}([1 \ 0 \ 0]') \mathbf{H}_Q^{-1} \mathbf{H}'_R \boldsymbol{\Delta} \\ &= \mathbf{B}_2' \mathbf{K}_1 \mathbf{S}([1 \ 0 \ 0]') [1 \ 0 \ 0]' = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Reescrevendo a dinâmica de  $[v \ w]'$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} &= \mathbf{B}_2' \mathbf{M}^{-1} [-\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{M} \mathbf{v} - \mathbf{D}_v(\mathbf{v}) \mathbf{v} + \mathbf{b}_1 u_1] \\ &= -\mathbf{B}_2' \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{M} \mathbf{v} - \mathbf{B}_2' \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}_v(\mathbf{v}) \mathbf{v} \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

onde não aparece o termo devido á força gravítica e à força de impulsão, sob a hipótese de flutuabilidade neutra. Tomando agora o limite, e atendendo a (C.27), tem-se

$$\lim_{\substack{\mathbf{z}_1 \rightarrow \mathbf{0} \\ z_2 \rightarrow 0}} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = -\mathbf{B}_2' \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}_v(\mathbf{v}) \mathbf{v} \quad (\text{C.29})$$

Como  $\mathbf{B}_2' \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}_v(\mathbf{v})$  é positiva definida, segue-se que que  $[v \ w]'$  converge, no limite, exponencialmente para zero. Conclui-se assim que a lei de controlo proposta é adequada à fase de *homing* de um veículo autónomo submarino sub-actuado com dinâmica idêntica à descrita na Secção 3.2.1, assumindo a hipótese de flutuabilidade neutra.



# Apêndice D

## Deduções da Secção 4.2

### D.1 Dedução da dinâmica de $\mathbf{v}_d$

A velocidade desejada  $\mathbf{v}_d$ , que aqui se reescreve, é dada por

$$\mathbf{v}_d = \frac{V_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2}} \left[ \frac{1}{4Y} k_e e \mathbf{I} - \mathbf{S}(1) \right] \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} \quad (\text{D.1})$$

Derivando (D.1) em ordem ao tempo tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_d &= \frac{V_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2}} \left[ \frac{1}{4Y} k_e e \mathbf{I} - \mathbf{S}(1) \right] \frac{\dot{\mathbf{e}}_1 - \dot{\mathbf{e}}_2}{2Y} + \\ &+ \frac{V_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2}} \frac{1}{4Y} k_e \dot{e} \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} + \\ &- \frac{V_d}{2\sqrt{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2}} \frac{2\left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e \dot{e}}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \left[ \frac{1}{4Y} k_e e \mathbf{I} - \mathbf{S}(1) \right] \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Substituindo a dinâmica de  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  descrita por (4.2) em (D.2) e agrupando termos pode escrever-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_d &= -\frac{V_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2}} \left[ \frac{1}{4Y} k_e e \mathbf{I} - \mathbf{S}(1) \right] \frac{\mathbf{S}(\omega) (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{2Y} + \\ &+ \frac{V_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2}} \left[ \frac{1}{4Y} k_e - \frac{\left(\frac{k_e}{4Y}\right)^3 e^2}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \right] \dot{e} \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} + \\ &+ \frac{V_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2}} \frac{\left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \dot{e} \mathbf{S}(1) \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Após alguns cálculos algébricos simples pode reescrever-se (D.3)

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}}_d &= -\frac{V_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2}} \mathbf{S}(\omega) \left[ \frac{1}{4Y} k_e e \mathbf{I} - \mathbf{S}(1) \right] \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} + \\
&+ \frac{V_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2}} \frac{\frac{1}{4Y} k_e + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^3 e^2 - \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^3 e^2}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \dot{e} \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} + \\
&+ \frac{V_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2}} \frac{\left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \dot{e} \mathbf{S}(1) \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} \\
&= -\frac{V_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2}} \mathbf{S}(\omega) \left[ \frac{1}{4Y} k_e e \mathbf{I} - \mathbf{S}(1) \right] \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} + \\
&\frac{k_e}{4Y} \frac{V_d}{\left[1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2\right]^{3/2}} \left[ \mathbf{I} + \frac{k_e}{4Y} e \mathbf{S}(1) \right] \dot{e} \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y}
\end{aligned} \tag{D.4}$$

Usando uma das propriedades da matriz  $\mathbf{S}(1)$ , que permite decompor a matriz identidade no produto

$$\mathbf{I} = -\mathbf{S}(1)' \mathbf{S}(1) \tag{D.5}$$

pode reescrever-se (D.4) tendo-se

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}}_d &= -\frac{V_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2}} \mathbf{S}(\omega) \left[ \frac{1}{4Y} k_e e \mathbf{I} - \mathbf{S}(1) \right] \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} + \\
&\frac{k_e}{4Y} \frac{\dot{e}}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \mathbf{S}(1) \frac{V_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2}} \left[ \frac{k_e}{4Y} e \mathbf{I} - \mathbf{S}(1) \right] \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y}
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Substituindo (D.1) em (D.6) tem-se

$$\dot{\mathbf{v}}_d = -\mathbf{S}(\omega) \mathbf{v}_d + \frac{k_e}{4Y} \frac{\dot{e}}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \mathbf{S}(1) \mathbf{v}_d \tag{D.7}$$

Substituindo a dinâmica do erro  $e$  (4.10) em (D.7) tem-se finalmente

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}}_d &= -\mathbf{S}(\omega) \mathbf{v}_d - \frac{k_e}{4Y} \frac{2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \mathbf{v}}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \mathbf{S}(1) \mathbf{v}_d \\
&= -\left[ \omega + \frac{k_e}{4Y} \frac{2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)' \mathbf{v}}{1 + \left(\frac{k_e}{4Y}\right)^2 e^2} \right] \mathbf{S}(1) \mathbf{v}_d
\end{aligned} \tag{D.8}$$

## D.2 Dedução da dinâmica de $\alpha_1$

Para derivar a dinâmica de  $\alpha_1$  reescreva-se (4.37)

$$\cos(\alpha_1) = \frac{[0 \ 1] (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{2Y} \quad (\text{D.9})$$

$$\sin(\alpha_1) = -\frac{[1 \ 0] (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{2Y} \quad (\text{D.10})$$

Derivando (D.9) tem-se

$$\frac{[0 \ 1] (\dot{\mathbf{e}}_1 - \dot{\mathbf{e}}_2)}{2Y} = -\sin(\alpha_1)\dot{\alpha}_1 \quad (\text{D.11})$$

Substituindo (4.2) em (D.11) pode escrever-se

$$\begin{aligned} -\frac{[0 \ 1] \mathbf{S}(\omega) (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{2Y} &= -\sin(\alpha_1)\dot{\alpha}_1 \\ \Leftrightarrow \omega \frac{[1 \ 0] (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{2Y} &= \sin(\alpha_1)\dot{\alpha}_1 \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Substituindo (D.10) em (D.12) tem-se

$$\begin{aligned} \omega \frac{[1 \ 0] (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{2Y} &= -\dot{\alpha}_1 \frac{[1 \ 0] (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{2Y} \\ \Leftrightarrow \dot{\alpha}_1 &= -\omega, \quad \forall_{[1 \ 0](\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \neq 0} \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Derivando agora (D.10) tem-se

$$\cos(\alpha_1)\dot{\alpha}_1 = -\frac{[1 \ 0] (\dot{\mathbf{e}}_1 - \dot{\mathbf{e}}_2)}{2Y} \quad (\text{D.14})$$

Substituindo de novo (4.2) em (D.14) tem-se

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_1)\dot{\alpha}_1 &= \frac{[1 \ 0] \mathbf{S}(\omega) (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{2Y} \\ \Leftrightarrow \cos(\alpha_1)\dot{\alpha}_1 &= -\omega \frac{[0 \ 1] (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{2Y} \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Substituindo (D.9) em (D.15) tem-se então

$$\begin{aligned} \frac{[0 \ 1] (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{2Y} \dot{\alpha}_1 &= -\omega \frac{[0 \ 1] (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{2Y} \\ \Leftrightarrow \dot{\alpha}_1 &= -\omega, \quad \forall_{[0 \ 1](\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \neq 0} \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Tendo em conta (D.13) e (D.16) tem-se finalmente

$$\dot{\alpha}_1 = -\omega \quad (\text{D.17})$$



# Apêndice E

## Deduções da Secção 4.3

### E.1 Dedução da dinâmica de $\mathbf{v}_d$

Nesta secção pretende-se determinar a derivada temporal da velocidade desejada  $\mathbf{v}_d$  (4.73). Reescreva-se (4.73)

$$\mathbf{v}_d = \frac{V_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_{e1}}{2Y}\right)^2 e_1^2 + \left(\frac{k_{e2}}{2Y}\right)^2 e_2^2}} \left[ \frac{k_{e1}}{2Y} e_1 \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} + \frac{k_{e2}}{2Y} e_2 \frac{\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4}{2Y} + \frac{(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \times (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)}{(2Y)^2} \right] \quad (\text{E.1})$$

Derivando (E.1), e designando  $\mu$  por

$$\mu = 1 + \left(\frac{k_{e1}}{2Y}\right)^2 e_1^2 + \left(\frac{k_{e2}}{2Y}\right)^2 e_2^2 \quad (\text{E.2})$$

tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_d = & \frac{V_d}{\sqrt{\mu}} \left[ \frac{k_{e1}}{2Y} e_1 \frac{\dot{\mathbf{e}}_1 - \dot{\mathbf{e}}_2}{2Y} + \frac{k_{e2}}{2Y} e_2 \frac{\dot{\mathbf{e}}_3 - \dot{\mathbf{e}}_4}{2Y} + \frac{(\dot{\mathbf{e}}_1 - \dot{\mathbf{e}}_2) \times (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)}{(2Y)^2} + \frac{(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \times (\dot{\mathbf{e}}_3 - \dot{\mathbf{e}}_4)}{(2Y)^2} \right] + \\ & + \frac{V_d}{\sqrt{\mu}} \left[ \frac{k_{e1}}{2Y} \dot{e}_1 \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} + \frac{k_{e2}}{2Y} \dot{e}_2 \frac{\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4}{2Y} \right] + \\ & - \frac{\left(\frac{k_{e1}}{2Y}\right)^2 e_1 \dot{e}_1 + \left(\frac{k_{e2}}{2Y}\right)^2 e_2 \dot{e}_2}{\mu} \left[ \frac{k_{e1}}{2Y} e_1 \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} + \frac{k_{e2}}{2Y} e_2 \frac{\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4}{2Y} + \frac{(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \times (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)}{(2Y)^2} \right] \quad (\text{E.3}) \end{aligned}$$

Substituindo (4.63) em (E.3), e reagrupando termos, tem-se

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}}_d &= \frac{V_d}{\sqrt{\mu}} \left[ -\frac{k_{e1}}{2Y} e_1 \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} - \frac{k_{e2}}{2Y} e_2 \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \frac{\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4}{2Y} + \right] + \\
&\quad - \frac{V_d}{\sqrt{\mu}} \left( \frac{[\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)] \times (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4) + (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \times [\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)]}{(2Y)^2} \right) + \\
&\quad + \frac{V_d}{\sqrt{\mu}} \left( \frac{k_{e1}}{2Y} \dot{e}_1 - \frac{\left(\frac{k_{e1}}{2Y}\right)^3 e_1^2 \dot{e}_1 + \frac{k_{e1}}{2Y} \left(\frac{k_{e2}}{2Y}\right)^2 e_1 e_2 \dot{e}_2}{\mu} \right) \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} + \\
&\quad + \frac{V_d}{\sqrt{\mu}} \left( \frac{k_{e2}}{2Y} \dot{e}_2 - \frac{\frac{k_{e2}}{2Y} \left(\frac{k_{e1}}{2Y}\right)^2 e_1 e_2 \dot{e}_1 + \left(\frac{k_{e2}}{2Y}\right)^3 e_2^2 \dot{e}_2}{\mu} \right) \frac{\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4}{2Y} + \\
&\quad - \frac{V_d}{\sqrt{\mu}} \frac{\left(\frac{k_{e1}}{2Y}\right)^2 e_1 \dot{e}_1 + \left(\frac{k_{e2}}{2Y}\right)^2 e_2 \dot{e}_2}{\mu} \frac{(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \times (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)}{(2Y)^2}
\end{aligned} \tag{E.4}$$

Tendo em conta que  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})$  corresponde à forma matricial do produto externo por  $\boldsymbol{\omega}$ , e utilizando a propriedade do produto externo

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0 \tag{E.5}$$

pode simplificar-se (E.4)

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}}_d &= \frac{V_d}{\sqrt{\mu}} \left[ -\frac{k_{e1}}{2Y} e_1 \boldsymbol{\omega} \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} - \frac{k_{e2}}{2Y} e_2 \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4}{2Y} + \right] + \\
&\quad - \frac{V_d}{\sqrt{\mu}} \boldsymbol{\omega} \times \frac{(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \times (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)}{(2Y)^2} + \\
&\quad + \frac{V_d}{\sqrt{\mu}} \left( \frac{k_{e1}}{2Y} \dot{e}_1 - \frac{\left(\frac{k_{e1}}{2Y}\right)^3 e_1^2 \dot{e}_1 + \frac{k_{e1}}{2Y} \left(\frac{k_{e2}}{2Y}\right)^2 e_1 e_2 \dot{e}_2}{\mu} \right) \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} + \\
&\quad + \frac{V_d}{\sqrt{\mu}} \left( \frac{k_{e2}}{2Y} \dot{e}_2 - \frac{\frac{k_{e2}}{2Y} \left(\frac{k_{e1}}{2Y}\right)^2 e_1 e_2 \dot{e}_1 + \left(\frac{k_{e2}}{2Y}\right)^3 e_2^2 \dot{e}_2}{\mu} \right) \frac{\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4}{2Y} + \\
&\quad - \frac{V_d}{\sqrt{\mu}} \frac{\left(\frac{k_{e1}}{2Y}\right)^2 e_1 \dot{e}_1 + \left(\frac{k_{e2}}{2Y}\right)^2 e_2 \dot{e}_2}{\mu} \frac{(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \times (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)}{(2Y)^2} \\
&= -\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{v}}_d + \\
&\quad + \frac{V_d}{\sqrt{\mu}} \left( \frac{k_{e1}}{2Y} \dot{e}_1 - \frac{\left(\frac{k_{e1}}{2Y}\right)^3 e_1^2 \dot{e}_1 + \frac{k_{e1}}{2Y} \left(\frac{k_{e2}}{2Y}\right)^2 e_1 e_2 \dot{e}_2}{\mu} \right) \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} + \\
&\quad + \frac{V_d}{\sqrt{\mu}} \left( \frac{k_{e2}}{2Y} \dot{e}_2 - \frac{\frac{k_{e2}}{2Y} \left(\frac{k_{e1}}{2Y}\right)^2 e_1 e_2 \dot{e}_1 + \left(\frac{k_{e2}}{2Y}\right)^3 e_2^2 \dot{e}_2}{\mu} \right) \frac{\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4}{2Y} + \\
&\quad - \frac{V_d}{\sqrt{\mu}} \frac{\left(\frac{k_{e1}}{2Y}\right)^2 e_1 \dot{e}_1 + \left(\frac{k_{e2}}{2Y}\right)^2 e_2 \dot{e}_2}{\mu} \frac{(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \times (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)}{(2Y)^2}
\end{aligned} \tag{E.6}$$

Reduzindo termos ao mesmo denominador e simplificando-se pode ainda escrever-se

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}}_d &= -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_d + \\
&+ \frac{V_d}{\sqrt{\mu}} \frac{\frac{k_{e1}}{2Y} \dot{e}_1 + \frac{k_{e1}}{2Y} \left(\frac{k_{e2}}{2Y}\right)^2 e_2^2 \dot{e}_1 - \frac{k_{e1}}{2Y} \left(\frac{k_{e2}}{2Y}\right)^2 e_1 e_2 \dot{e}_2}{\mu} \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} + \\
&+ \frac{V_d}{\sqrt{\mu}} \frac{\frac{k_{e2}}{2Y} \dot{e}_2 + \frac{k_{e2}}{2Y} \left(\frac{k_{e1}}{2Y}\right)^2 e_1^2 \dot{e}_2 - \frac{k_{e2}}{2Y} \left(\frac{k_{e1}}{2Y}\right)^2 e_1 e_2 \dot{e}_1}{\mu} \frac{\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4}{2Y} + \\
&- \frac{V_d}{\sqrt{\mu}} \frac{\left(\frac{k_{e1}}{2Y}\right)^2 e_1 \dot{e}_1 + \left(\frac{k_{e2}}{2Y}\right)^2 e_2 \dot{e}_2}{\mu} \frac{(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \times (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)}{(2Y)^2}
\end{aligned} \tag{E.7}$$

Usando as igualdades

$$-\frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} \times \frac{(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \times (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)}{(2Y)^2} = \frac{\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4}{2Y} \tag{E.8}$$

$$\frac{\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4}{2Y} \times \frac{(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \times (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)}{(2Y)^2} = \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} \tag{E.9}$$

mostra-se, após cálculos algébricos imediatos, que

$$\dot{\mathbf{v}}_d = (-\boldsymbol{\omega} + \mathbf{v}_{dv}) \times \mathbf{v}_d \tag{E.10}$$

com  $\mathbf{v}_{dv}$  dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{dv} &= -\frac{k_{e2}}{2Y} \frac{\dot{e}_2 + \left(\frac{k_{e1}e_1}{2Y}\right)^2 \dot{e}_2 - \left(\frac{k_{e1}}{2Y}\right)^2 e_1 e_2 \dot{e}_1}{1 + \left(\frac{k_{e1}e_1}{2Y}\right)^2 + \left(\frac{k_{e2}e_2}{2Y}\right)^2} \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2Y} + \\
&+ \frac{k_{e1}}{2Y} \frac{\dot{e}_1 + \left(\frac{k_{e2}e_2}{2Y}\right)^2 \dot{e}_1 - \left(\frac{k_{e2}}{2Y}\right)^2 e_1 e_2 \dot{e}_2}{1 + \left(\frac{k_{e1}e_1}{2Y}\right)^2 + \left(\frac{k_{e2}e_2}{2Y}\right)^2} \frac{\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4}{2Y}
\end{aligned} \tag{E.11}$$

## E.2 Dedução de $u_2$

Tal como é referido na Secção 4.3.4,  $\boldsymbol{\omega}$  não é uma entrada de controlo real, pelo que é imperativo integrar a dinâmica desta variável de modo a que o valor desta variável converja para o valor desejado  $\boldsymbol{\omega}_d$ . Tal pode ser conseguido recorrendo à técnica de *backstepping*. Defina-se então a variável de erro

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{B}_2' (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d) \tag{E.12}$$

e a função de *Lyapunov* aumentada

$$V_3 = \frac{1}{2} \mathbf{z}_1' \mathbf{H}_L \mathbf{z}_1 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} \mathbf{z}_3' \mathbf{z}_3 \tag{E.13}$$

Derivando (E.13) e tendo em conta (4.82), (4.83) e (E.12), pode escrever-se

$$\begin{aligned}
\dot{V}_3 &= -V_d^2 [V_d \mathbf{S}([1, 0, 0]') \mathbf{v}_d]' \mathbf{K}_1 [V_d \mathbf{S}([1, 0, 0]') v_d] - k_2 z_2^2 + \\
&\quad - (\mathbf{B}_2 \mathbf{z}_3)' \mathbf{S}([1, 0, 0]') \mathbf{v}_d + \mathbf{z}_3' \dot{\mathbf{z}}_3 \\
&= -V_d^2 [V_d \mathbf{S}([1, 0, 0]') \mathbf{v}_d]' \mathbf{K}_1 [V_d \mathbf{S}([1, 0, 0]') v_d] - k_2 z_2^2 + \\
&\quad + \mathbf{z}_3' \mathbf{B}_2' [\dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \mathbf{S}([1, 0, 0]') \mathbf{v}_d]
\end{aligned} \tag{E.14}$$

Substituindo a dinâmica de  $\boldsymbol{\omega}$  (3.47) em (E.14) tem-se

$$\begin{aligned}
\dot{V}_3 &= -V_d^2 [V_d \mathbf{S}([1, 0, 0]') \mathbf{v}_d]' \mathbf{K}_1 [V_d \mathbf{S}([1, 0, 0]') v_d] - k_2 z_2^2 + \\
&\quad + \mathbf{z}_3' \mathbf{B}_2' (\mathbf{J}^{-1} [-\mathbf{S}(\mathbf{v}) \mathbf{M} \mathbf{v} - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{D}_{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} - \mathbf{g}_2(\mathbf{R}) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_2] - \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \mathbf{S}([1, 0, 0]') \mathbf{v}_d) \\
&= -V_d^2 [V_d \mathbf{S}([1, 0, 0]') \mathbf{v}_d]' \mathbf{K}_1 [V_d \mathbf{S}([1, 0, 0]') v_d] - k_2 z_2^2 + \\
&\quad + \mathbf{z}_3' \mathbf{B}_2' \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_2 + \\
&\quad - \mathbf{z}_3' \mathbf{B}_2' \mathbf{J}^{-1} [\mathbf{S}(\mathbf{v}) \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{D}_{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} + \mathbf{g}_2(\mathbf{R})] + \\
&\quad - \mathbf{z}_3' \mathbf{B}_2' [\dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{S}([1, 0, 0]') \mathbf{v}_d]
\end{aligned} \tag{E.15}$$

Fazendo

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_2 &= (\mathbf{B}_2' \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}_2)^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{J}^{-1} [\mathbf{S}(\mathbf{v}) \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{D}_{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} + \mathbf{g}_2(\mathbf{R})] + \\
&\quad + (\mathbf{B}_2' \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}_2)^{-1} (\mathbf{B}_2' \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{B}_2' \mathbf{S}([1, 0, 0]') \mathbf{v}_d - \mathbf{K}_3 \mathbf{z}_3)
\end{aligned} \tag{E.16}$$

com  $\mathbf{K}_3 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  positiva definida, torna-se  $\dot{V}_3$  negativa semi-definida, como se pretendia demonstrar.

# Apêndice F

## Modelo para simulação em MATLAB

A simulação em ambiente MATLAB foi realizada desenhando os modelos genéricos dos veículos 2D e 3D apresentados nas secções 3.1.1 e 3.2.1, respectivamente. Os parâmetros dos mesmos são variáveis globais que se configuram antes de se proceder às diversas simulações. Como o modelo do veículo 2D, em termos de blocos de simulação é semelhante, ao modelo 3D, apenas se apresenta o modelo 3D.

Na Figura F.1 encontra-se o bloco correspondente ao modelo do AUV. As entradas são  $u_u$ ,  $u_q$  e  $u_r$ , que correspondem a  $u_1$ ,  $\tau_q$  e  $\tau_r$ , respectivamente. As saídas são a posição do veículo no referencial universal  $(x, y, z)$ , a descrição da orientação do veículo com os ângulos de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$ , a velocidade linear  $\mathbf{v} = [u, v, w]'$ , a velocidade angular  $\boldsymbol{\omega} = [p, q, r]'$ , aceleração linear  $\dot{\mathbf{v}} = [\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}]'$  e a aceleração angular  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = [\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}]'$

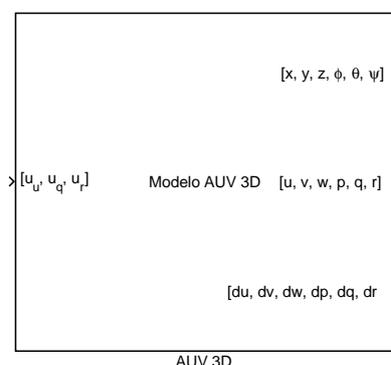


Figura F.1 - Bloco que implementa o modelo do veículo 3D

Na Figura F.2 apresenta-se o diagrama de blocos completo do veículo. As funções Cinematica e Dinamica calculam a cinemática e dinâmica do veículo, respectivamente. A aceleração do veículo, descrita no seu referencial, calculada pela função Dinamica, é integrada, tendo-se a velocidade do mesmo. A função Cinematica converte a velocidade do veículo descrita no seu referencial para o referencial do mundo, que integrada dá origem à posição e orientação do mesmo no referencial do mundo.

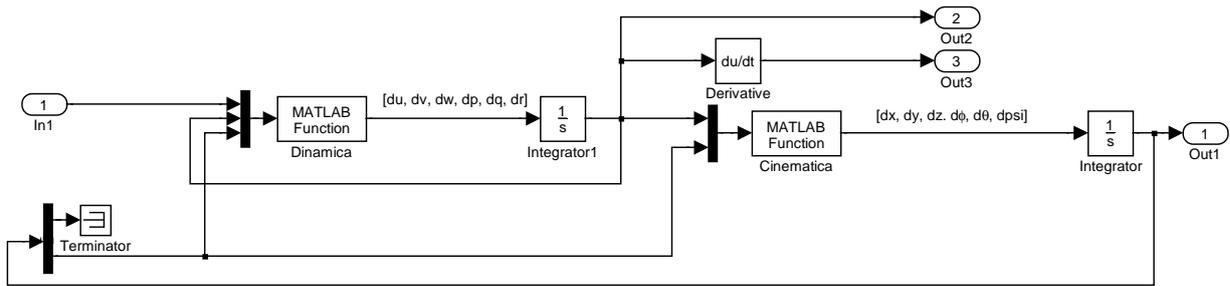


Figura F.2 - Implementação do modelo do veículo 3D

Na simulação do sistema USBL os tempos de propagação são calculados directamente com base na distância entre as posições dos receptores e a posição de cada emissor. Note-se que, dada a posição e orientação do veículo no referencial do mundo, as posições dos receptores são imediatamente conhecidas (para efeitos práticos de simulação).

# Referências

- [1] Ravelo, A. C. and Wara, M. W. The role of the tropical oceans on global climate during a warm period and a major climate transition. *Oceanography*, 17(3):32–41, September 2004.
- [2] Kendrick Taylor. Rapid Climate Change. *American Scientist*, 87:320–327, July–August 1999.
- [3] Gregory J. M. Booth, B. B. and R. B. Thorpe. Influence of the ocean on Climate Sensitivity. *EGS - AGU - EUG Joint Assembly, Abstracts from the meeting held in Nice, France*, pages 11983–+, April 2003.
- [4] Bigg, G. *The Oceans and Climate*. Cambridge University Press, 2nd edition, December 2003.
- [5] Hellebrand, E and Snow, J. Volcanoes at the bottom of the sea. *MaxPlanckResearch*, pages 10–11, March 2001.
- [6] Lopez, C. T. and Schweickert, R. A. and Lahren M. M. and Howle, J. and Kitts, C. and Ota, J. M. and Richards, B. Submarine Geology within the Western part of Lake Tahoe, California. *Proceedings of the 2004 GSA Annual Meeting, Denver CO*, November 2004.
- [7] Morgado, Marco. Sistema de navegação inercial para veículos submarinos autónomos. Relatório preliminar, IST, Fevereiro 2005.
- [8] Rouche, N., Habets, P. and Laloy, M. *Stability Theory by Lyapunov's Direct Method*. Springer-Verlag, New York Inc., 1977.
- [9] Slotine, J.J. E and Li, W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, Inc, 1991.
- [10] Podder, T. and Sibenac, M. and Bellingham, J. AUV Docking System for Sustainable Science Missions. *Proceedings. ICRA '04. 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 5:4478–4484, April–May 2004.
- [11] Fisher, M.A. and Bolles, R.C. Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography. *Communications of the ACM*, 24(6):381–395, June 1981.
- [12] Aguiar, A. P. and Hespanha, J. P. Position Tracking of Underactuated Vehicles. *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, 3:1988 – 1993, June 2003.

- [13] Aguiar, A. P. and Cremean, L. and Hespanha, J. P. Position Tracking for a Nonlinear Underactuated Hovercraft: Controller Design and Experimental Results. *Proceedings. 42nd IEEE Conference on Decision and Control, 2003*, 4:3858 – 3863, December 2003.
- [14] Aguiar, A. Pedro and Pascoal, António M. Dynamic positioning and way-point tracking of underactuated AUVs in the presence of ocean currents. *Proc. 41st IEEE Conference on Decision and Control*, 2:2105 – 2110, December 2002.
- [15] Cremean, L., Dunbar, W.B., van Gogh, D., Hickey, J., Klavins, E., Meltzer, J. and Murray, R.M. The Caltech Multi-Vehicle Wireless Testbed. *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, 1:86–88, December 2002.
- [16] C. Silvestre and A. Pascoal. Control of the INFANTE AUV using gain scheduled static output feedback. *Control Engineering Practice*, December 2004.
- [17] Brockett, R. W. Asymptotic stability and feedback stabilization. In R. S. Millman R. W. Brockett and H. J. Sussmann, editors, *Differential Geometric Control Theory*, pages 181–191. Birkhauser, Boston, 1983.
- [18] Wichlund, K.Y., Sordalen, O. J. and Egeland, O. Control of vehicles with second-order nonholonomic constraints: Underactuated vehicles. *Proc. 3rd Eur. Control Conf.*, pages 3086–3091, 1995.
- [19] Reyhanoglu, M. Control and Stabilization of an underactuated surface vessel. *Proc. 35th IEEE Conf. Decision and Control*, pages 2371–2376, 1996.
- [20] Pettersen, K. Y. and Nijmeijer, H. Global Practical Stabilization and Tracking for an Underactuated Ship - a Combined Averaging and Backstepping Approach. *Proc. IFAC Conf. Systems Structure Control*, pages 59–64, 1998.
- [21] Mazenc, F., Pettersen, K. Y. and Nijmeijer, H. Global Uniform Asymptotic Stabilization of an Underactuated Surface Vessel. *Proc. 41st IEEE Conference on Decision and Control*, 1:510–515, December 2002.
- [22] Indiveri, G., Aicardi, M. and Casalino, G. Nonlinear Time-Invariant Feedback Control of an Underactuated Marine Vehicle Along a Straight Course. *Proc. 5th IFAC Conference on Manoeuvring and Control of Marine Craft*,, pages 221–226, August 2000.