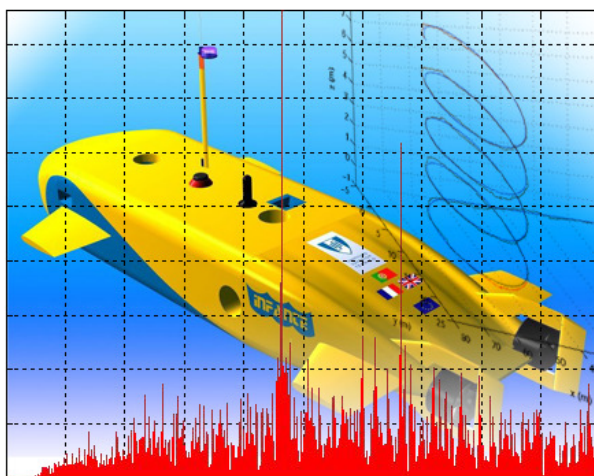




Universidade Técnica de Lisboa Instituto Superior Técnico



Sistema de Navegação Inercial com ajuda USBL

Marco Martins Morgado, Nº 50275 - Sistemas, Decisão e Controlo

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores Relatório do Trabalho Final de Curso 43/2004/L

Professor Orientador: Doutor Paulo Jorge Coelho Ramalho Oliveira
Professor Acompanhante: Doutor Carlos Jorge Ferreira Silvestre

Setembro 2005

”Nunca ande pelo caminho traçado, pois ele
conduz somente até onde os outros foram.”
Alexandre Graham Bell

Agradecimentos

Gostaria de expressar antes de mais os meus profundos agradecimentos ao Professor Paulo Oliveira e ao Professor Carlos Silvestre pelo desafio que me endereçaram de realizar este trabalho e integrar uma excelente equipa. Obrigado pelo apoio, confiança, sabedoria e enorme disponibilidade demonstrados no desenrolar do trabalho.

Um especial agradecimento ao Eng. José Vasconcelos cuja ajuda foi muito preciosa e imprescindível ao longo de todo o trabalho. Sempre disponível e bem disposto, não me esquecerei das nossas divertidas conversas e momentos de grande inspiração. Obrigado.

Pelo excelente profissionalismo, disponibilidade em ajudar sempre que necessário e por coordenar um excelente ambiente de trabalho, gostaria também de enviar uma palavra especial de agradecimento ao Eng. João Serralha.

Aos meus colegas e amigos Duarte, Pedro Gomes, Pedro Agostinho, Mário Florêncio, Mário Vicente, Gareth, Pedro Cruz, Manel, Alex, Júlio, Cláudia e Diogo, companheiros da torre norte, pelos excelentes momentos de boa disposição, jogos e os sempre agradáveis lanches conjuntos.

Ao meu colega e amigo Pedro Batista com quem nos últimos 4 anos formei uma excelente e coesa equipa de trabalho. *I'll team up with you any given day...*

Não poderia deixar de agradecer a todos os meus amigos em Portugal e em Moçambique cujas palavras de encorajamento, paciência e companhia me suportaram ao longo do trabalho.

À minha família, sem a qual estaria perdido. Obrigado pelo apoio, amor e companhia não só nos momentos mais felizes e fáceis mas também nos mais difíceis e delicados. Tia, obrigado pelo apoio nos últimos 5 anos. Sem ti, a minha estadia em Portugal não teria sido tão agradável como foi.

Aos meus irmãos Bruno, Ruben, Pedro, Jahir, Zaza, Ricardo e Assif pelos excelentes momentos de amizade e companhia proporcionados ao longo da vida. Pai e Mãe, obrigado pelo vosso amor, confiança, sabedoria e apoio incondicional. Espero ter retribuído pelo menos um infinitésimo e vos tenha feito orgulhosos. Vocês todos são os que fazem sentido trabalhar sempre com mais afínco, prazer e sonhar sempre mais alto.

Resumo

Este relatório aborda o desenvolvimento de um Sistema de Navegação Inercial (INS, de *Inertial Navigation Systems*) para aplicações subaquáticas auxiliado por um sistema de posicionamento acústico baseado na topologia USBL (*Ultra-Short Base Line*). Propõe-se neste trabalho uma nova estratégia de projecto do sistema de navegação baseada na informação directa dos receptores acústicos instalados a bordo do veículo em conjunto com um filtro de Kalman.

A solução clássica consiste numa estratégia de projecto resolvendo separadamente o problema de triangulação e o problema de fusão sensorial. Assim, neste trabalho, propõe-se também a resolução do problema utilizando uma estratégia clássica baseada nas posições dos emissores no referencial do veículo calculadas com base na informação dos receptores acústicos.

Com o objectivo de caracterizar os ruídos dos tempos de chegada dos sinais acústicos, estudam-se estratégias de processamento de sinal em ambiente subaquático utilizando técnicas de espalhamento espectral (SS, de *Spread-Spectrum*), que exploram as vantagens dos sinais SS face ao tradicionalmente utilizado pulso sinusoidal. Estes permitem a utilização de potências de transmissão mais baixas do que os pulsos sinusoidais. Permitem ainda um melhor desempenho em situações de utilização conjunta do canal e na rejeição de trajectos múltiplos dos sinais propagados.

Recorrendo a uma caracterização rigorosa dos ruídos das observações das posições relativas dos emissores, com base nos ruídos dos tempos de chegada dos sinais acústicos, é feita uma comparação, em condições idênticas, do desempenho das duas estratégias. Verifica-se que a nova estratégia no espaço dos sensores apresenta um erro quadrático médio de estimação da posição e orientação do veículo inferior ao da estratégia clássica e também um melhor desempenho na estimação das polarizações dos sensores inerciais.

Palavras Chave: INS, USBL, Filtragem de Kalman, *Direct Feedback*, *Spread-Spectrum*.

Abstract

This report presents the development of an Inertial Navigation System (INS) aided by an Ultra-Short Base Line (USBL) acoustic positioning system for underwater applications. A new design strategy for navigation systems is proposed, whereby the acoustic sensors information is exploited by resorting to the Extended Kalman filter.

The classical solution consists of solving separately the triangulation and the sensor fusion problems. In this work, and for benchmark purposes, a solution for the classical strategy is developed, based on the emitters relative positions computed from the acoustic sensors data.

The time of arrival stochastic characterization of the acoustic signals is addressed. Signal processing techniques are applied in underwater environments using Spread-Spectrum (SS) signals with considerable advantages over the commonly used sinusoidal pulse signals. Among those advantages is use of less transmission power compared to other modulation techniques, better performance in simultaneous propagation environments, and superior multi-path rejection.

Resorting to a rigorous stochastic characterization of the relative positions, based on acoustic sensors noises, the performance of both strategies are compared. The sensor based strategy achieves smaller position and orientation mean square estimation errors and better inertial sensors biases estimates.

Keywords: INS, USBL, Kalman Filtering, Direct Feedback, Spread-Spectrum.

Índice

Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vi
Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
1 Introdução	1
1.1 Receptores/Emissores	2
1.2 USBL/LUSBL	2
1.3 Estrutura do documento	3
2 Processamento de sinal	5
2.1 Estimação do tempo de chegada de um sinal	5
2.1.1 O filtro adaptado de um sinal	5
2.2 Estimação do tempo de chegada de um sinal sinusoidal	6
2.3 Estimação do tempo de chegada de um sinal SS	7
2.3.1 Dinâmica dos transdutores	8
2.3.2 Efeito de Doppler	9
2.3.3 Utilização simultânea do canal	10
2.3.4 Interpolação do sinal recebido	11
2.4 Algoritmo de detecção do tempo de chegada de um sinal	11
2.5 Protocolo de processamento de sinais para posicionamento	12
2.6 Comentários finais	13
3 Navegação inercial	15
3.1 Definição dos referenciais de navegação	15
3.2 Representação da orientação do veículo	16
3.2.1 Matriz de rotação	16
3.2.2 Ângulos de Euler	16
3.2.3 Vector de rotação	17
3.3 Sensores inerciais	18
3.3.1 Acelerómetros	18
3.3.2 Giroscópios	19
3.4 Sistema de navegação inercial	19

4	Sensores auxiliares	21
4.1	Magnetómetro	21
4.2	Sistema de posicionamento acústico	22
4.2.1	Tempos de chegada dos sinais	22
4.2.2	Direcção de um emissor	23
4.2.3	Distância de um emissor	25
5	Navegação inercial auxiliada	27
5.1	Topologia de realimentação directa	27
5.2	Modelo de erros do INS	29
5.2.1	Implementação utilizando o filtro de Kalman	29
5.3	Medida auxiliar do erro de orientação	30
5.4	Projecto no espaço das posições relativas	31
5.5	Projecto no espaço dos sensores	33
5.6	Análise de observabilidade	36
5.7	Implementação e resultados	37
5.8	Comentários finais	42
6	Conclusões	47
6.1	Trabalho futuro	48
A	Relação da saída do filtro adaptado com a autocorrelação	49
B	Geração de sinais SS	51
B.1	DSSS vs FHSS	51
B.2	Arquitectura proposta para geração e detecção de sinais SS	52
B.3	Sequências/Códigos PN	52
B.3.1	Tipos de sequências PN	53
C	Modelação da dinâmica dos transdutores	55
D	Perturbação da matriz de rotação	57
E	Propriedades do produto externo e das matrizes <i>skew-symmetric</i>	59
F	Derivada da norma de um vector	61
G	Filtros de Kalman discretos	63
G.1	Filtro de Kalman discreto	63
G.2	Filtro de Kalman discreto com matriz de ligação	65
G.3	Filtro de Kalman estendido	66
H	Caracterização estatística de $\mathbf{d}$, ρ e ${}^B\mathbf{p}_e$	69
H.1	Média e covariância do vector de tempos	69
H.2	Média e covariância da medida da direcção $\mathbf{d}$	70
H.3	Média e covariância da medida da distância ρ	71
H.4	Covariância entre as medidas da distância ρ e da direcção $\mathbf{d}$	72
H.5	Aproximação das posições relativas por uma distribuição normal	72

I	Modelo do veículo	77
I.1	Descrição física do veículo	77
I.2	Equações da dinâmica	77
I.3	Influência das forças e binários externos	79
J	Desenvolvimento dos simuladores em <i>Simulink</i>	81
J.1	Simulador das técnicas de processamento de sinal	81
J.2	Simulador dos sistemas de navegação	83
	Referências	89

Lista de Figuras

2.1	Modelo do filtro adaptado	6
2.2	Saída do filtro adaptado para um pulso sinusoidal em condições ideais . . .	6
2.3	Saída do filtro adaptado para um pulso sinusoidal em condições não ideais	7
2.4	Saída do filtro adaptado para um sinal SS	8
2.5	Efeito dos transdutores na resposta do filtro adaptado	9
2.6	Efeito de Doppler na resposta do filtro adaptado	10
2.7	Saída do filtro adaptado em situação de utilização simultânea do canal por 3 emissores	10
2.8	Saída do filtro adaptado com interpolação do sinal	11
2.9	Protocolo de processamento de sinais para posicionamento	13
3.1	Representação da orientação segundo ângulos de Euler Z-Y-X	17
3.2	Vector de rotação	18
3.3	Resultado do INS com ruído	20
3.4	Resultado do INS com ruído e polarizações, com o veículo parado	20
4.1	Cálculo da posição do emissor no referencial $\{B\}$	22
4.2	Incidência de uma onda acústica em dois receptores no plano XY	24
4.3	Cálculo da distância do emissor à origem do referencial $\{B\}$	26
5.1	Topologia INS com realimentação directa	28
5.2	Diagrama do sistema de aquisição de dados da estratégia das posições re- lativas	33
5.3	Diagrama do sistema de aquisição de dados da estratégia no espaço dos sensores	35
5.4	Geometria dos receptores acústicos	38
5.5	Trajectória de teste	39
5.6	Resultado da estratégia no espaço das posições relativas com 13 receptores, 1 emissor e magnetómetro	40
5.7	Resultado da estratégia no espaço dos sensores com 13 receptores, 1 emissor e magnetómetro	40
5.8	Erro de estimação das polarizações dos acelerómetros	42
5.9	Erro de estimação das polarizações dos giroscópios	42
5.10	Resultado da estratégia no espaço das posições relativas com 4 receptores, 1 emissor a 100 m e magnetómetro	43
5.11	Resultado da estratégia no espaço dos sensores com 4 receptores, 1 emissor a 100 m e magnetómetro	43
5.12	Norma do erro de posição	44
5.13	Norma do erro de orientação	44

B.1	Diferenças no espectro de frequência dos diferentes tipos de sinais SS . . .	52
B.2	Sistema de geração e detecção de sinais SS	53
B.3	<i>SSRG - Simple Shift Register Generator</i>	53
C.1	Resposta em amplitude dos filtros que modelam os transdutores	55
C.2	Resposta em fase dos filtros que modelam os transdutores	55
H.1	Simulação de Monte-Carlo: validação da aproximação normal para a posição do emissor no referencial $\{B\}$	75
I.1	Representação gráfica do modelo do veículo	77
J.1	Modelo em <i>Simulink</i> para simulação das técnicas de processamento de sinal para 1 emissor e 1 receptor	81
J.2	Modelo em <i>Simulink</i> para simulação das técnicas de processamento de sinal para 3 emissores e 1 receptor	82
J.3	Modelo para geração de sinais	82
J.4	Modelo em <i>Simulink</i> para o canal ruidoso e com um trajecto múltiplo . . .	82
J.5	Plataforma comum aos dois sistemas de navegação implementados	83
J.6	Modelo em <i>Simulink</i> do veículo	83
J.7	Modelo em <i>Simulink</i> para os sensores inerciais	84
J.8	Modelo em <i>Simulink</i> do INS	85
J.9	Modelo em <i>Simulink</i> do sistema de navegação projectado no espaço das posições relativas	85
J.10	Modelo em <i>Simulink</i> para as observações no espaço das posições relativas .	86
J.11	Modelo em <i>Simulink</i> para geração da medida e da estimativa do campo magnético terrestre	86
J.12	Modelo em <i>Simulink</i> do sistema de navegação projectado no espaço dos sensores	87
J.13	Modelo em <i>Simulink</i> para as observações no espaço dos sensores	87

Lista de Tabelas

5.1	Análise de observabilidade dos sistemas de navegação	37
5.2	Descrição dos erros dos sensores auxiliares	38
5.3	Descrição dos erros dos sensores inerciais	38
5.4	Raiz quadrada do erro quadrático médio de estimação de posição com 13 receptores, 1 emissor e magnetómetro	39
5.5	Raiz quadrada do erro quadrático médio de estimação de orientação com 13 receptores, 1 emissor e magnetómetro	39
5.6	Raiz quadrada do erro quadrático médio de estimação das polarizações dos acelerómetros de 50 s a 100 s	41
5.7	Raiz quadrada do erro quadrático médio de estimação das polarizações dos giroscópios de 50 s a 100 s	41
5.8	Raiz quadrada do erro quadrático médio de estimação de posição e orientação com 4 receptores, 1 emissor a 100 m e magnetómetro	44
I.1	Características físicas do veículo	78

Capítulo 1

Introdução

Os Veículos Submarinos Autónomos (AUV, de *Autonomous Underwater Vehicles*) e os Veículos Operados Remotamente (ROV, de *Remotely Operated Vehicles*) têm hoje em dia grande importância tanto em aplicações industriais como científicas. Esta automação/robotização visa essencialmente tornar possível a execução de operações complexas muitas vezes realizadas a grandes profundidades (como reparações e manutenção de cabos subaquáticos e plataformas petrolíferas) colocando cada vez menos em risco vidas humanas.

Os sistemas de navegação são uma peça fundamental tanto para este tipo de veículos como para os submarinos tripulados, servindo para indicação da posição e orientação do veículo em relação a um dado referencial, para quem supervisiona as suas operações e para outros sistemas a bordo tais como sistemas de controlo do veículo, sistemas de controlo de missão, etc.

Os Sistemas de Navegação Inercial (INS, de *Inertial Navigation Systems*) enquadram-se nos sistemas de navegação mais utilizados hoje em dia. Estes permitem que um veículo possa navegar e estimar a sua posição e orientação com instrumentos próprios navegando sem auxílio (*dead reckoning*) nem dependência de sistemas externos. O cálculo da posição e orientação do veículo por estes sistemas passa pela integração de medidas de acelerações lineares e velocidades angulares dadas por um conjunto de sensores inerciais formado por acelerómetros e giroscópios. Como estas medidas são afectadas por factores como desalinhamentos de instalação, ruídos e polarizações, os erros de estimativa crescem ilimitadamente com o tempo. Por esta razão, os INS são sistemas naturalmente instáveis. De forma a limitar este efeito, é necessário recorrer a sensores auxiliares que possam ajudar a corrigir os erros do sistema. Note-se que devido à forte atenuação das ondas electromagnéticas dentro de água, não é viável a utilização de sistemas de posicionamento tradicionais como por exemplo a navegação por satélite (GPS - *Global Positioning System*, GLONASS - *Global Navigation Satellite System* e GALILEO que podem eventualmente falhar ou não estarem disponíveis temporariamente).

Neste trabalho propõe-se a utilização de sensores de posicionamento acústico, baseado nas topologias USBL (*Ultra-Short Base Line*) e LUSBL (*Long & Ultra-Short Base Line*) em conjunto com um INS, com o objectivo de manter o erro associado às estimativas de posição, velocidade e orientação limitados e tão pequenos quanto possível. É apresentada uma estratégia de projecto do sistema de navegação, tanto quanto se sabe inovadora, baseada na informação directa dos receptores acústicos. O desempenho desta nova estratégia é comparado, nas mesmas condições de operação, com o de uma estratégia clássica baseada no espaço das posições relativas dos emissores no referencial do veículo, sendo os ruídos

das observações de posições relativas rigorosamente caracterizados com base nos ruídos de observações dos receptores acústicos.

Os sensores acústicos, base para as topologias USBL/LUSBL exploradas, são suportadas por estratégias de processamento de sinal em ambiente subaquático utilizando técnicas de espalhamento espectral (SS, de *Spread-Spectrum*). Estas técnicas exploram as vantagens destes sinais face ao tradicionalmente utilizado pulso sinusoidal permitindo a utilização de potências de transmissão mais baixas que os pulsos sinusoidais. Permitem ainda um melhor desempenho em situações de utilização conjunta do canal e na rejeição de trajectos múltiplos dos sinais propagados.

Enquadrado no mesmo projecto, em [1] apresenta-se um sistema de controlo baseado na informação directa dos sensores, onde são também estudadas geometrias espaciais de instalação dos receptores no veículo, que optimizam o cálculo da direcção dos emissores no referencial do veículo.

1.1 Receptores/Emissores

Ao longo deste trabalho serão referidos como emissores os dispositivos, que se assumem colocados em posições fixas no meio ambiente, capazes de emitir sinais acústicos que podem ser detectados pelos receptores instalados a bordo do veículo. Estes emissores podem ser tanto faróis acústicos (*beacons*) ou transreceptores (*transponders*), dependendo do tipo de funcionamento que se pretender. A referência aos dispositivos como emissores tem então o objectivo de manter a versatilidade de operação do sistema e também de distinguir claramente os receptores do veículo dos dispositivos emissores no meio ambiente.

Os faróis acústicos são dispositivos que podem emitir sinais acústicos com uma cadência pré-determinada, obrigando a uma sincronização dos relógios dos emissores e dos receptores.

Os transreceptores são dispositivos capazes de receber e emitir sinais acústicos podendo desta forma responder a pedidos de emissão efectuados por parte do veículo.

O veículo é equipado com receptores rigidamente montados na sua estrutura, que têm apenas a capacidade de receber os sinais enviados pelos emissores. Pode ainda estar equipado com um dispositivo capaz de emitir sinais acústicos para interrogar os transreceptores colocados no meio ambiente.

1.2 USBL/LUSBL

As topologias USBL e LUSBL baseiam-se essencialmente no conceito de linha de base que é a distância entre dois receptores acústicos.

USBL Baseia-se nas diferenças de tempos de chegada dos sinais para calcular a direcção e distância de um emissor. As linhas de base são muito curtas (daí o nome *Ultra-Short*) sendo os receptores dispostos em geometrias que permitam optimizar o cálculo da direcção [1].

LUSBL Baseia-se no mesmo princípio que o USBL mas para além dos receptores colocados no veículo com USBL, utiliza os sinais provenientes de vários emissores separados entre si por linhas de base maiores (daí o nome *Long*) para calcular a posição e orientação do veículo com maior precisão.

1.3 Estrutura do documento

Este relatório encontra-se dividido da seguinte forma:

- No Capítulo 2 estudam-se estratégias de processamento de sinal em ambientes subaquáticos utilizando técnicas de espalhamento espectral procurando obter boas propriedades em utilizações simultâneas do canal, rejeição de trajectos múltiplos e elevada imunidade a ruído;
- No Capítulo 3 estudam-se alguns tópicos sobre navegação inercial. É apresentada a representação da orientação do veículo e a escolha dos referenciais utilizados para navegação. É ainda abordado o algoritmo de navegação inercial utilizado no presente trabalho;
- No Capítulo 4 são introduzidos os sensores auxiliares utilizados para corrigir os erros do INS. É apresentado o magnetómetro e o sistema de posicionamento acústico;
- No Capítulo 5 referem-se tópicos sobre fusão sensorial com sistemas de navegação inercial. São apresentadas duas estratégias de projecto do sistema de navegação, sendo analisados e comparados os seus resultados;
- Finalmente, no Capítulo 6 apresentam-se as principais conclusões retiradas do presente trabalho e enumeram-se alguns tópicos sobre trabalho futuro a efectuar.

Capítulo 2

Processamento de sinal

A comunicação entre duas entidades num ambiente subaquático é claramente afectada pelas condições adversas que se podem observar neste tipo de meios como sejam o ruído acústico e a existência de trajectos múltiplos. As ondas acústicas propagam-se por longas distâncias com fraca atenuação, tornando atractiva a sua utilização em detrimento das ondas electromagnéticas (*Laser Range Finder*, Radar, etc), que são altamente atenuadas em ambiente subaquático. A visibilidade é em geral muito fraca pelo que sistemas baseados em visão são também excluídos, salvo em raras excepções.

As comunicações acústicas têm sido as mais utilizadas em aplicações subaquáticas. Estas englobam desde transmissão de dados com *modem's* acústicos e sonares a simples emissões e detecções de sinais de referência para posicionamento.

2.1 Estimação do tempo de chegada de um sinal

A precisão de cálculo da posição e orientação do veículo depende fortemente da precisão da estimação do tempo de chegada (TOA, de *Time Of Arrival*) do sinal utilizado para posicionamento.

O método mais utilizado para a estimação do TOA é fazer passar o sinal recebido, a partir de um dado instante de interesse, por um filtro adaptado (*matched filter*). Uma vez obtida a resposta do filtro adaptado retira-se o instante de tempo em que atinge o seu valor máximo e subtrai-se a este a duração do sinal. Desta forma obtém-se o tempo de chegada do sinal.

2.1.1 O filtro adaptado de um sinal

Seja $g(t)$ um sinal com $t \in [0, T]$ corrompido por ruído branco gaussiano $w(t)$. O filtro que maximiza a relação sinal-ruído de $g(t)$ denomina-se filtro adaptado [2], representado na Figura 2.1, onde $h(t)$ representa a resposta impulsiva do filtro e $y(t)$ a saída do filtro.

Tem-se então, como deduzido em [2], que o filtro óptimo $h_{opt}(t)$ é dado por

$$h_{opt}(t) = kg^*(T - t), \quad (2.1)$$

onde k é um factor de escala.

Uma vez que os sinais em questão são todos reais pode reescrever-se 2.1 como

$$h_{opt}(t) = kg(T - t). \quad (2.2)$$

Analisando 2.2 verifica-se que o filtro que maximiza a relação sinal-ruído do sinal recebido é construído a partir do sinal esperado invertido e deslocado de T no tempo.

Pode ainda estabelecer-se uma relação directa entre a autocorrelação do sinal esperado e a saída do filtro adaptado. Considere-se então a discretização da saída do filtro adaptado $y(n)$ e a autocorrelação do sinal esperado $v(n)$. A relação entre estas duas grandezas é dada por (deduzida no Apêndice A)

$$y(n) = \frac{1}{k} v \left(n + \frac{T}{T_S} \right) + \xi(n), \quad (2.3)$$

onde T_S é o tempo de amostragem e $\xi(n)$ é o erro introduzido pelo ruído e é dado por

$$\xi(n) = kg \left(\frac{T}{T_S} - n \right) * w(n). \quad (2.4)$$

De 2.3 e 2.4 verifica-se que para $w(n) = 0$ a saída do filtro adaptado é igual à autocorrelação do sinal de entrada deslocada no tempo e escalada de $\frac{1}{k}$.

2.2 Estimação do tempo de chegada de um sinal sinusoidal

Tradicionalmente, neste tipo de aplicações, têm sido utilizados como sinais de referência pulsos sinusoidais. Na Figura 2.2 apresenta-se a resposta do filtro adaptado a um pulso sinusoidal de duração $T = 3$ ms, instante de chegada $TOA = 1$ ms e frequência $f = 200$ KHz em condições ideais de operação (sem ruído nem trajectos múltiplos e ocupando exclusivamente o canal).

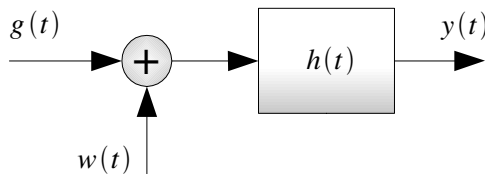


Figura 2.1 - Modelo do filtro adaptado

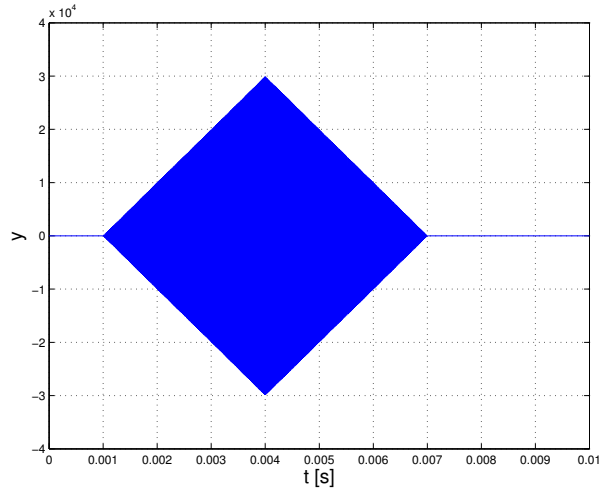


Figura 2.2 - Saída do filtro adaptado para um pulso sinusoidal em condições ideais

A estimativa do TOA calculada nesta situação é correcta. No entanto este tipo de detecção traduz níveis de confiança muito baixos em termos de repetibilidade. Na Figura 2.3 apresenta-se a resposta do mesmo filtro adaptado a um pulso sinusoidal idêntico ao utilizado no caso anterior mas em condições não ideais (corrompido por ruído branco gaussiano e com um trajecto secundário com 2 ms de atraso em relação ao directo).

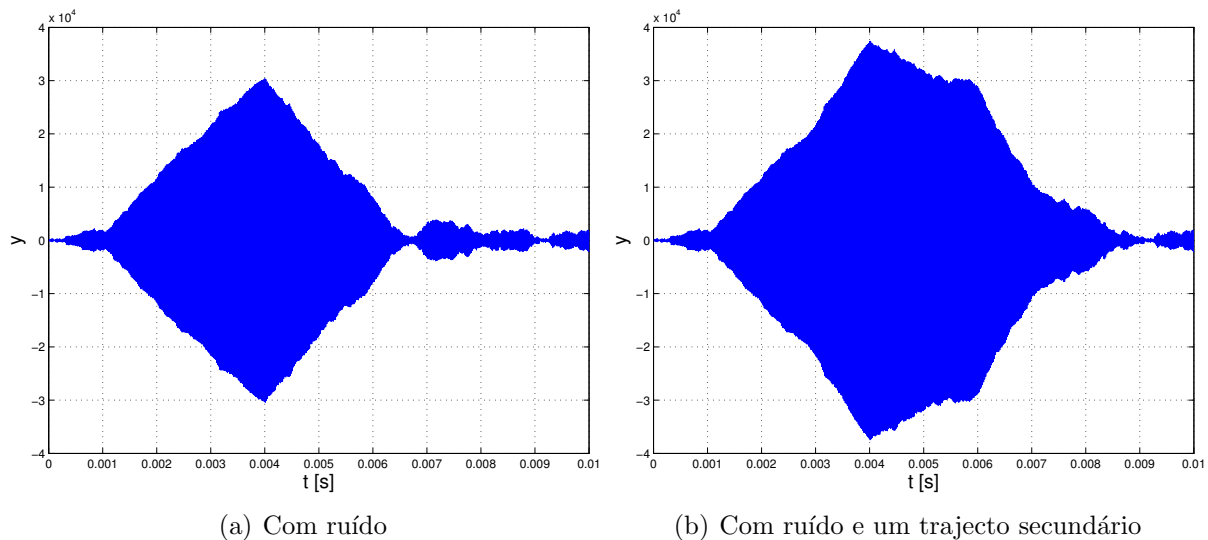


Figura 2.3 - Saída do filtro adaptado para um pulso sinusoidal em condições não ideais

A utilização de pulsos sinusoidais condiciona ainda a utilização simultânea do canal em questão. Uma possibilidade seria a de fazer distinção na frequência de sinais oriundos de diferentes fontes porém a correlação cruzada entre sinais sinusoidais de frequências diferentes é ainda relativamente elevada dificultando o processo de separação de fontes. Resumindo, a detecção utilizando pulsos sinusoidais tem:

- Mau funcionamento com outros sistemas na proximidade;
- Fraca imunidade a propagações por trajectos múltiplos;
- Fraco funcionamento em ambientes muito ruidosos;
- Necessidade de utilização de elevadas potências de transmissão para obter elevadas relações sinal-ruído;
- Mau funcionamento em longas distâncias;
- Fraca fiabilidade e segurança.

2.3 Estimação do tempo de chegada de um sinal SS

Os sinais SS (*Spread-Spectrum* - sinais com espalhamento espectral) são essencialmente caracterizados por ocuparem todo o espectro de frequências ao contrário dos pulsos sinusoidais que ocupam uma banda de frequências muito estreita. No Apêndice B apresenta-se algumas propriedades e informação sobre geração de sinais SS.

Estes sinais surgem como alternativa aos pulsos sinusoidais como tentativa de:

- minimizar o erro introduzido pelo ruído em 2.4;
- fazer com que a autocorrelação do sinal utilizado se aproxime o máximo possível de um impulso de *Dirac* em 2.3;

- permitir a utilização simultânea do canal utilizando uma topologia CDMA (*Code Division Multiple Access*);
- tornar a detecção do TOA função relativa dos picos detectados e não absoluta do máximo como é feito no caso do pulso sinusoidal;
- melhorar a detecção e rejeição de trajectos múltiplos.

Na Figura 2.4(a) apresenta-se a resposta do filtro adaptado a um sinal SS de duração $T = 3$ ms, $TOA = 1$ ms em condições ideais de operação e na Figura 2.4(b) na presença de ruído branco gaussiano e de um trajecto secundário com 2 ms de atraso em relação ao directo (experiência semelhante à realizada para um pulso sinusoidal na Figura 2.3(b)).

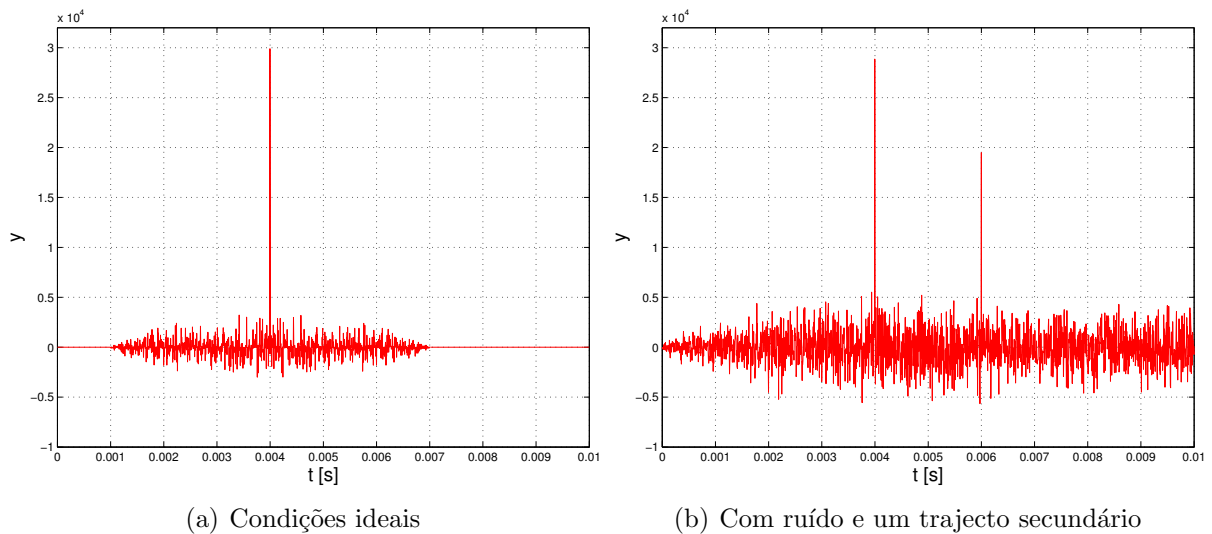


Figura 2.4 - Saída do filtro adaptado para um sinal SS

Como se pode verificar pela Figura 2.4 a utilização de sinais SS permite uma melhor detecção do TOA do sinal e ainda uma boa detecção de trajectos múltiplos.

2.3.1 Dinâmica dos transdutores

No caso de pulsos sinusoidais não se considerou a dinâmica dos transdutores de sinais eléctrico-acústico pois são sinais de banda estreita. Por esta razão pode-se sempre ajustar a frequência destes de modo a que não sejam afectados pela dinâmica dos transdutores. O mesmo não se passa com os sinais SS pois ocupam todo o espectro de frequências e as frequências que caem fora da banda de funcionamento dos transdutores são altamente atenuadas. Admite-se então que os transdutores podem ser modelados por filtros passa-banda com frequência central de 50 KHz, largura de banda de 40 KHz e ganho unitário na banda passante (ver Apêndice C). Na Figura 2.5 apresenta-se o efeito dos transdutores na resposta do filtro adaptado a um sinal SS de duração $T = 3$ ms, $TOA = 1$ ms, na presença de ruído branco gaussiano e de um trajecto secundário com 2 ms de atraso em relação ao directo.

Numa primeira análise pode-se verificar que a introdução dos filtros causa uma diminuição da amplitude relativa dos picos e um atraso no sinal. A diminuição da amplitude relativa dos picos é devida ao desfaseamento entre as componentes de diferentes frequências introduzido pelos transdutores (como se pode ver pela resposta em fase dos transdutores

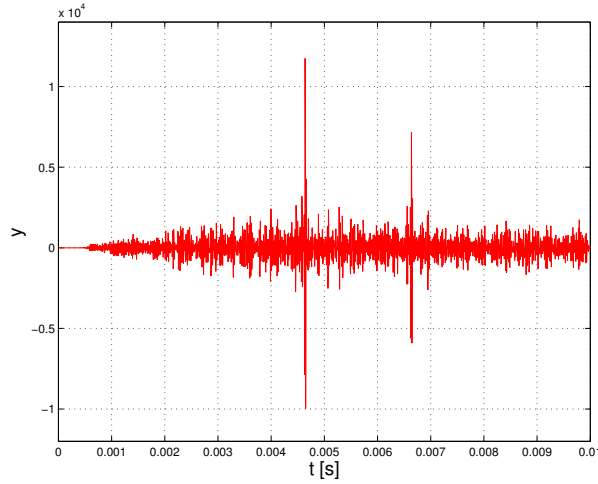


Figura 2.5 - Efeito dos transdutores na resposta do filtro adaptado

na Figura C.2), causando uma diminuição da correlação entre os dois sinais. O atraso verificado é no entanto constante, causado pelo atraso da propagação da energia nos filtros passa-banda discretos que modelam os transdutores, sendo dado por

$$\delta(\eta) = 2\eta T_S, \quad (2.5)$$

onde T_S é o tempo de amostragem e η é a ordem do filtro. O factor de multiplicação 2 é devido ao facto de os sinais passarem por dois transdutores, o de emissão e o de recepção.

Para a simulação da Figura 2.5 a ordem do filtro é $\eta = 64$ e a frequência de amostragem 200 KHz pelo que

$$\delta(\eta) = 2\eta T_S = 2 \times 64 \times \frac{1}{200 \times 10^3} = 0.64 \times 10^{-3} \text{ s}. \quad (2.6)$$

Este fenómeno será incluído em todas as simulações apresentadas de seguida neste Capítulo.

2.3.2 Efeito de Doppler

Existe ainda outro aspecto que pode causar alguma degradação no desempenho do sistema, o efeito de Doppler que devido à velocidade relativa entre os emissores e receptores causa modificações na frequência dos sinais. A frequência de um sinal sob o efeito de Doppler é então alterado para

$$f_D = f \left(1 \pm \frac{v_r}{v_p} \right), \quad (2.7)$$

onde v_r é o módulo da velocidade relativa entre o emissor e receptor, v_p é a velocidade de propagação do som na água. O sinal positivo (+) é usado quando o emissor e receptor se aproximam e o sinal negativo (−) quando se afastam.

Na Figura 2.6 apresenta-se a resposta do filtro adaptado a um sinal SS de duração $T = 3$ ms, $TOA = 1$ ms na presença de ruído branco gaussiano e de um trajecto secundário com 2 ms de atraso em relação ao directo, para um afastamento entre o emissor e o receptor com $v_r = 3$ m/s. Admite-se que a velocidade do som na água é $v_p = 1500$ m/s. Tendo em conta o atraso constante provocado pelo filtro e sabendo que devido ao deslocamento do receptor o tempo de chegada do sinal vem alterado para $TOA = 1.002$ ms, verifica-se um erro de cerca de $8 \mu\text{s}$ no cálculo da estimativa do TOA.

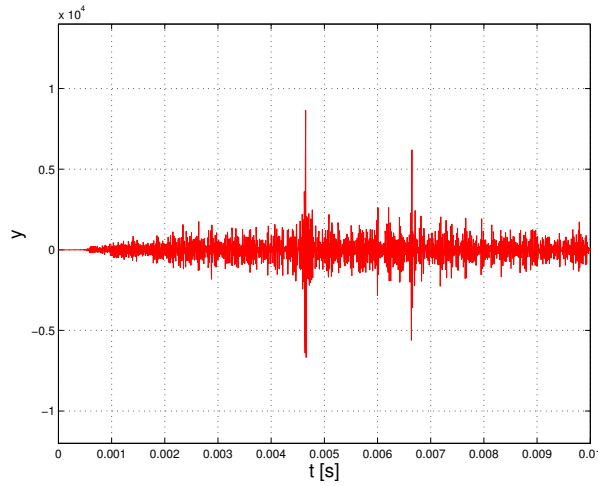


Figura 2.6 - Efeito de Doppler na resposta do filtro adaptado

2.3.3 Utilização simultânea do canal

É importante ainda verificar o funcionamento correcto em situações de utilização simultânea do canal. É ilustrada na Figura 2.7 o funcionamento em simultâneo numa situação de três emissores e um receptor. A cada emissor é atribuído um código único e admite-se que os emissores estão todos colocados à mesma distância do receptor e parados por uma questão de simplicidade na análise dos resultados. Todos os sinais têm duração $T = 3$ ms, tempo de chegada $TOA = 1$ ms, ruído branco gaussiano e um trajecto secundário com 2 ms de atraso ao directo.

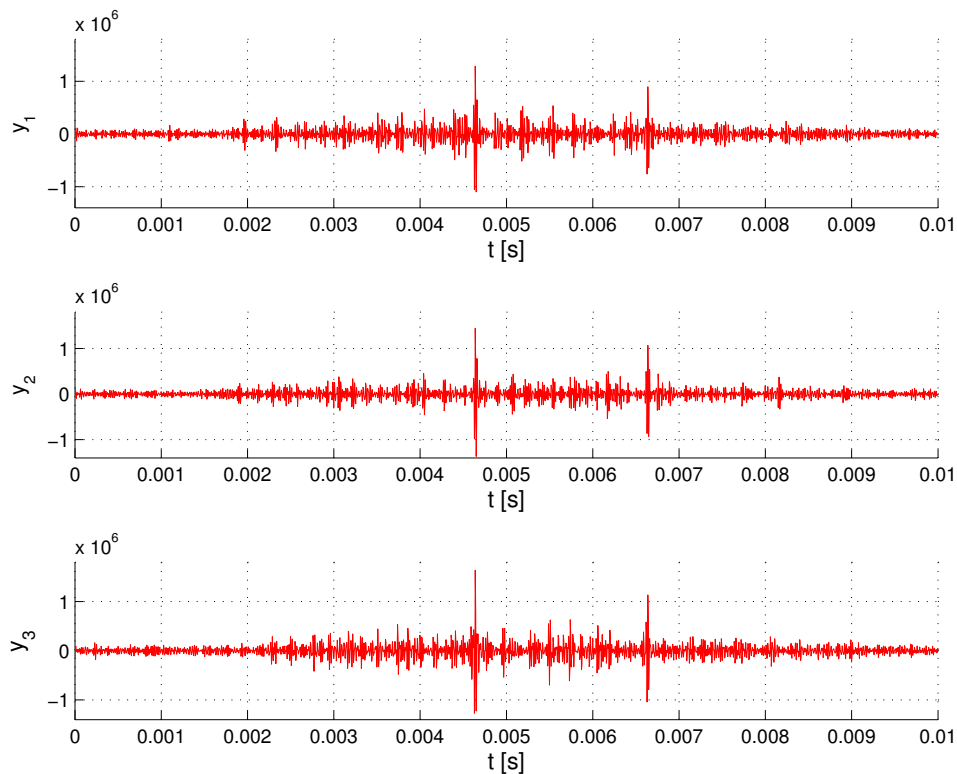


Figura 2.7 - Saída do filtro adaptado em situação de utilização simultânea do canal por 3 emissores

A estimativa do TOA calculada é a correcta para os três emissores tendo em conta o atraso constante devido aos transdutores. De facto, a utilização de sinais SS permite um excelente desempenho da comunicação em situações de utilização simultânea.

2.3.4 Interpolação do sinal recebido

Uma das fontes de imprecisão do sistema de detecção é a sua resolução, afectada pela frequência de amostragem do sistema. O pico detectado na saída do filtro adaptado cai num intervalo de incerteza $]\tau - T_S; \tau + T_S[$, sendo τ o tempo estimado de chegada do sinal (ETA, de *Estimated Time of Arrival*). Ora, se for efectuada uma interpolação do sinal utilizando uma das técnicas convencionais (*zero-padding* + filtragem passa-baixo) para aumentar o ritmo de amostragem do sinal, pode-se obter maior resolução. Para se verificar o efeito da interpolação ilustra-se na Figura 2.8 a mesma simulação da Figura 2.6 ($T = 3$ ms, $TOA = 1$ ms, $v_r = 3$ m/s, ruído branco gaussiano e um trajecto secundário com 2 ms de atraso em relação ao directo), aumentando o ritmo de amostragem do sinal recebido de 200 KHz para 1 MHz.

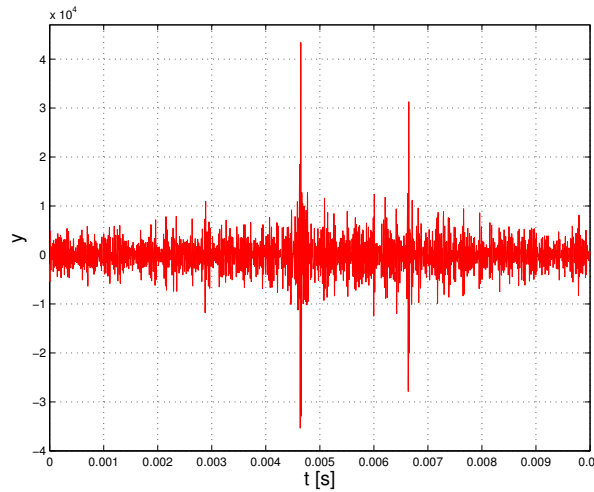


Figura 2.8 - Saída do filtro adaptado com interpolação do sinal

O erro devido ao efeito de Doppler cai então de $8 \mu\text{s}$ para $5 \mu\text{s}$. A diminuição do intervalo de incerteza é especialmente importante para a precisão no cálculo da direcção do emissor no referencial do veículo [1].

2.4 Algoritmo de detecção do tempo de chegada de um sinal

O algoritmo de detecção do tempo de chegada está implementado em qualquer das entidades que recebe um sinal, tanto nos transreceptores colocados no meio ambiente como nos receptores do veículo. O seu funcionamento é o que se descreve de seguida:

1. Em cada instante de amostragem coloca-se a nova amostra no *buffer* de memória B_1^N de comprimento N . De seguida, calcula-se a resposta do filtro adaptado utilizando uma FFT de modo a reduzir o número de cálculos envolvidos. Calcula-se a FFT de K pontos de B_1^N , multiplica-se pela FFT de K pontos do filtro adaptado

previamente calculada e inverte-se (FFT inversa). Se for detectado um pico na resposta deste que ultrapasse um limiar relativo A (entre o 1º pico e os restantes picos) passa-se para 2, senão mantém-se neste passo.

2. Em cada instante de amostragem coloca-se a nova amostra no *buffer* de memória B_2^M de comprimento M com $M > N$ e em B_1^N . Mantém-se neste passo até que B_2^M esteja cheio. Quando este estiver cheio passa-se para 3.
3. Aumenta-se o ritmo de amostragem do sinal em B_2^M para se obter melhor resolução, calcula-se a FFT de L pontos do sinal interpolado, multiplica-se pela FFT de L pontos do filtro adaptado previamente calculada (a partir do sinal esperado interpolado com o mesmo número de amostras que o sinal recebido) e inverte-se. Se nesta situação tiver sido detectado um pico na resposta do filtro adaptado que ultrapasse um limiar relativo C , é declarada a detecção da chegada de um sinal e passa-se para 1, senão passa-se simplesmente para 1.

2.5 Protocolo de processamento de sinais para posicionamento

O protocolo de processamento de sinais para posicionamento proposto divide-se em dois modos de funcionamento. No primeiro modo, o veículo faz um pedido aos transreceptores e estes respondem emitindo um sinal acústico. No segundo modo, os emissores enviam um sinal acústico com uma cadência pré-determinada.

Modo 1 O primeiro modo de funcionamento encontra-se dividido em três fases como ilustrado na Figura 2.9. O protocolo decorre então da seguinte forma:

1. O veículo emite um sinal SS de duração T a requisitar uma resposta a um transreceptor, gerando para isso o sinal com o código correspondente.
2. O transreceptor detecta o instante de chegada e programa o envio da resposta para $\tau + T_{offset}$ s. Note-se que T_{offset} é constante e definido pelo protocolo.
3. O transreceptor envia um sinal SS, de duração T , no instante $\tau + T_{offset}$ s e gerado com o seu código característico. Por fim, os receptores no veículo detectam o sinal de resposta e calculam o tempo de ida e volta do sinal (RTT, de *Round Trip Time*).
4. Calculado o RTT, subtrai-se T_{offset} e divide-se por 2, obtendo-se desta forma o tempo que leva o sinal acústico a percorrer a distância que separa o emissor do receptor.

Modo 2 No segundo modo de funcionamento, os emissores enviam um sinal SS gerado com um código característico e distinto para cada emissor com uma cadência pré-determinada. Neste modo de funcionamento, os relógios dos emissores e dos receptores devem estar sincronizados.

Considere-se que os emissores enviam o sinal acústico nos instantes t_k . Os receptores recebem o sinal acústico em $t_k + \tau$. Então o tempo que leva o sinal acústico a percorrer a distância que separa o emissor do receptor é τ .

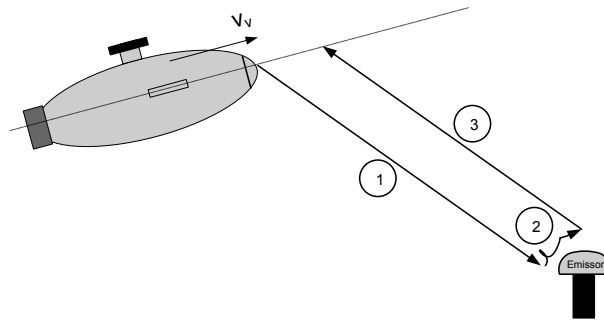


Figura 2.9 - Protocolo de processamento de sinais para posicionamento

Erros do Protocolo Os erros do protocolo surgem essencialmente de:

- Intervalo de incerteza devido ao instante de amostragem;
- Erros introduzidos pelo efeito de Doppler;
- Trajectos múltiplos, embora os erros inerentes sejam extremamente atenuados neste nível e possam ser devidamente tratados num nível mais elevado;
- Deslocamento do veículo e do emissor durante o tempo de trânsito do sinal acústico;
- Não-homogeneidade do meio (oceano) que introduz variações na velocidade de propagação do som na água.

2.6 Comentários finais

Neste Capítulo estudaram-se métodos de detecção de sinais para posicionamento tendo-se verificado que os sinais SS apresentam vantagens em relação aos tradicionais pulsos sinusoidais. Devido ao ganho na relação sinal-ruído introduzido pelas características do sinal e à técnica de detecção utilizada, torna-se possível a utilização de sinais com potência mais baixa, contribuindo assim para uma maior autonomia das baterias dos emissores e receptores. Os sinais SS permitem ainda uma boa detecção de trajectos múltiplos e, ainda que esteja fora do objectivo deste trabalho, comunicações seguras e indetectáveis para utilizadores que não conheçam os códigos de geração.

Foi proposto um algoritmo de detecção do tempo de chegada de um sinal SS e um algoritmo de processamento de sinais para posicionamento do veículo, tendo sido analisados os erros inerentes. Verificou-se que existem essencialmente dois tipos de erros na detecção do tempo de chegada de um sinal: um de modo comum e outro de modo diferencial. O erro de modo comum é, como o nome indica, comum a todos os receptores mas diferente de emissor para emissor. Este erro de modo comum é dependente da velocidade relativa entre o veículo e o respectivo emissor. A velocidade relativa entre os dois para além de causar o efeito de Doppler no sinal, faz com que o tempo observado não seja exactamente o tempo que leva a onda acústica a percorrer a distância entre os dois corpos. O erro de modo diferencial é devido essencialmente ao intervalo de incerteza na localização do pico do sinal de saída do filtro adaptado. Esta incerteza é de valor médio nulo e com desvio padrão relacionado com o inverso da frequência de amostragem do sistema.

Capítulo 3

Navegação inercial

Os Sistemas de Navegação Inercial permitem a determinação da posição e orientação de um veículo com base na leitura de sensores inerciais como acelerómetros e giroscópios. Estes baseiam-se no princípio físico de um corpo se manter em movimento rectilíneo uniforme na ausência de forças externas. A aplicação de forças externas gera acelerações lineares que podem ser medidas através dos acelerómetros e integradas numericamente de modo a obter a velocidade e posição do veículo a partir de condições iniciais conhecidas. Estas forças podem igualmente gerar movimentos de rotação no veículo, cuja velocidade angular pode ser medida utilizando giroscópios de velocidade (*rate gyros*). Integrando obtém-se então a orientação do veículo a partir de uma dada condição inicial.

Neste capítulo apresenta-se brevemente o sistema de navegação inercial utilizado neste trabalho baseado na topologia *strapdown* em que os sensores inerciais são rigidamente montados no veículo. É também apresentada a representação da orientação do veículo e os referenciais de navegação utilizados. Em [3] é detalhado o funcionamento dos sensores inerciais utilizados pelo sistema de navegação inercial.

Em [4] apresentam-se em detalhe topologias existentes de instalação dos sensores inerciais no veículo, aspectos sobre a implementação física dos sistemas de navegação inercial e técnicas de calibração e alinhamento destes.

3.1 Definição dos referenciais de navegação

O facto de a Terra ter um movimento de rotação com velocidade constante não permite assumir esta como referencial inercial. Os sistemas de navegação inercial utilizam por isso um processo de encadeamento de referenciais para representação da orientação de um corpo rígido em relação a um referencial de interesse. Em [4] pode-se encontrar uma discussão sobre a utilização de referenciais em navegação local e de longo curso.

Para navegação local, em que o espaço percorrido pelo veículo numa dada missão é suficientemente pequeno e o tempo de duração das missões é suficientemente curto para não se considerarem fenómenos como a oscilação de Schuller [4], é suficiente considerar os seguintes referenciais:

- $\{I\}$ - referencial inercial de interesse para representação da orientação do veículo;
- $\{E\}$ - referencial Terra, utilizado para acompanhar o movimento de rotação terrestre;
- $\{B\}$ - referencial do corpo na topologia *strapdown*, cujos eixos coincidem com a colocação dos sensores e cuja origem não coincide, em geral, com o centro de massa

do corpo. Neste referencial, o eixo x tem sentido positivo para a frente do veículo, o eixo y tem sentido positivo para a direita do veículo e o eixo z aponta para baixo (convenção utilizada em aplicações subaquáticas);

- $\{G\}$ - referencial do centro de massa, cuja origem coincide com o centro de massa e cuja orientação é idêntica à do referencial $\{B\}$.

3.2 Representação da orientação do veículo

São apresentadas nesta secção as formas de representação da orientação utilizadas neste trabalho. Em [3] encontram-se alguns tópicos sobre a representação da orientação de um veículo e uma análise comparativa entre os vários métodos de representação.

3.2.1 Matriz de rotação

A matriz de rotação é uma representação matricial ortonormada de dimensão 3×3 , utilizada para descrever rotações de vectores e efectuar o mapeamento de coordenadas entre dois referenciais. É utilizada neste trabalho a notação introduzida em [5]. De acordo com esta notação a transformação de coordenadas de um vector v representado no referencial $\{B\}$ para o referencial $\{A\}$ é escrita como

$${}^A\mathbf{p}_v = {}^A\mathcal{R} {}^B\mathbf{p}_v. \quad (3.1)$$

Tal como demonstrado em [5], pode-se escrever a transformação de coordenadas inversa como

$${}^B\mathcal{R} = {}^A\mathcal{R}^{-1} = {}^A\mathcal{R}^T. \quad (3.2)$$

A matriz de rotação é também conhecida por Matriz de Cosenos Directores (DCM - *Direct Cosine Matrix*) [5].

3.2.2 Ângulos de Euler

A representação da orientação utilizando ângulos de Euler baseia-se no facto de um referencial $\{B\}$ poder ser obtido a partir da rotação sequencial de um referencial $\{A\}$ em torno dos seus três eixos. De entre 12 convenções possíveis foi escolhida a convenção de ângulos de Euler Z-Y-X. Esta convenção é a mais utilizada convencionalmente em sistemas de navegação, tendo sido utilizada também em [4, 3, 6].

Tendo em conta a descrição em ângulos de Euler Z-Y-X, a matriz de rotação é dada por

$${}^A\mathcal{R}(\mathbf{\Gamma}) = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\theta s\phi - s\psi c\phi & c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi \\ s\psi c\theta & s\psi s\theta s\phi + c\psi c\phi & s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

onde s representa a função seno, c representa a função cosseno e o vector $\mathbf{\Gamma} = [\psi, \theta, \phi]^T$ representa a orientação em ângulos de rotação *yaw*, *pitch* e *roll*, os quais correspondem a rotações em torno dos eixos Z, Y e X, respectivamente. Na Figura 3.1 representa-se um veículo genérico com o respectivo referencial e os ângulos de rotação de cada eixo expressos em termos de ângulos de Euler Z-Y-X.

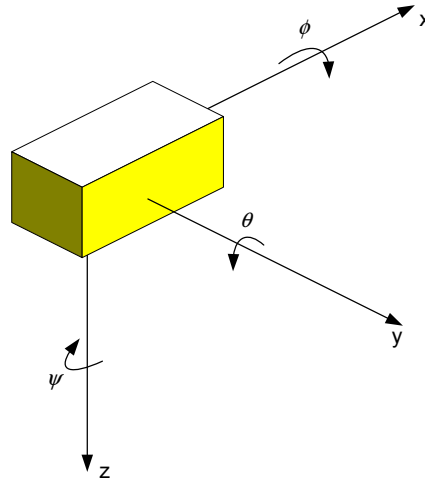


Figura 3.1 - Representação da orientação segundo ângulos de Euler Z-Y-X

Por manipulação algébrica de 3.3 é possível obter as expressões dos ângulos de Euler Z-Y-X [5]

$$\begin{cases} \theta = \arctan 2 \left(-r_{31}, \pm \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2} \right) \\ \psi = \arctan 2 \left(\frac{r_{21}}{c\theta}, \frac{r_{11}}{c\theta} \right), \text{ se } c\theta \neq 0 \\ \phi = \arctan 2 \left(\frac{r_{32}}{c\theta}, \frac{r_{33}}{c\theta} \right), \text{ se } c\theta \neq 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

onde r_{ij} é o elemento da linha i , coluna j de ${}^A_B\mathcal{R}$.

De 3.4 pode-se verificar que existem duas soluções para θ . Convenciona-se então $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Verifica-se ainda de 3.4 que existem duas singularidades, para $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. Por convenção [5], estas são resolvidas por

$$\begin{cases} \theta = +\frac{\pi}{2} & , & \psi = 0 & , & \phi = +\arctan 2(r_{12}, r_{22}) \\ \theta = -\frac{\pi}{2} & , & \psi = 0 & , & \phi = -\arctan 2(r_{12}, r_{22}) \end{cases} \quad (3.5)$$

3.2.3 Vector de rotação

O referencial $\{B\}$ pode ainda ser obtido pela rotação do referencial $\{A\}$ em torno de um eixo de rotação $\mathbf{k}$ de um ângulo τ . O vector de rotação é então dado por

$${}^A\boldsymbol{\lambda}_B = \tau \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

onde $\tau \in [0, \pi]$ é o ângulo de rotação e $\mathbf{k} = [k_x \ k_y \ k_z]^T$ é o vector de norma unitária que define o eixo de rotação. Na Figura 3.2 representa-se um veículo genérico com o respectivo referencial e o vector de rotação do veículo.

A matriz de rotação pode ser obtida a partir do vector de rotação [7] através de

$${}^A_B\mathcal{R}({}^A\boldsymbol{\lambda}_B) = \mathbf{I}_{3 \times 3} + \frac{\sin \tau}{\tau} [{}^A\boldsymbol{\lambda}_B \times] + \frac{1 - \cos \tau}{\tau^2} [{}^A\boldsymbol{\lambda}_B \times]^2. \quad (3.7)$$

A expressão do vector de rotação em função dos elementos da matriz de rotação pode

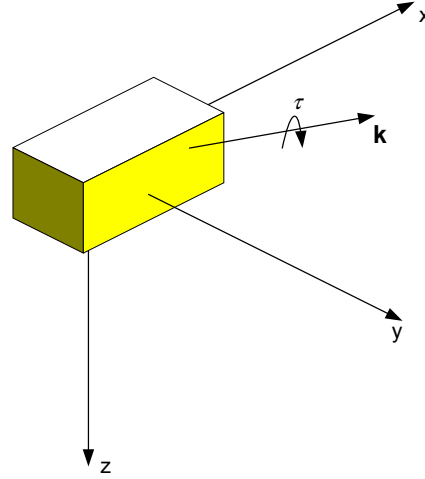


Figura 3.2 - Vector de rotação

ser obtida por desenvolvimento de 3.7

$$\tau = \arccos \left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right), \quad (3.8)$$

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2 \sin \tau} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

O vector de rotação está também sujeito a singularidades em $\tau = 0$ e $\tau = \pi$ como se pode verificar em 3.9. Para a resolução destas singularidades convencionase

$$\tau = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \quad (3.10)$$

$$\tau = \pi \Rightarrow \begin{cases} k_x = \sqrt{\frac{r_{11}-1}{2}} \\ k_y = \frac{r_{23}}{r_{13}} k_x \\ k_z = \frac{r_{23}}{r_{12}} k_x \end{cases}. \quad (3.11)$$

3.3 Sensores inerciais

Em [3] encontra-se uma breve descrição sobre os princípios de funcionamento dos acelerómetros e giroscópios montados rigidamente na estrutura do veículo (topologia *strap-down*). Estes são montados em triáde, cada um alinhado com um dos eixos do referencial $\{B\}$, para se efectuarem medições de aceleração e rotação segundo cada uma das direcções.

3.3.1 Acelerómetros

A leitura da triáde de acelerómetros resulta da aceleração tangencial do veículo adicionada à aceleração centrípeta e à aceleração gravítica [3] e é dada por

$${}^B \bar{\mathbf{a}}_{SF} = \frac{d}{dt} {}^B ({}^I \bar{\mathbf{v}}_{Borg}) + {}^B ({}^I \bar{\boldsymbol{\omega}}_B) \times {}^B ({}^I \bar{\mathbf{v}}_{Borg}) + {}^B \bar{\mathbf{g}} = {}^B \bar{\mathbf{a}} + {}^B \bar{\mathbf{g}}, \quad (3.12)$$

onde ${}^B \bar{\mathbf{a}}_{SF}$ é a aceleração específica resultante da força específica aplicada sobre o veículo, ${}^B ({}^I \bar{\mathbf{v}}_{Borg})$ é a velocidade da origem do referencial $\{B\}$ em relação ao referencial inercial $\{I\}$ expressa em $\{B\}$, ${}^B ({}^I \bar{\boldsymbol{\omega}}_B)$ é a velocidade de rotação do corpo em relação ao referencial

inercial $\{I\}$ expressa em $\{B\}$ e ${}^B\bar{\mathbf{g}}$ é o vector de gravidade visto em $\{B\}$. O primeiro termo corresponde à aceleração tangencial do veículo e o segundo à aceleração centrípeta.

A leitura de cada um dos acelerómetros da tríade é ainda afectada por polarizações e por ruído branco gaussiano. Tem-se então

$${}^B\mathbf{a}_{SF_m} = {}^B\bar{\mathbf{a}}_{SF} + \bar{\mathbf{b}}_a + \mathbf{n}_a - \mathbf{b}_a, \quad (3.13)$$

onde $\bar{\mathbf{b}}_a$ é o vector de polarizações da tríade de acelerómetros, $\mathbf{n}_a$ é um vector de ruído branco gaussiano e $\mathbf{b}_a$ é uma compensação das polarizações subtraída à leitura dos acelerómetros.

3.3.2 Giroscópios

Neste trabalho utiliza-se uma tríade de giroscópios de velocidade (*rate gyros*) para medir a velocidade angular ${}^B({}^I\bar{\boldsymbol{\omega}}_B)$ do referencial $\{B\}$ em relação ao referencial inercial $\{I\}$, expressa no referencial $\{I\}$ [3].

A leitura vem afectada, de forma semelhante à tríade de acelerómetros, por polarizações e ruído branco gaussiano. Tem-se então que a leitura da tríade de giroscópios é dada por

$$\boldsymbol{\omega}_m = {}^B({}^I\bar{\boldsymbol{\omega}}_B) + \bar{\mathbf{b}}_\omega + \mathbf{n}_\omega - \mathbf{b}_\omega, \quad (3.14)$$

onde $\bar{\mathbf{b}}_\omega$ é o vector de polarizações da tríade de giroscópios, $\mathbf{n}_\omega$ é um vector de ruído branco gaussiano e $\mathbf{b}_\omega$ é uma compensação das polarizações subtraída à leitura dos giroscópios.

3.4 Sistema de navegação inercial

O algoritmo de navegação inercial utilizado no presente trabalho baseia-se no algoritmo proposto por Savage [7, 8], tendo sido desenvolvida no Instituto de Sistemas e Robótica uma implementação.

Este algoritmo baseia-se numa abordagem multi-ritmo, com duas frequências. Esta abordagem permite ter em conta componentes associados a movimentos angulares, de velocidade e de posição de alta-frequência conhecidos como efeitos de *coning*, *sculling* e *scrolling* respectivamente [4, 7, 8].

No algoritmo de ritmo elevado e de ordem reduzida são contabilizados os efeitos referidos anteriormente e o seu resultado é fornecido periodicamente ao algoritmo de ritmo moderado que actualiza as estimativas de velocidade, posição e orientação com recurso a equações com soluções fechadas e exactas. Desta forma a precisão computacional para os erros de estimação do INS é apenas comprometida pelas polarizações e ruídos de leitura dos sensores inerciais.

Os algoritmos de orientação e de velocidade e posição recebem como entradas os incrementos de aceleração linear e angular dados pelos integrais das leituras dos sensores inerciais entre instantes de amostragem. O algoritmo de ritmo moderado calcula a orientação do referencial $\{B\}$ utilizando a matriz com formato DCM

$${}_{B_k}^{B_{k-1}}\mathcal{R} = \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{\sin(\|\boldsymbol{\lambda}_k\|)}{\|\boldsymbol{\lambda}_k\|} [\boldsymbol{\lambda}_k \times] + \frac{1 - \cos(\|\boldsymbol{\lambda}_k\|)}{\|\boldsymbol{\lambda}_k\|^2} [\boldsymbol{\lambda}_k \times]^2, \quad (3.15)$$

onde $\{B_k\}$ é o referencial do corpo e $\boldsymbol{\lambda}_k$ é o vector de rotação no instante k . Os efeitos de alta-frequência de integração de movimentos angulares e de efeitos de *coning* são contabilizados na dinâmica do vector de rotação $\boldsymbol{\lambda}_k$.

As actualizações de velocidade linear são também calculadas no algoritmo de ritmo moderado, tendo-se

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-1} + {}^E_{B_{k-1}} \mathcal{R} \Delta^{B_{k-1}} \mathbf{v}_{SF\ k} + \Delta \mathbf{v}_{G/Cor\ k}, \quad (3.16)$$

onde $\Delta^{B_{k-1}} \mathbf{v}_{SF\ k}$ é o incremento de velocidade devido à força específica e $\Delta \mathbf{v}_{G/Cor\ k}$ é o incremento de velocidade devido à força de gravidade e ao efeito de *Coriolis*. Os efeitos de alta-frequência da velocidade de rotação e da rotação do vector de velocidade são também contabilizados no algoritmo de ritmo elevado em $\Delta^{B_{k-1}} \mathbf{v}_{SF\ k}$. Mais detalhes de implementação do algoritmo e referências para tópicos relacionados podem ser encontrados em [6].

Na Figura 3.3 apresenta-se o resultado do INS (representado a vermelho) para uma trajectória curvilínea (representada a azul) com duração de 200 segundos e com ruído branco gaussiano presente nos sensores inerciais mas sem polarizações. Na Figura 3.4 apresenta-se o resultado com a presença de ruído e polarizações nos sensores inerciais estando o veículo parado durante 30 segundos. Como se pode observar, o INS é altamente instável em malha aberta na presença de ruído e polarizações.

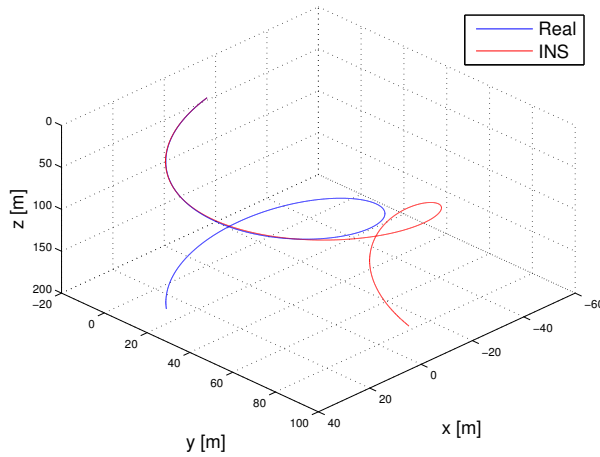


Figura 3.3 - Resultado do INS com ruído

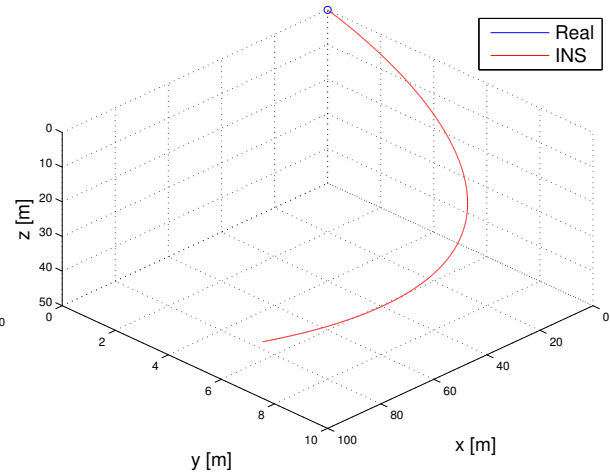


Figura 3.4 - Resultado do INS com ruído e polarizações, com o veículo parado

Capítulo 4

Sensores auxiliares

Neste Capítulo apresentam-se os sensores auxiliares, capazes de medir grandezas externas ao INS, que através de estratégias de fusão sensorial permitirão ajudar a corrigir os erros de estimação do INS. Em primeiro lugar, apresenta-se o magnetómetro que permite efectuar medidas do campo magnético terrestre. De seguida, é apresentado o sistema de posicionamento acústico. Começa-se por caracterizar as observações dos tempos que leva uma onda a percorrer a distância entre um emissor e cada um dos receptores no veículo. Descreve-se de seguida o cálculo da direcção de um emissor no referencial $\{B\}$ com base na aproximação planar da onda acústica [1]. É também apresentado o cálculo da distância de um emissor à origem do referencial $\{B\}$ e o cálculo da posição de um emissor no referencial $\{B\}$ com base na sua distância e direcção, que é equivalente a uma solução clássica de triangulação.

No Apêndice H são caracterizadas as funções densidade de probabilidade da direcção $\mathbf{d}$ e da distância ρ . A aproximação da posição do emissor no referencial $\{B\}$ por uma distribuição normal é validada também no Apêndice H com recurso a simulações de Monte-Carlo.

4.1 Magnetómetro

O magnetómetro de fluxo (*fluxgate*) é um sensor capaz de medir o campo magnético através da indução de correntes eléctricas numa bobine [3]. Embora desenhados para detectar o campo magnético terrestre, os magnetómetros são afectados por perturbações do meio que o rodeia nomeadamente da plataforma onde se encontra instalado, de materiais de permeabilidade magnética diversa e de campos magnéticos gerados por outros dispositivos. Um modelo simples para estas distorções consiste num escalamento e numa polarização que, devido à forte relação com o meio, devem ser estimados e compensados em condições idênticas às operacionais. É necessário ter ainda em conta o fenómeno de declinação magnética terrestre [3].

A leitura da tríade de magnetómetros vem dada por

$${}^B\mathbf{m}_m = \mathbf{K}_{sc} {}^E\overline{\mathcal{R}}^T {}^E\overline{\mathbf{m}} + \overline{\mathbf{b}}_m + \mathbf{n}_m, \quad (4.1)$$

onde ${}^E\overline{\mathbf{m}}$ é o vector do campo magnético terrestre expresso no referencial $\{E\}$, $\mathbf{K}_{sc}$ é a matriz de escalamento, $\overline{\mathbf{b}}_m$ é a polarização da tríade e $\mathbf{n}_m$ é um vector de ruído branco gaussiano que afecta a medida do magnetómetro.

Considerando que os factores de escala e polarizações da tríade de magnetómetros são estimados e compensados em condições idênticas às operacionais antes de cada missão,

tem-se de 4.1 que a leitura dos magnetómetros vem simplesmente dada por

$${}^B\mathbf{m}_m = {}^E\overline{\mathcal{R}}^T {}^E\overline{\mathbf{m}} + \mathbf{n}_m. \quad (4.2)$$

4.2 Sistema de posicionamento acústico

O Sistema de posicionamento acústico permite o cálculo da posição dos emissores no referencial $\{B\}$. A posição de um dado emissor no referencial $\{B\}$, pode ser calculada com base no vector unitário de direcção $\mathbf{d}$ e na distância ρ do emissor à origem do referencial $\{B\}$ através de

$${}^B\mathbf{p}_e = \rho\mathbf{d}. \quad (4.3)$$

Na Figura 4.1 apresenta-se a posição de um dado emissor no referencial $\{B\}$, a direcção $\mathbf{d}$ e a distância ρ .

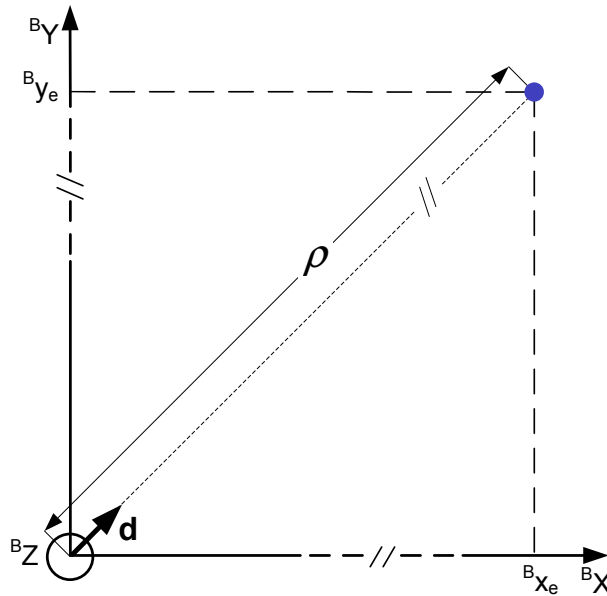


Figura 4.1 - Cálculo da posição do emissor no referencial $\{B\}$

A direcção e a distância dos emissores são calculadas com base no vector de tempos de chegada dos sinais acústicos aos receptores. A descrição do vector de tempos de chegada e do cálculo da direcção e distância é apresentada de seguida.

4.2.1 Tempos de chegada dos sinais

O tempo de chegada de um sinal acústico é definido pelo tempo que leva a onda acústica a percorrer a distância entre um emissor e um receptor. No Capítulo 2 verificou-se que os tempos de chegada dos sinais têm uma fonte de erro de modo comum e uma de modo diferencial. Tem-se então que para um dado emissor e N receptores instalados no veículo, o vector de tempos de chegada do sinal acústico é dado por

$$\mathbf{t}_m = \bar{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\varepsilon}_c + \boldsymbol{\varepsilon}_d, \quad (4.4)$$

sendo

$$\mathbf{t}_m = \begin{bmatrix} t_{1m} \\ t_{2m} \\ \vdots \\ t_{Nm} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \bar{t}_1 \\ \bar{t}_2 \\ \vdots \\ \bar{t}_N \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_c = \begin{bmatrix} \varepsilon_c \\ \varepsilon_c \\ \vdots \\ \varepsilon_c \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_d = \begin{bmatrix} \varepsilon_{d1} \\ \varepsilon_{d2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{dN} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

onde t_{im} é o tempo medido no receptor i com $i = 1, \dots, N$, $\bar{t}_i$ é o tempo real no receptor i , ε_c é o erro de modo comum e ε_{d_i} é o erro de modo diferencial.

Primando pela simplicidade dos cálculos, admite-se que tanto o modo diferencial como o modo comum possam ser aproximados por distribuições normais de valor médio nulo. Tem-se então

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &\sim N(0, \sigma_c^2), \\ \varepsilon_{d_i} &\sim N(0, \sigma_d^2), \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde σ_c^2 é a variância do erro de modo comum e σ_d^2 é a variância do erro de modo diferencial.

Enquanto que para o modo diferencial esta aproximação é apropriada, para o modo comum não é de todo a mais realista tendo em conta os factos observados no Capítulo 2. No entanto utiliza-se esta aproximação no presente trabalho, enquadrada nos objectivos de índole comparativa de duas estratégias de projecto de filtragem que utilizam a mesma fonte de erros, devendo no futuro ser enriquecida para implementação real do sistema de navegação.

4.2.2 Direcção de um emissor

O cálculo do vector de direcção de um dado emissor no referencial $\{B\}$ é feito com base no trabalho realizado em [1]. É utilizada a aproximação planar da onda acústica incidente nos receptores. Esta aproximação é validada em [1] e tem sido extensivamente utilizada em diversas aplicações semelhantes.

Na Figura 4.2 apresenta-se a projecção no plano XY de dois receptores (i e j) colocados no referencial $\{B\}$ com a incidência de uma onda acústica (com aproximação planar) com a mesma direcção e sentido de propagação oposto ao vector unitário de direcção do emissor $\mathbf{d} = [d_x \ d_y \ d_z]^T$.

Pode-se então escrever

$$\begin{cases} v_p t_i = v_p T_c \\ v_p t_j = v_p T_c + d_x (x_i - x_j) + d_y (y_i - y_j) + d_z (z_i - z_j) \end{cases}, \quad (4.7)$$

onde T_c é o tempo de trânsito da onda acústica do emissor ao primeiro receptor que encontra (neste caso o receptor i), v_p é a velocidade de propagação do som no meio e x_m , y_m e z_m são as três componentes da posição do receptor m no referencial $\{B\}$, com $m = \{i, j\}$, dada por

$${}^B \mathbf{p}_{r_m} = [x_m \ y_m \ z_m]^T. \quad (4.8)$$

Considere-se $\delta^{(i,j)} = t_i - t_j$ a diferença entre os tempos de chegada da onda acústica aos receptores i e j . Tem-se então que

$$\begin{aligned} v_p \delta^{(i,j)} &= v_p t_i - v_p t_j, \\ v_p \delta^{(i,j)} &= -(d_x (x_i - x_j) + d_y (y_i - y_j) + d_z (z_i - z_j)), \end{aligned} \quad (4.9)$$

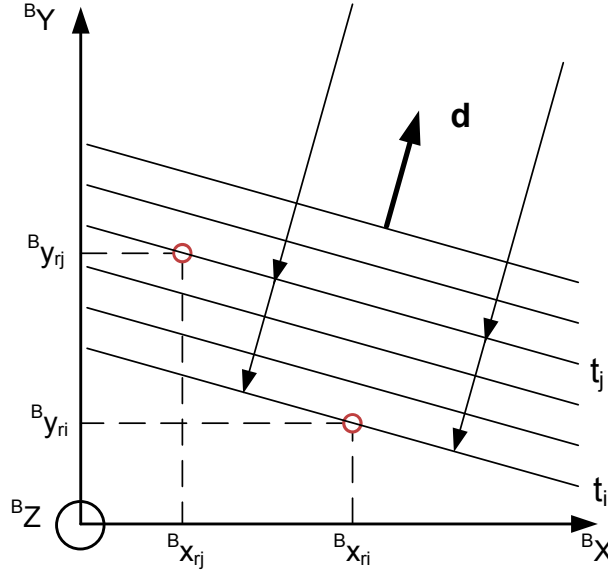


Figura 4.2 - Incidência de uma onda acústica em dois receptores no plano XY

ou na forma compacta,

$$v_p \delta^{(i,j)} = -\mathbf{d}^T \left({}^B \mathbf{p}_{r_i} - {}^B \mathbf{p}_{r_j} \right). \quad (4.10)$$

Considere-se então a existência de N receptores. Seja o vector

$$\Delta = \left[\delta^{(1,2)}_1 \quad \delta^{(1,3)}_2 \quad \dots \quad \delta^{(N-1,N)}_M \right]^T \quad (4.11)$$

que representa todas as combinações possíveis entre os tempos de chegada da onda acústica a todos os receptores.

Pode-se ainda escrever 4.11 como

$$\Delta = \mathbf{C} \mathbf{t}_m, \quad (4.12)$$

onde $\mathbf{t}_m$ é dado por 4.4 e $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{\frac{N(N-1)}{2} \times N}$ ($\frac{N(N-1)}{2} = {}^N \mathcal{C}_2$ é o número de todas as combinações possíveis de N elementos 2 a 2) é dada por

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1_{(N-1) \times 1} & & -\mathbf{I}_{(N-1) \times (N-1)} \\ \hline 0_{(N-2) \times 1} & 1_{(N-2) \times 1} & -\mathbf{I}_{(N-2) \times (N-2)} \\ \hline & \vdots & \\ \hline & 0_{1 \times (N-2)} & \begin{array}{c|c} 1 & -1 \end{array} \end{array} \right]. \quad (4.13)$$

Por exemplo, com 4 receptores tem-se a matriz $\mathbf{C}$ dada por

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]. \quad (4.14)$$

Considere-se ainda os vectores

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & x_1 - x_3 & \cdots & x_{N-1} - x_N \end{bmatrix}^T, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 - y_2 & y_1 - y_3 & \cdots & y_{N-1} - y_N \end{bmatrix}^T, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 - z_2 & z_1 - z_3 & \cdots & z_{N-1} - z_N \end{bmatrix}^T. \quad (4.17)$$

Pelo método dos mínimos quadrados, que minimiza o erro quadrático médio de estimação [1], tem-se que a direcção $\mathbf{d}$ é dada por

$$\mathbf{d} = -v_p \mathbf{M}_{PS}^\# \mathbf{C} \mathbf{t}_m, \quad (4.18)$$

onde

$$\mathbf{M}_{PS} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

e

$$\mathbf{M}_{PS}^\# = (\mathbf{M}_{PS}^T \mathbf{M}_{PS})^{-1} \mathbf{M}_{PS}^T. \quad (4.20)$$

é a pseudo-inversa de $\mathbf{M}_{PS}$.

A matriz $\mathbf{M}_{PS}^\#$ é constante e depende apenas da geometria de instalação dos receptores no referencial $\{B\}$. Em [1] é estudada a diversidade espacial da instalação dos receptores no veículo de forma a minimizar os erros no cálculo da direcção do emissor. Ao longo deste trabalho são utilizadas na instalação dos receptores geometrias semi-esféricas baseadas no estudo efectuado em [1].

4.2.3 Distância de um emissor

A distância ρ de um dado emissor ao veículo é definida pela distância desse emissor à origem do referencial $\{B\}$. A distância entre dois pontos é obtida pela multiplicação do tempo que a onda leva a percorrer essa distância pela velocidade de propagação no meio, ou seja, $\rho = v_p t$.

Na Figura 4.3 está representada a projecção no plano XY de dois receptores (i e j) colocados no referencial $\{B\}$ e um emissor (e). A distância do emissor à origem do referencial $\{B\}$ é representada por ρ , a distância que a onda planar percorre entre o emissor e cada um dos receptores é representada por ρ_{ek} com $k = i, j$ e a distância que a onda planar percorre entre cada um dos receptores e a origem do referencial $\{B\}$ é representada por ρ_{k0} .

Tem-se então que, conhecida a direcção do emissor (calculada na Secção 4.2.2), cada receptor pode fornecer uma estimativa da distância do emissor à origem do referencial $\{B\}$ (como ilustrado na Figura 4.3) através de

$$\hat{\rho}_k = \rho_{ek} + \rho_{k0}, \quad (4.21)$$

onde

$$\rho_{ek} = v_p t_{rk}, \quad (4.22)$$

$$\rho_{k0} = {}^B \bar{\mathbf{p}}_{r_k}^T \mathbf{d}, \quad (4.23)$$

e $\hat{\rho}_k$ é a estimativa de ρ fornecida pelo receptor k , $\mathbf{d}$ é a direcção do emissor, ${}^B \bar{\mathbf{p}}_{r_k}$ é a posição do receptor k no referencial $\{B\}$ e t_{rk} é o tempo de chegada observado pelo receptor k com $k = 1, \dots, N$ e N o número de receptores.

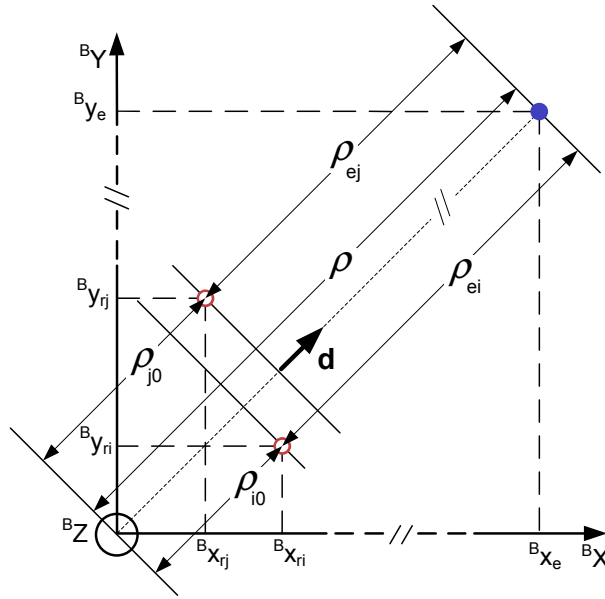


Figura 4.3 - Cálculo da distância do emissor à origem do referencial $\{B\}$

Fazendo a média das estimativas fornecidas pelos N receptores, tem-se a partir de 4.21 que a distância do emissor à origem do referencial $\{B\}$ pode ser estimada através de

$$\rho = \frac{1}{N} \sum_k \hat{\rho}_k = \frac{1}{N} \sum_k \left(v_p t_k + {}^B\bar{\mathbf{p}}_{r_k}^T \mathbf{d} \right). \quad (4.24)$$

A equação 4.24 pode ainda ser escrita na forma vectorial

$$\rho = \frac{1}{N} \mathbf{m}_{esp} (v_p \mathbf{t}_m + {}^B\bar{\mathbf{p}}_r^T \mathbf{d}), \quad (4.25)$$

onde $\mathbf{t}_m$ é o vector de tempos de chegada dado por 4.4, $\mathbf{m}_{esp}$ é o vector $[1_{1 \times N}]$ e ${}^B\bar{\mathbf{p}}_r$ é dado por

$${}^B\bar{\mathbf{p}}_r = \left[{}^B\bar{\mathbf{p}}_{r_1} \quad | \quad \dots \quad | \quad {}^B\bar{\mathbf{p}}_{r_N} \right]. \quad (4.26)$$

Capítulo 5

Navegação inercial auxiliada

Os INS são sistemas naturalmente instáveis em malha aberta devido à presença de ruídos e polarizações nos sensores inerciais como se verificou no Capítulo 3. Surge então a necessidade de corrigir os erros de estimação do INS com o objectivo de os manter limitados e tão pequenos quanto possível.

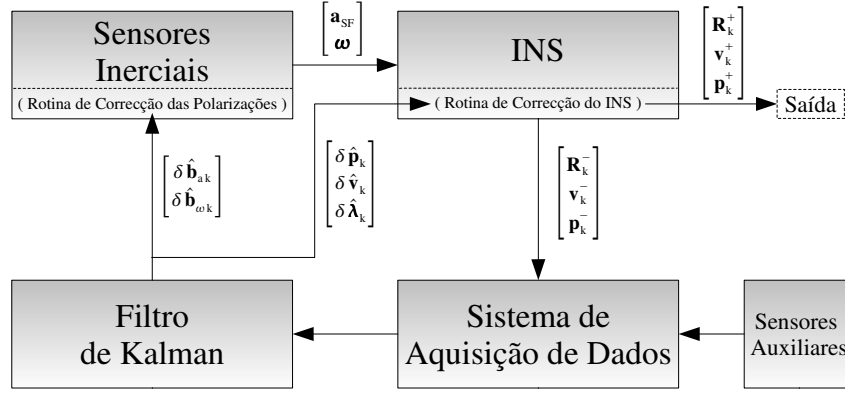
Neste Capítulo pretende-se desenvolver um sistema de navegação inercial auxiliado segundo uma topologia de realimentação directa (*direct feedback*). Nesta topologia utiliza-se um filtro de Kalman para estimar os erros de posição, velocidade, orientação e de polarização das tríades de giroscópios e acelerómetros. As observações do filtro são construídas com base na informação do INS e dos sensores auxiliares apresentados no Capítulo 4. Estas estimativas são então utilizadas para corrigir internamente o INS e para compensar as polarizações dos sensores inerciais, impedindo assim que os erros de estimação do INS cresçam ilimitadamente com o tempo.

É apresentada uma estratégia de projecto do sistema de navegação, tanto quanto se sabe inovadora, baseada na informação directa dos receptores acústicos. O desempenho desta estratégia é comparado, nas mesmas condições, com o de uma estratégia clássica baseada no cálculo das posições relativas dos emissores no referencial $\{B\}$ a partir dos dados dos receptores acústicos tal como apresentado no Capítulo 4. Os ruídos de observação das posições relativas são rigorosamente caracterizados com base nos ruídos de observação dos receptores acústicos no Apêndice H.

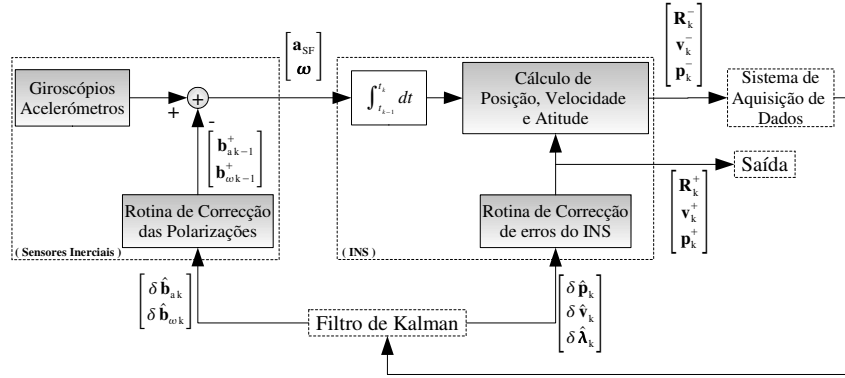
5.1 Topologia de realimentação directa

A topologia de realimentação directa, apresentada na Figura 5.1, utiliza o facto do filtro ser projectado no espaço das perturbações em relação a uma trajectória nominal, permitindo o funcionamento do filtro em torno da origem, onde a linearização efectuada para o modelo de erros do INS é válida.

Em cada instante de amostragem, o sistema de aquisição de dados constrói o vector de observações a fornecer ao filtro de Kalman, a partir das observações dos sensores auxiliares e da estimativa *a priori* de posição, velocidade e orientação do INS. O filtro de Kalman, baseado no modelo de erros do INS e das polarizações dos sensores inerciais, estima por sua vez os erros de posição, velocidade, orientação e de polarizações, sendo estes fornecidos a uma rotina embebida no algoritmo do INS que corrige a sua estimativa com base nestes erros.



(a) Topologia de realimentação directa



(b) Detalhe das rotinas de correcção

Figura 5.1 - Topologia INS com realimentação directa

As estimativas de posição e velocidade são então corrigidas através de

$$\begin{cases} \mathbf{p}_k^+ = \mathbf{p}_k^- - \delta \hat{\mathbf{p}}_k \\ \mathbf{v}_k^+ = \mathbf{v}_k^- - \delta \hat{\mathbf{v}}_k \end{cases}, \quad (5.1)$$

onde k é o índice do instante de amostragem, $\delta \hat{\mathbf{p}}_k$ é a estimativa do erro de posição e $\delta \hat{\mathbf{v}}_k$ a estimativa do erro de velocidade fornecidas pelo filtro de Kalman.

A estimativa de orientação é corrigida através [6] de

$${}^E_B \mathcal{R}_k^+ = {}^E_B \mathcal{R}_k^T \left(\delta \hat{\boldsymbol{\lambda}}_k \right) {}^E_B \mathcal{R}_k^-, \quad (5.2)$$

onde $\delta \hat{\boldsymbol{\lambda}}_k$ é a estimativa do vector de erro de orientação fornecida pelo filtro de Kalman e ${}^E_B \mathcal{R}_k^T \left(\delta \hat{\boldsymbol{\lambda}}_k \right)$ é descrita exactamente [6] por

$${}^E_B \mathcal{R}_k^T \left(\delta \hat{\boldsymbol{\lambda}}_k \right) = \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{\sin \left(\left\| \delta \hat{\boldsymbol{\lambda}}_k \right\| \right)}{\left\| \delta \hat{\boldsymbol{\lambda}}_k \right\|} \left[\delta \hat{\boldsymbol{\lambda}}_k \times \right] + \frac{1 - \cos \left(\left\| \delta \hat{\boldsymbol{\lambda}}_k \right\| \right)}{\left\| \delta \hat{\boldsymbol{\lambda}}_k \right\|^2} \left[\delta \hat{\boldsymbol{\lambda}}_k \times \right]^2. \quad (5.3)$$

As estimativas dos erros das polarizações dos sensores inerciais são fornecidos às rotinas de correcção das polarizações. Estas rotinas acumulam os valores dos erros das polarizações e subtraem o resultado às medições dos sensores inerciais, procurando assim remover as componentes correspondentes às polarizações, como ilustrado na Figura 5.1(b). A actualização da estimativa das polarizações é feita através de [6]

$$\begin{cases} \mathbf{b}_{a_k}^+ = \mathbf{b}_{a_k}^- - \delta \hat{\mathbf{b}}_{a_k} \\ \mathbf{b}_{\omega_k}^+ = \mathbf{b}_{\omega_k}^- - \delta \hat{\mathbf{b}}_{\omega_k} \end{cases}, \quad (5.4)$$

onde $\delta\hat{\mathbf{b}}_{ak}$ é a estimativa do erro de polarização dos acelerómetros e $\delta\hat{\mathbf{b}}_{\omega k}$ a estimativa do erro de polarização dos giroscópios fornecidas pelo filtro de Kalman.

As correcções são efectuadas em sincronia com o ritmo moderado do algoritmo de INS, sendo que no ritmo mais rápido não são efectuadas quaisquer correcções. Após cada instante de amostragem, os erros de estimação no interior do filtro de Kalman são colocados a zero pois estes são corrigidos no INS e nos sensores inerciais.

5.2 Modelo de erros do INS

O modelo de erros do INS utilizado no presente trabalho baseia-se no modelo perturbacional da cinemática dos corpos rígidos, apresentado em detalhe em [9], e foi utilizado para navegação local em [4]. A dinâmica dos erros de posição, velocidade e orientação pode ser descrita por

$$\begin{cases} \delta\dot{\mathbf{p}} &= \delta\mathbf{v} \\ \delta\dot{\mathbf{v}} &= \frac{E}{B}\mathcal{R} \delta^B \mathbf{a}_{SF} - [\frac{E}{B}\mathcal{R}^B \mathbf{a}_{SF} \times] \delta\boldsymbol{\lambda} \\ \delta\dot{\boldsymbol{\lambda}} &= \frac{E}{B}\mathcal{R} \delta\boldsymbol{\omega} \end{cases}, \quad (5.5)$$

onde $\delta\mathbf{p}$ é o erro de posição, $\delta\mathbf{v}$ é o erro de velocidade, $\delta\boldsymbol{\lambda}$ o vector de rotação do erro de orientação (ver Apêndice D), $\frac{E}{B}\mathcal{R}$ a matriz de rotação do referencial $\{B\}$ para o referencial $\{E\}$, $\delta^B \mathbf{a}_{SF}$ o erro de medição da tríade de acelerómetros e $\delta\boldsymbol{\omega}$ o erro de medição da tríade de giroscópios.

O erro de medição da tríade de acelerómetros $\delta^B \mathbf{a}_{SF}$ e de giroscópios $\delta\boldsymbol{\omega}$ é dado, respectivamente, por

$$\delta^B \mathbf{a}_{SF} = -\delta\mathbf{b}_a + \mathbf{n}_a, \quad (5.6)$$

$$\delta\boldsymbol{\omega} = -\delta\mathbf{b}_\omega + \mathbf{n}_\omega. \quad (5.7)$$

Substituindo 5.6 e 5.7 em 5.5 tem-se que o modelo de erros do INS vem dado por

$$\begin{cases} \delta\dot{\mathbf{p}} &= \delta\mathbf{v} \\ \delta\dot{\mathbf{v}} &= -\frac{E}{B}\mathcal{R} \delta\mathbf{b}_a - [\frac{E}{B}\mathcal{R}^B \mathbf{a}_{SF} \times] \delta\boldsymbol{\lambda} + \frac{E}{B}\mathcal{R} \mathbf{n}_a \\ \delta\dot{\boldsymbol{\lambda}} &= -\frac{E}{B}\mathcal{R} \delta\mathbf{b}_\omega + \frac{E}{B}\mathcal{R} \mathbf{n}_\omega \\ \delta\dot{\mathbf{b}}_a &= -\mathbf{n}_{b_a} \\ \delta\dot{\mathbf{b}}_\omega &= -\mathbf{n}_{b_\omega} \end{cases}, \quad (5.8)$$

sendo que as polarizações dos sensores inerciais são modeladas como processos de deslocamento aleatório (*random walk*), $\dot{\bar{\mathbf{b}}}_a = \mathbf{n}_{b_a}$, $\dot{\bar{\mathbf{b}}}_\omega = \mathbf{n}_{b_\omega}$, com $\mathbf{n}_{b_a}$ e $\mathbf{n}_{b_\omega}$ ruído branco gaussiano.

5.2.1 Implementação utilizando o filtro de Kalman

No modelo de erros do INS dado por 5.8, são necessárias quinze variáveis de estado: três para o erro de posição, três para o erro de velocidade, três para o vector de rotação do erro de orientação, três para o erro de polarizações da tríade de acelerómetros e as restantes três para o erro de polarizações da tríade de giroscópios.

Tem-se então que o vector de estados é dado por

$$\delta\mathbf{x} = [\delta\mathbf{p}^T \quad \delta\mathbf{v}^T \quad \delta\boldsymbol{\lambda}^T \quad \delta\mathbf{b}_a^T \quad \delta\mathbf{b}_\omega^T]^T, \quad (5.9)$$

em que cada um dos elementos tem três componentes: em x , y e z .

Tendo em conta 5.9, pode-se reescrever 5.8 na forma matricial

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\delta\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{n}, \quad (5.10)$$

onde $\mathbf{n}$ é o vector de ruídos de estado dado por

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_p^T & \mathbf{n}_a^T & \mathbf{n}_\omega^T & \mathbf{n}_{b_a}^T & \mathbf{n}_{b_\omega}^T \end{bmatrix}^T, \quad (5.11)$$

sendo $\mathbf{n}_p$ um ruído branco de média nula fictício, associado à estimativa do erro de posição e que serve como botão de ajuste da largura de banda filtro na estimação do erro de posição.

As matrizes $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ em 5.10 são dadas por

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -[\frac{E}{B}\mathcal{R}^B \mathbf{a}_{SF} \times] & -\frac{E}{B}\mathcal{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E}{B}\mathcal{R} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$\mathbf{G} = \text{blkdiag}(\mathbf{I}_{3 \times 3}, -\frac{E}{B}\mathcal{R}, -\frac{E}{B}\mathcal{R}, -\mathbf{I}_{3 \times 3}, -\mathbf{I}_{3 \times 3}), \quad (5.13)$$

onde $\text{blkdiag}(\dots)$ representa uma matriz diagonal por blocos.

A matriz de transição de estado do filtro equivalente discreto é obtida através da exponencial matricial [10]

$$\phi_k = e^{F T_s} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} T_s & -T_s [\frac{E}{B}\mathcal{R}^B \mathbf{a}_{SF} \times] & -\frac{T_s^2}{2} \frac{E}{B}\mathcal{R} & \frac{T_s^3}{6} [\frac{E}{B}\mathcal{R}^B \mathbf{a}_{SF} \times] \frac{E}{B}\mathcal{R} \\ 0 & \mathbf{I}_{3 \times 3} & -T_s [\frac{E}{B}\mathcal{R}^B \mathbf{a}_{SF} \times] & -T_s \frac{E}{B}\mathcal{R} & \frac{T_s^2}{2} [\frac{E}{B}\mathcal{R}^B \mathbf{a}_{SF} \times] \frac{E}{B}\mathcal{R} \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0 & -T_s \frac{E}{B}\mathcal{R} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

onde $T_s = t_{k+1} - t_k$ é o tempo de amostragem do filtro, sincronizado com o ritmo de amostragem mais lento do INS, suficientemente pequeno para que se possa considerar a matriz da dinâmica F constante no intervalo $[t_k, t_{k+1}]$.

Note-se que o modelo de erros do INS dado por 5.8 é não linear pois contém a matriz de rotação $\frac{E}{B}\mathcal{R}$ que é função do estado do sistema, originando um filtro de Kalman estendido (Apêndice G) quando implementado numa topologia de realimentação directa.

O equivalente discreto da matriz de covariância do ruído de estado é dado [10] por

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{G}_k \mathbf{Q} \mathbf{G}_k^T T_s, \quad (5.15)$$

onde $\mathbf{Q}$ é a matriz de covariância do ruído de estado contínuo, T_s é o tempo de amostragem e $\mathbf{G}_k = \mathbf{G}|_{t=t_k}$.

5.3 Medida auxiliar do erro de orientação

Em ambas as estratégias de projecto do sistema de navegação recorre-se às medições do magnetómetro apresentado na Secção 4.1 do Capítulo 4, para se obter uma medida do vector de rotação do erro de orientação do veículo.

A medida fornecida pelo magnetómetro é dada por 4.2, que se repete aqui por facilidade de leitura

$${}^B\mathbf{m}_m = {}^E\overline{\mathcal{R}}^T {}^E\overline{\mathbf{m}} + \mathbf{n}_m. \quad (5.16)$$

De 5.16, tendo em conta a relação entre a matriz de rotação real e sua estimativa dada pelo INS e apresentada em D.6 (Apêndice D), tem-se

$$\begin{aligned} {}^B\mathbf{m}_m &= {}^E\widehat{\mathcal{R}}^T [\mathbf{I}_{3 \times 3} + [\delta\boldsymbol{\lambda} \times]] {}^E\overline{\mathbf{m}} + \mathbf{n}_m, \\ {}^B\mathbf{m}_m &= {}^E\widehat{\mathcal{R}}^T {}^E\overline{\mathbf{m}} + {}^E\widehat{\mathcal{R}}^T [\delta\boldsymbol{\lambda} \times] {}^E\overline{\mathbf{m}} + \mathbf{n}_m. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Tendo em conta as propriedades do produto externo e das matrizes *skew-symmetric* (Apêndice E), tem-se de 5.17

$${}^B\mathbf{m}_m = {}^E\widehat{\mathcal{R}}^T {}^E\overline{\mathbf{m}} - {}^E\widehat{\mathcal{R}}^T [{}^E\overline{\mathbf{m}} \times] \delta\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{n}_m. \quad (5.18)$$

A estimativa do vector do campo magnético terrestre no referencial $\{B\}$ é dada por

$${}^B\widehat{\mathbf{m}} = {}^E\widehat{\mathcal{R}}^T {}^E\overline{\mathbf{m}}. \quad (5.19)$$

Subtraindo 5.19 de 5.18 tem-se que a medida auxiliar do erro de orientação a fornecer ao filtro de Kalman vem dada por

$$\delta\mathbf{z}_{mag} = {}^B\mathbf{m}_m - {}^B\widehat{\mathbf{m}} = -{}^E\widehat{\mathcal{R}}^T [{}^E\overline{\mathbf{m}} \times] \delta\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{n}_m. \quad (5.20)$$

5.4 Projecto no espaço das posições relativas

Nesta Secção apresenta-se as equações de observação da estratégia clássica de projecto do sistema de navegação no espaço das posições relativas. As observações dos tempos de chegada dos sinais acústicos nos receptores são utilizadas para calcular as posições relativas dos emissores no referencial $\{B\}$ como apresentado no Capítulo 4. Estas são então comparadas com as respectivas estimativas obtidas a partir dos dados fornecidos pelo INS devidamente corrigidos pelo filtro de Kalman estendido. Este resultado relaciona-se então com as variáveis a estimar pelo filtro através da equação de observação do filtro de Kalman (Apêndice G).

A posição observada de um dado emissor j no referencial $\{B\}$ pode ser escrita como

$${}^B\mathbf{p}_{e_j m} = {}^E\overline{\mathcal{R}}^T \left({}^E\overline{\mathbf{p}}_{e_j} - {}^E\overline{\mathbf{p}}_{Borg} \right) + \mathbf{n}_{pr}, \quad (5.21)$$

onde ${}^E\overline{\mathbf{p}}_{e_j}$ é a posição do emissor j no referencial $\{E\}$ conhecida *a priori* e $\mathbf{n}_{pr}$ é o respectivo erro de observação.

De 5.21, tendo em conta a relação entre a matriz de rotação real e sua estimativa dada pelo INS e apresentada em D.6 (Apêndice D), tem-se

$${}^B\mathbf{p}_{e_j m} = {}^E\widehat{\mathcal{R}}^T [\mathbf{I}_{3 \times 3} + [\delta\boldsymbol{\lambda} \times]] \left({}^E\overline{\mathbf{p}}_{e_j} - {}^E\overline{\mathbf{p}}_{Borg} \right) + \mathbf{n}_{pr}. \quad (5.22)$$

Expandindo 5.22 vem

$${}^B\mathbf{p}_{e_j m} = {}^E\widehat{\mathcal{R}}^T \left({}^E\overline{\mathbf{p}}_{e_j} - {}^E\overline{\mathbf{p}}_{Borg} \right) + {}^E\widehat{\mathcal{R}}^T [\delta\boldsymbol{\lambda} \times] \left({}^E\overline{\mathbf{p}}_{e_j} - {}^E\overline{\mathbf{p}}_{Borg} \right) + \mathbf{n}_{pr}. \quad (5.23)$$

Tendo em conta que a posição real do veículo verifica

$${}^E\bar{\mathbf{p}}_{Borg} = {}^E\hat{\mathbf{p}}_{Borg} - \delta\mathbf{p}, \quad (5.24)$$

tem-se de 5.23

$$\begin{aligned} {}^B\mathbf{p}_{e_jm} &= {}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \left({}^E\bar{\mathbf{p}}_{e_j} - {}^E\hat{\mathbf{p}}_{Borg} + \delta\mathbf{p} \right) + \\ &+ {}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T [\delta\boldsymbol{\lambda} \times] \left({}^E\bar{\mathbf{p}}_{e_j} - {}^E\hat{\mathbf{p}}_{Borg} + \delta\mathbf{p} \right) + \mathbf{n}_{pr}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Tendo em conta as propriedades do produto externo e das matrizes *skew-symmetric* (Apêndice E), tem-se de 5.25

$$\begin{aligned} {}^B\mathbf{p}_{e_jm} &= {}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \left({}^E\bar{\mathbf{p}}_{e_j} - {}^E\hat{\mathbf{p}}_{Borg} \right) + {}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \delta\mathbf{p} + \\ &+ \left[{}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \delta\boldsymbol{\lambda} \times \right] \left({}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \left({}^E\bar{\mathbf{p}}_{e_j} - {}^E\hat{\mathbf{p}}_{Borg} \right) + {}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \delta\mathbf{p} \right) + \mathbf{n}_{pr}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

A estimativa da posição do emissor no referencial $\{B\}$ é dada por

$${}^B\hat{\mathbf{p}}_{e_j} = {}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \left({}^E\bar{\mathbf{p}}_{e_j} - {}^E\hat{\mathbf{p}}_{Borg} \right). \quad (5.27)$$

Substituindo 5.27 em 5.26 tem-se

$${}^B\mathbf{p}_{e_jm} = {}^B\hat{\mathbf{p}}_{e_j} + {}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \delta\mathbf{p} + \left[{}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \delta\boldsymbol{\lambda} \times \right] \left({}^B\hat{\mathbf{p}}_{e_j} + {}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \delta\mathbf{p} \right) + \mathbf{n}_{pr}. \quad (5.28)$$

Expandindo 5.28 obtém-se

$${}^B\mathbf{p}_{e_jm} = {}^B\hat{\mathbf{p}}_{e_j} + {}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \delta\mathbf{p} + \left[{}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \delta\boldsymbol{\lambda} \times \right] {}^B\hat{\mathbf{p}}_{e_j} + \left[{}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \delta\boldsymbol{\lambda} \times \right] {}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \delta\mathbf{p} + \mathbf{n}_{pr}. \quad (5.29)$$

Desprezando o termo de ordem superior $\left[{}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \delta\boldsymbol{\lambda} \times \right] {}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \delta\mathbf{p}$ em 5.29, pois contém o produto entre $\delta\mathbf{p}$ e $\delta\boldsymbol{\lambda}$, tem-se

$${}^B\mathbf{p}_{e_jm} = {}^B\hat{\mathbf{p}}_{e_j} + {}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \delta\mathbf{p} + \left[{}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \delta\boldsymbol{\lambda} \times \right] {}^B\hat{\mathbf{p}}_{e_j} + \mathbf{n}_{pr}. \quad (5.30)$$

Tendo novamente em conta as propriedades do produto externo e das matrizes *skew-symmetric* (Apêndice E), pode-se reescrever 5.30 como

$${}^B\mathbf{p}_{e_jm} = {}^B\hat{\mathbf{p}}_{e_j} + {}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \delta\mathbf{p} - \left[{}^B\hat{\mathbf{p}}_{e_j} \times \right] {}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \delta\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{n}_{pr}. \quad (5.31)$$

Subtraindo 5.27 de 5.31 tem-se que a equação de observação do filtro de Kalman é dada por

$$\delta\mathbf{z}_{pr} = {}^B\mathbf{p}_{e_jm} - {}^B\hat{\mathbf{p}}_{e_j} = {}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \delta\mathbf{p} - \left[{}^B\hat{\mathbf{p}}_{e_j} \times \right] {}^E_B\hat{\mathcal{R}}^T \delta\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{n}_{pr}. \quad (5.32)$$

O diagrama do sistema de aquisição de dados para esta estratégia é apresentado na Figura 5.2 e corresponde à implementação da equação 5.32 sendo utilizado o filtro de Kalman estendido (Apêndice G).

A matriz de observações $\mathbf{H}_k$ do filtro de Kalman estendido é dada por

$$\mathbf{H}_k = \text{blkdiag}(\mathbf{H}_{k1}, \dots, \mathbf{H}_{kM}), \quad (5.33)$$

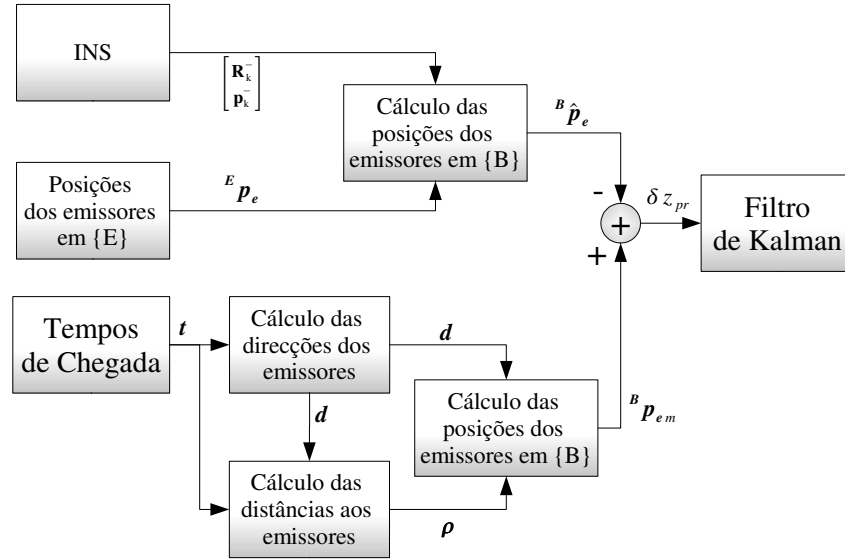


Figura 5.2 - Diagrama do sistema de aquisição de dados da estratégia das posições relativas

onde M é o número de emissores disponíveis e $\mathbf{H}_{kj}$ é a matriz de observação para cada emissor j com $j = 1, \dots, M$ e é dada por

$$\mathbf{H}_{kj} = \begin{bmatrix} {}^E_B \hat{\mathcal{R}}^T & 0 & -[{}^B \hat{\mathbf{p}}_{e_j} \times] {}^E_B \hat{\mathcal{R}}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

A matriz de covariância do ruído de observação $\mathbf{R}_k$, considerando os ruídos de modo comum e diferencial discretos, é dada por

$$\mathbf{R}_k = \text{blkdiag}(\mathbf{R}_{k1}, \dots, \mathbf{R}_{kM}), \quad (5.35)$$

onde $\mathbf{R}_{kj}$ é a matriz do ruído de observação para cada emissor j com $j = 1, \dots, M$ e é dada por H.43 (Apêndice H). Note-se que esta matriz é diagonal por blocos pois os ruídos de modo comum e diferencial dos emissores são incorrelacionados.

5.5 Projecto no espaço dos sensores

Nesta secção apresenta-se as equações de observação da estratégia de projecto do sistema de navegação no espaço dos sensores que se baseia em fornecer directamente a informação dos receptores acústicos ao filtro de Kalman. Ao contrário da estratégia clássica de projecto, nesta estratégia evita-se efectuar qualquer tipo de cálculo sobre os dados adquiridos pelos sensores acústicos. Estes são directamente fornecidos ao filtro de Kalman evitando assim a perda de informação ao efectuar cálculos não lineares e aproximações planares das ondas acústicas.

A posição de um dado receptor i colocado no veículo em relação ao referencial $\{E\}$ é dada por

$${}^E \bar{\mathbf{p}}_{r_i} = {}^E \bar{\mathbf{p}}_{Borg} + {}^E_B \bar{\mathcal{R}} {}^B \bar{\mathbf{p}}_{r_i}, \quad (5.36)$$

onde ${}^E \bar{\mathbf{p}}_{r_i}$ é a posição do receptor i no referencial $\{E\}$ e ${}^B \bar{\mathbf{p}}_{r_i}$ a posição do receptor i no referencial $\{B\}$.

A distância de um receptor i a um emissor j é então dada, tendo em conta 5.36, pela norma do vector que une os dois

$$\bar{\rho}_{ji} = \left\| {}^E\bar{\mathbf{p}}_{e_j} - {}^E\bar{\mathbf{p}}_{r_i} \right\| = \left\| {}^E\bar{\mathbf{p}}_{e_j} - {}^E\bar{\mathbf{p}}_{Borg} - {}^E_B\bar{\mathcal{R}} {}^B\bar{\mathbf{p}}_{r_i} \right\|. \quad (5.37)$$

A medida de distância de um receptor i a um emissor j é dada pela multiplicação da velocidade de propagação do som na água v_p pelo tempo observado no receptor i do sinal acústico emitido pelo emissor j

$$\rho_{jim} = v_p t_{jim} = \bar{\rho}_{ji} + n_{\rho_{ji}}, \quad (5.38)$$

onde $\bar{\rho}_{ji}$ e $n_{\rho_{ji}}$ são dados, tendo em conta 4.4, por

$$\bar{\rho}_{ji} = v_p \bar{t}_{ji}, \quad (5.39)$$

$$n_{\rho_{ji}} = v_p (\varepsilon_{c_j} + \varepsilon_{d_{ji}}). \quad (5.40)$$

Substituindo 5.37 em 5.38 tem-se

$$\rho_{jim} = \left\| {}^E\bar{\mathbf{p}}_{e_j} - {}^E\bar{\mathbf{p}}_{Borg} - {}^E_B\bar{\mathcal{R}} {}^B\bar{\mathbf{p}}_{r_i} \right\| + n_{\rho_{ji}}. \quad (5.41)$$

Substituindo 5.24 em 5.41 resulta

$$\rho_{jim} = \left\| {}^E\bar{\mathbf{p}}_{e_j} - {}^E\hat{\mathbf{p}}_{Borg} + \delta\mathbf{p} - {}^E_B\hat{\mathcal{R}} {}^B\bar{\mathbf{p}}_{r_i} \right\| + n_{\rho_{ji}}. \quad (5.42)$$

Tendo em conta a relação entre a matriz de rotação real e sua estimativa dada pelo INS e apresentada em D.5 (Apêndice D), obtém-se de 5.42

$$\begin{aligned} \rho_{jim} &= \left\| {}^E\bar{\mathbf{p}}_{e_j} - {}^E\hat{\mathbf{p}}_{Borg} + \delta\mathbf{p} - [I - [\delta\boldsymbol{\lambda} \times]] {}^E_B\hat{\mathcal{R}} {}^B\bar{\mathbf{p}}_{r_i} \right\| + n_{\rho_{ji}}, \\ \rho_{jim} &= \left\| {}^E\bar{\mathbf{p}}_{e_j} - {}^E\hat{\mathbf{p}}_{Borg} + \delta\mathbf{p} - {}^E_B\hat{\mathcal{R}} {}^B\bar{\mathbf{p}}_{r_i} + [\delta\boldsymbol{\lambda} \times] {}^E_B\hat{\mathcal{R}} {}^B\bar{\mathbf{p}}_{r_i} \right\| + n_{\rho_{ji}}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Tendo em conta as propriedades do produto externo e das matrizes *skew-symmetric* (Apêndice E), pode-se reescrever 5.43 como

$$\rho_{jim} = \left\| {}^E\bar{\mathbf{p}}_{e_j} - {}^E\hat{\mathbf{p}}_{Borg} + \delta\mathbf{p} - {}^E_B\hat{\mathcal{R}} {}^B\bar{\mathbf{p}}_{r_i} - \left[{}^E_B\hat{\mathcal{R}} {}^B\bar{\mathbf{p}}_{r_i} \times \right] \delta\boldsymbol{\lambda} \right\| + n_{\rho_{ji}}. \quad (5.44)$$

A medida a apresentar ao filtro de Kalman estendido para cada receptor i e emissor j é então dada por 5.44. Na forma vectorial, tem-se

$$\boldsymbol{\rho}_m = \bar{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{n}_\rho, \quad (5.45)$$

onde

$$\boldsymbol{\rho}_m = \begin{bmatrix} \rho_{11m} \\ \rho_{12m} \\ \vdots \\ \rho_{MNm} \end{bmatrix}; \quad \bar{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_{11} \\ \bar{\rho}_{12} \\ \vdots \\ \bar{\rho}_{MN} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{n}_\rho = \begin{bmatrix} v_p(\varepsilon_{c_1} + \varepsilon_{d_{11}}) \\ v_p(\varepsilon_{c_1} + \varepsilon_{d_{12}}) \\ \vdots \\ v_p(\varepsilon_{c_M} + \varepsilon_{d_{MN}}) \end{bmatrix}. \quad (5.46)$$

O diagrama do sistema de aquisição de dados desta estratégia é apresentado na Figura 5.3 e corresponde à implementação da equação 5.45, sendo utilizado o filtro de

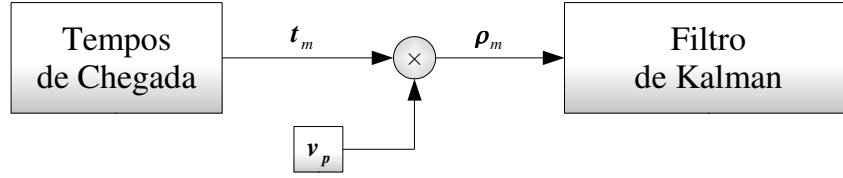


Figura 5.3 - Diagrama do sistema de aquisição de dados da estratégia no espaço dos sensores

Kalman estendido com matriz de ligação do vector de ruídos das observações ao vector de observações (Apêndice G).

Para construção da matriz de observação $\mathbf{H}_k$ do filtro de Kalman estendido é necessário calcular o jacobiano da equação de observação em ordem às variáveis de estado do filtro. Tendo em conta a derivada da norma de um vector, deduzida no Apêndice F, tem-se então de 5.44 para cada combinação receptor-emissor

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_{ji}}{\partial \delta \mathbf{p}} = \frac{\left({}^E \bar{\mathbf{p}}_{e_j} - {}^E \hat{\mathbf{p}}_{Borg} + \delta \mathbf{p} - \frac{E}{B} \hat{\mathcal{R}} {}^B \bar{\mathbf{p}}_{r_i} - \left[\frac{E}{B} \hat{\mathcal{R}} {}^B \bar{\mathbf{p}}_{r_i} \times \right] \delta \boldsymbol{\lambda} \right)^T}{\left\| {}^E \bar{\mathbf{p}}_{e_j} - {}^E \hat{\mathbf{p}}_{Borg} + \delta \mathbf{p} - \frac{E}{B} \hat{\mathcal{R}} {}^B \bar{\mathbf{p}}_{r_i} - \left[\frac{E}{B} \hat{\mathcal{R}} {}^B \bar{\mathbf{p}}_{r_i} \times \right] \delta \boldsymbol{\lambda} \right\|}} \\ \frac{\partial \rho_{ji}}{\partial \delta \mathbf{v}} = 0 \\ \frac{\partial \rho_{ji}}{\partial \delta \boldsymbol{\lambda}} = \frac{\left({}^E \bar{\mathbf{p}}_{e_j} - {}^E \hat{\mathbf{p}}_{Borg} + \delta \mathbf{p} - \frac{E}{B} \hat{\mathcal{R}} {}^B \bar{\mathbf{p}}_{r_i} - \left[\frac{E}{B} \hat{\mathcal{R}} {}^B \bar{\mathbf{p}}_{r_i} \times \right] \delta \boldsymbol{\lambda} \right)^T \left(- \left[\frac{E}{B} \hat{\mathcal{R}} {}^B \bar{\mathbf{p}}_{r_i} \times \right] \right)}{\left\| {}^E \bar{\mathbf{p}}_{e_j} - {}^E \hat{\mathbf{p}}_{Borg} + \delta \mathbf{p} - \frac{E}{B} \hat{\mathcal{R}} {}^B \bar{\mathbf{p}}_{r_i} - \left[\frac{E}{B} \hat{\mathcal{R}} {}^B \bar{\mathbf{p}}_{r_i} \times \right] \delta \boldsymbol{\lambda} \right\|}} \\ \frac{\partial \rho_{ji}}{\partial \delta \mathbf{b}_a} = 0 \\ \frac{\partial \rho_{ji}}{\partial \delta \mathbf{b}_\omega} = 0 \end{array} \right. \quad (5.47)$$

A matriz $\mathbf{H}_k$ é então dada por

$$\mathbf{H}_k = \text{blkdiag}(\mathbf{H}_{k11}, \mathbf{H}_{k12}, \dots, \mathbf{H}_{kMN}), \quad (5.48)$$

onde cada sub-matriz $\mathbf{H}_{kji}$ é o jacobiano dado por

$$\mathbf{H}_{kji} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho_{ji}}{\partial \delta \mathbf{p}} & \frac{\partial \rho_{ji}}{\partial \delta \mathbf{v}} & \frac{\partial \rho_{ji}}{\partial \delta \boldsymbol{\lambda}} & \frac{\partial \rho_{ji}}{\partial \delta \mathbf{b}_a} & \frac{\partial \rho_{ji}}{\partial \delta \mathbf{b}_\omega} \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

e os seus elementos dados por 5.47.

A matriz de covariância do ruído de observação $\mathbf{R}_k$, considerando os ruídos de modo comum e diferencial discretos, é dada por

$$\mathbf{R}_k = \text{blkdiag}(\mathbf{R}_{k1}, \dots, \mathbf{R}_{kM}). \quad (5.50)$$

Cada sub-matriz $\mathbf{R}_{kj}$ em 5.50 corresponde a um emissor j e é dada por

$$\mathbf{R}_{kj} = \text{blkdiag}(v_p^2 \sigma_c^2, v_p^2 \sigma_d^2 \mathbf{I}_{N \times N}), \quad (5.51)$$

onde σ_c^2 é a variância do ruído de modo comum, σ_d^2 a variância do ruído de modo diferencial e v_p a velocidade de propagação do som na água. O ruído de modo comum é modelado de igual forma para todos os emissores como ruído branco gaussiano.

A matriz de ligação $\mathbf{B}_k$ é dada por

$$\mathbf{B}_k = \text{blkdiag}(\mathbf{B}_{k1}, \dots, \mathbf{B}_{kM}), \quad (5.52)$$

onde cada sub-matriz $\mathbf{B}_{kj}$ é dada por

$$\mathbf{B}_{kj} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N \times 1} & \mathbf{I}_{N \times N} \end{bmatrix}. \quad (5.53)$$

Com a matriz de ligação do vector dos ruídos de observação ao vector de observações, dada por 5.52, contabiliza-se então o efeito do ruído de modo comum e do ruído de modo diferencial em cada observação.

5.6 Análise de observabilidade

A análise de observabilidade de sistemas dinâmicos é extremamente importante em estimação em geral e permite garantir boas propriedades na utilização de filtros de Kalman em particular. Esta permite determinar o desempenho do filtro de Kalman na estimação das variáveis de estado. Se o vector de estados for completamente observável, o desempenho de estimação do filtro depende apenas dos ruídos de observação e de estado. No entanto, se o vector de estados não for completamente observável não é possível obter uma estimativa correcta deste, mesmo que os ruídos de estado e de observação sejam nulos.

O sistema linear discreto dado por

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \boldsymbol{\phi}(k+1, k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k), & \mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^{n \times 1} \\ \mathbf{z}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k), & \mathbf{z}(k) \in \mathbb{R}^{p \times n} \end{cases}, \quad (5.54)$$

diz-se observável [11] no intervalo $[k_0, k_f]$ com $k_f \geq k_0 + 1$ se qualquer estado inicial $\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0$ for univocamente determinado pela solução da equação homogénea correspondente ao sistema $\mathbf{z}(k) : \mathbf{u}(k) = 0$ para $k = k_0, \dots, k_f - 1$.

A solução da equação homogénea no intervalo $[k_0, k_f]$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}(k_0) \\ \mathbf{z}(k_0 + 1) \\ \vdots \\ \mathbf{z}(k_f - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(k_0)\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{H}(k_0 + 1)\boldsymbol{\phi}(k_0 + 1, k_0)\mathbf{x}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{H}(k_f - 1)\boldsymbol{\phi}(k_f - 1, k_0)\mathbf{x}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}(k_0, k_f)\mathbf{x}_0, \quad (5.55)$$

onde a matriz $p(k_f - k_0) \times n$

$$\mathbf{O}(k_0, k_f) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(k_0) \\ \mathbf{H}(k_0 + 1)\boldsymbol{\phi}(k_0 + 1, k_0) \\ \vdots \\ \mathbf{H}(k_f - 1)\boldsymbol{\phi}(k_f - 1, k_0) \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

é denominada matriz de observabilidade.

Pode-se escrever ainda [11] que o sistema linear discreto dado por 5.54 diz-se observável no intervalo $[k_0, k_f]$ se e só se

$$\text{rank } \mathbf{O}(k_0, k_f) = n, \quad (5.57)$$

onde rank define a característica de uma matriz e n é dimensão do vector de estados $\mathbf{x}$. A característica da matriz de observabilidade indica ainda o número de variáveis observáveis do sistema.

A análise de observabilidade dos sistemas implementados foi efectuada ao longo de quatro tipos de movimento do veículo: estando o veículo parado, em movimento rectilíneo uniforme, em movimento curvilíneo uniforme (com rotação no eixo z) e numa trajectória composta de movimento curvilíneo e rectilíneo. Para cada um dos tipos de movimento, a análise de observabilidade é efectuada com observações de um a três emissores e também com observações do magnetómetro.

Na Tabela 5.1 apresenta-se o número de variáveis de estado observáveis para cada uma das configurações referidas anteriormente. Os resultados da análise de observabilidade são idênticos para ambas as estratégias. O vector de estados dado por 5.9 é de dimensão 15.

Observando a Tabela 5.1 podem-se tirar várias conclusões interessantes acerca da observabilidade do sistema. Estando o veículo parado e em trajectórias rectas, apenas se

Tabela 5.1 - Análise de observabilidade dos sistemas de navegação

Configuração	Parado	Recta	Curva	Recta → Curva
1 emissor	11	11	13	15
2 emissores	14	14	15	15
3 emissores	15	15	15	15
1 emissor + magnetómetro	14	14	15	15
2 emissores + magnetómetro	15	15	15	15

consegue observabilidade de todas as variáveis com três emissores ou com dois emissores e o magnetómetro.

No entanto em trajectórias curvas, com apenas um emissor e magnetómetro conseguem-se observar todas as variáveis. Este facto verifica-se pois neste tipo de trajectórias, a matriz de rotação altera-se à medida que o veículo progride na trajectória curvilínea excitando os diversos modos presentes no filtro.

É interessante verificar que numa passagem duma trajectória rectilínea para uma curvilínea, o sistema ganha observabilidade de todas as variáveis, devido à aceleração necessária para a mudança de trajectória que excita todos os modos do filtro. Este ganho de observabilidade verifica-se mesmo para o pior caso em que se utiliza apenas um emissor e sem magnetómetro.

A presença de dois emissores e do magnetómetro garantem a observabilidade de todas as variáveis em todas as situações. No entanto, tendo em conta que nenhum veículo consegue realizar trajectórias perfeitamente rectilíneas pois sofre sempre acelerações laterais (devidas por exemplo a correntes marítimas) que poderão excitar todos os modos do filtro, é de esperar que na prática se consiga fazer navegação apenas com um emissor e o magnetómetro em trajectórias rectas.

5.7 Implementação e resultados

A implementação das duas estratégias foi efectuada utilizando uma geometria de instalação dos receptores acústicos no referencial do corpo $\{B\}$ com 13 receptores dispostos sobre uma semi-esfera como apresentado na Figura 5.4(a).

Na Tabela 5.2 apresenta-se os valores das variâncias do ruído do magnetómetro e dos ruídos de modo comum e diferencial dos receptores acústicos. Os ruídos brancos dos sensores auxiliares são simulados em tempo discreto. Para o erro de modo diferencial dos receptores acústicos adoptou-se um desvio padrão de $5 \mu s$ correspondente ao inverso da frequência de amostragem de 200 KHz. Para o erro de modo comum adoptou-se uma aproximação por uma distribuição normal com desvio padrão de $50 \mu s$ e média nula. Utiliza-se esta aproximação, como já justificada anteriormente, enquadrada nos objectivos de índole comparativa das duas estratégias de projecto do sistema de navegação em análise. Numa implementação real e para análise individual de desempenho do sistema de navegação, este erro de modo comum deverá ser correctamente caracterizado. Na Tabela 5.3 apresenta-se os valores das polarizações e variâncias dos ruídos dos sensores inerciais.

Os tempos de amostragem adoptados são de 1 s para o sistema acústico, 0.02 s para o magnetómetro, 0.02 s para o ritmo moderado do algoritmo INS e 0.01 s para o ritmo

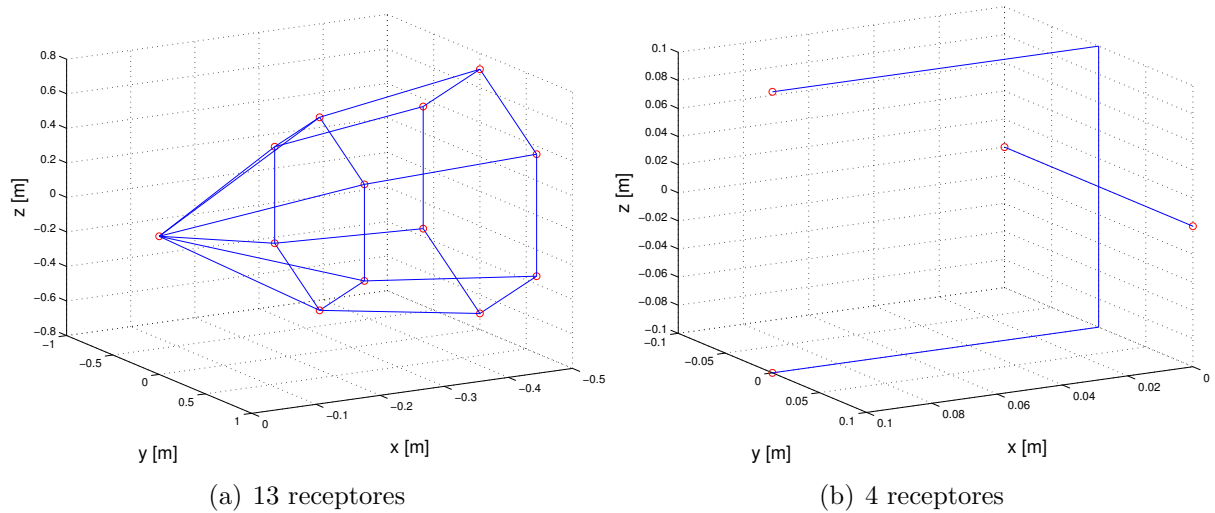


Figura 5.4 - Geometria dos receptores acústicos

Tabela 5.2 - Descrição dos erros dos sensores auxiliares

Sensor	Polarização	Variância
Giroscópios	0.05 °/s	$(0.02 \text{ °/s})^2$
Acelerómetros	10 mg	$(0.6 \text{ mg})^2$

Tabela 5.3 - Descrição dos erros dos sensores inerciais

Sensor	Variância
Magnetómetro	$(1 \text{ } \mu\text{G})^2$
Receptores Acústicos: modo comum	$(50 \text{ } \mu\text{s})^2$
Receptores Acústicos: modo diferencial	$(5 \text{ } \mu\text{s})^2$

mais rápido. O filtro de Kalman estendido funciona sincronizado com o ritmo moderado do INS.

Os sistemas de navegação implementados são avaliados em cinco situações de funcionamento. As quatro primeiras simulações são efectuadas com o veículo a percorrer a trajectória de teste apresentada na Figura 5.5, sendo fornecidos ao sistema os valores iniciais correctos. A três primeiras simulações são efectuadas com 1 emissor colocado, respectivamente, a 100 m, 500 m e 1000 m da posição inicial, na coordenada x e zero nas restantes. A quarta simulação é efectuada com 3 emissores colocados cada um a 100 m da posição inicial segundo x , y e z respectivamente.

A quinta simulação é efectuada utilizando o magnetómetro, 13 receptores e 1 emissor colocado a 100 m da posição inicial, na coordenada x e zero nas restantes, segundo uma espiral ascendente semelhante à da Figura 5.5, mas sem a recta inicial de aceleração. Nesta simulação não são fornecidos aos sistemas os valores iniciais das polarizações dos giroscópios nem dos acelerómetros e serve para mostrar o funcionamento dos sistemas em calibração das polarizações dos sensores inerciais.

Adicionalmente, ambas as estratégias foram testadas utilizando a geometria de receptores apresentada na Figura 5.4(b). Esta geometria é semelhante à utilizada num sistema

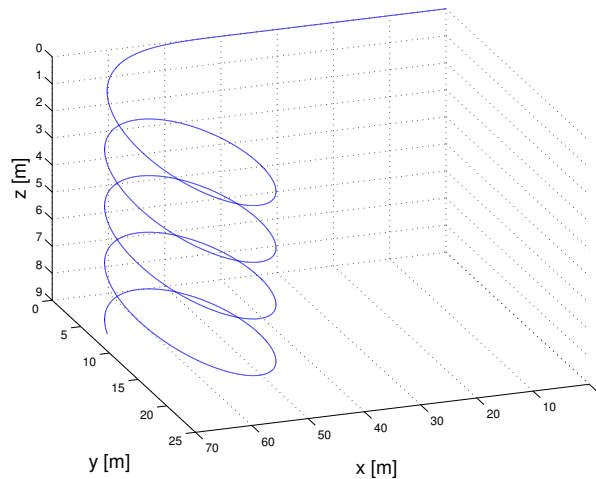


Figura 5.5 - Trajectória de teste

USBL real denominado GAPS, desenvolvido pela iXSea [12]. Esta simulação é efectuada utilizando o magnetómetro e 1 emissor colocado a 100 m da posição inicial, na coordenada x e zero nas restantes.

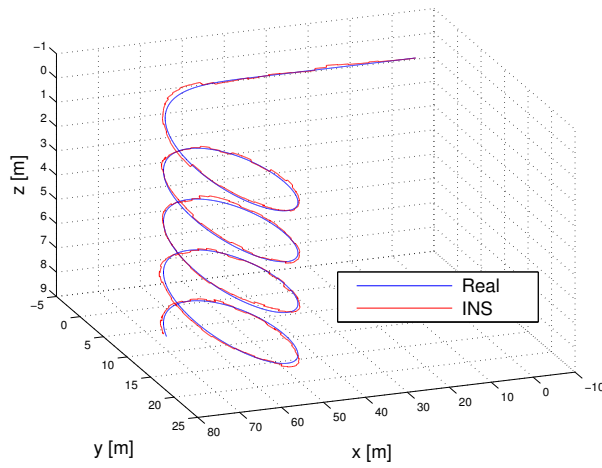
Os resultados da simulação dos sistemas de navegação auxiliados por 13 receptores, 1 emissor e magnetómetro, são apresentados na Figura 5.6 para a estratégia no espaço das posições relativas e na Figura 5.7 para a estratégia no espaço dos sensores. Nas Tabelas 5.4 e 5.5 apresenta-se a raiz quadrada do erro quadrático médio de estimação de posição e orientação para a simulação correspondente, sendo que "PR" representa a estratégia no espaço das posições relativas e "S" a estratégia no espaço dos sensores.

Tabela 5.4 - Raiz quadrada do erro quadrático médio de estimação de posição com 13 receptores, 1 emissor e magnetómetro

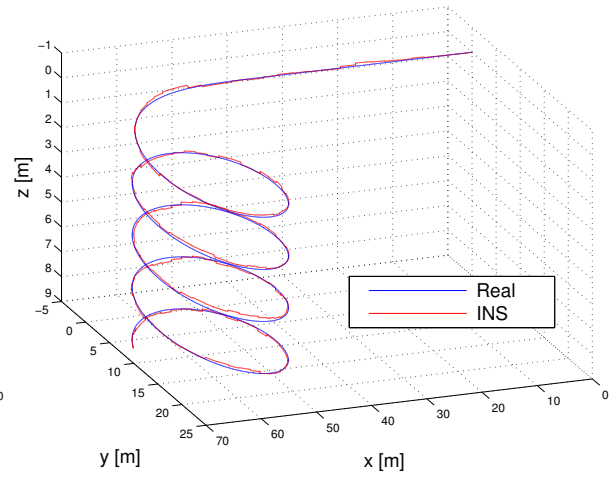
	δp_x [m]		δp_y [m]		δp_z [m]	
	PR	S	PR	S	PR	S
1 a 100 m	0.22	0.06	0.46	0.13	0.07	0.08
1 a 500 m	0.90	0.05	0.73	0.56	0.50	0.53
1 a 1000 m	1.73	0.05	1.36	0.85	0.96	1.02
3 a 100 m	0.26	0.06	0.55	0.07	0.07	0.05

Tabela 5.5 - Raiz quadrada do erro quadrático médio de estimação de orientação com 13 receptores, 1 emissor e magnetómetro

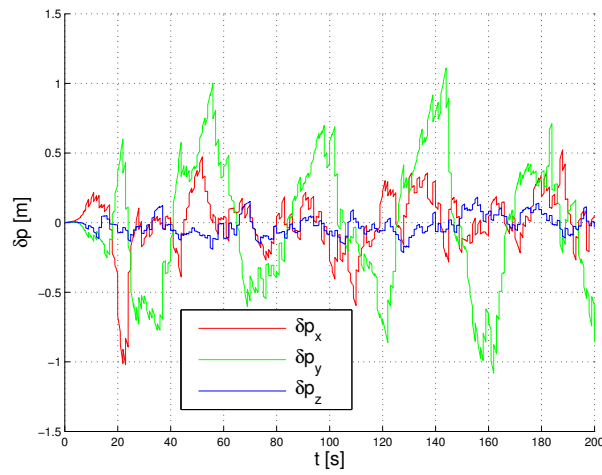
	$\delta \psi$ [°]		$\delta \theta$ [°]		$\delta \phi$ [°]	
	PR	S	PR	S	PR	S
1 a 100 m	0.0230	0.0143	0.0211	0.0132	0.0248	0.0154
1 a 500 m	0.0258	0.0141	0.0214	0.0135	0.0295	0.0147
1 a 1000 m	0.0302	0.0142	0.0232	0.0135	0.0358	0.0149
3 a 100 m	0.0236	0.0130	0.0225	0.0120	0.0247	0.0140



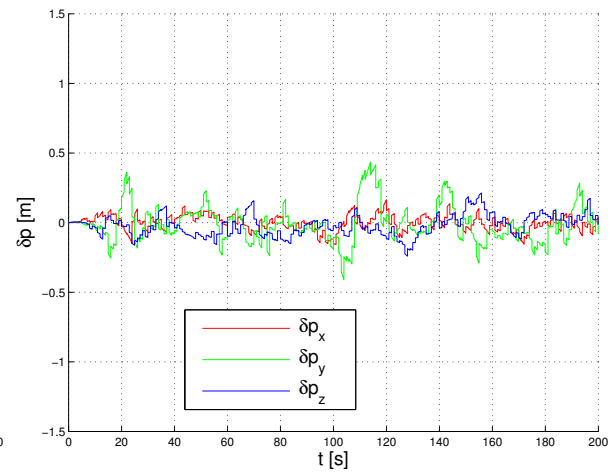
(a) Trajectória real e estimada em 3D



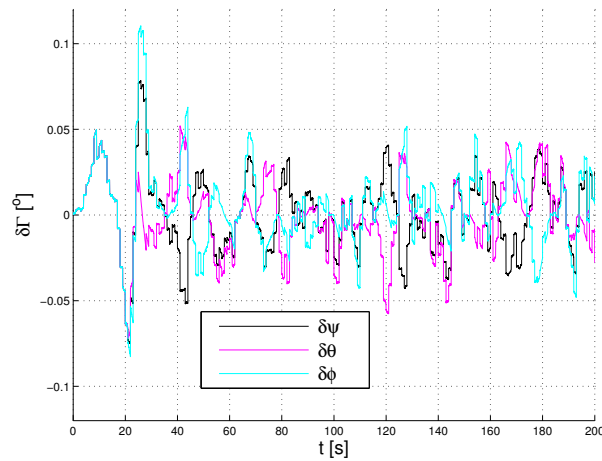
(a) Trajectória real e estimada em 3D



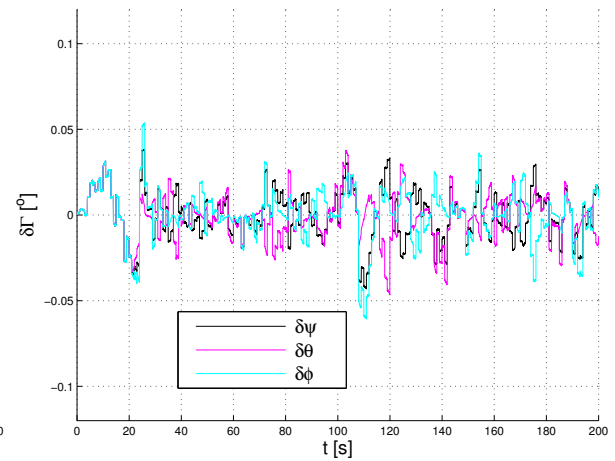
(b) Erro de estimação de posição



(b) Erro de estimação de posição



(c) Erro de estimação de orientação



(c) Erro de estimação de orientação

Figura 5.6 - Resultado da estratégia no espaço das posições relativas com 13 receptores, 1 emissor e magnetómetro

Figura 5.7 - Resultado da estratégia no espaço dos sensores com 13 receptores, 1 emissor e magnetómetro

O desempenho da estratégia no espaço dos sensores é superior ao da estratégia no espaço das posições relativas. O erro quadrático médio de estimação da posição em x e y é substancialmente menor para a estratégia no espaço dos sensores. Na componente em z , o erro quadrático médio de estimação é ligeiramente menor para a estratégia no espaço das posições relativas, devendo-se este facto à posição do emissor em relação ao movimento do veículo. Em termos de orientação, a estratégia no espaço dos sensores revela-se também com melhor desempenho que a estratégia no espaço das posições relativas apresentando o erro quadrático médio de estimação de todas as componentes substancialmente inferior.

Como era de esperar, em ambas as estratégias, com o aumento da distância a que se encontra o emissor o erro quadrático médio de estimação da posição aumenta. A utilização de 3 emissores melhora o desempenho do sistema com a estratégia no espaço dos sensores. Tal facto não se verifica para a estratégia no espaço das posições relativas o que não era de esperar.

O erro de estimação das polarizações dos sensores inerciais é apresentado na Figura 5.8 para os acelerómetros e na Figura 5.9 para os giroscópios. Nas Tabelas 5.6 e 5.7 apresenta-se o erro quadrático médio de estimação das polarizações dos acelerómetros e dos giroscópios respectivamente, no intervalo de tempo dos 50 s aos 100 s em que o erro de estimação se encontra estabilizado.

Tabela 5.6 - Raiz quadrada do erro quadrático médio de estimação das polarizações dos acelerómetros de 50 s a 100 s

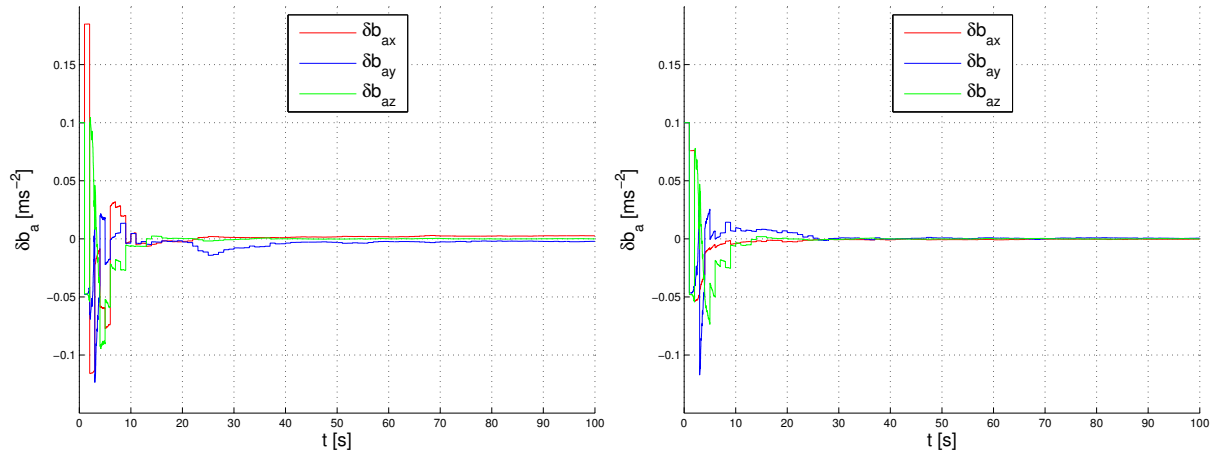
Estratégia	δb_{ax} [m/s ²]	δb_{ay} [m/s ²]	δb_{az} [m/s ²]
Posições Relativas	2.33×10^{-3}	2.54×10^{-3}	1.42×10^{-4}
Sensores	0.47×10^{-3}	0.61×10^{-3}	1.46×10^{-4}

Tabela 5.7 - Raiz quadrada do erro quadrático médio de estimação das polarizações dos giroscópios de 50 s a 100 s

Estratégia	$\delta b_{w\psi}$ [°/s]	$\delta b_{w\theta}$ [°/s]	$\delta b_{w\phi}$ [°/s]
Posições Relativas	1.24×10^{-5}	2.83×10^{-5}	1.02×10^{-5}
Sensores	0.74×10^{-5}	0.71×10^{-5}	0.69×10^{-5}

A estratégia no espaço dos sensores apresenta um erro quadrático médio de estimação das polarizações dos acelerómetros bastante inferior à estratégia no espaço das posições relativas nas componentes em x e y . O mesmo não se verifica para a componente em z tal como não se verifica para o erro quadrático médio de estimação da posição. O erro quadrático médio de estimação das polarizações dos giroscópios é também inferior para a estratégia no espaço dos sensores.

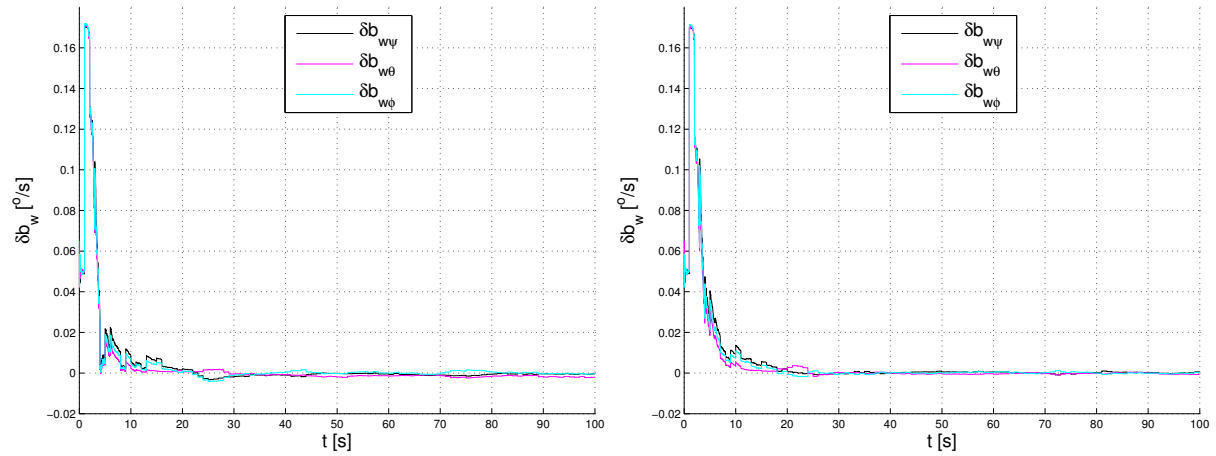
O resultado da simulação dos sistemas de navegação utilizando a geometria de instalação de receptores no veículo da Figura 5.4(b) com 4 receptores é apresentado na Figura 5.10 para a estratégia no espaço das posições relativas e na Figura 5.11 para a estratégia no espaço dos sensores. A raiz quadrada do erro quadrático médio de estimação de posição e orientação correspondente a esta simulação é apresentado na Tabela 5.8. Como se pode verificar, o desempenho da estratégia no espaço dos sensores é superior também utilizando a geometria com 4 receptores.



(a) Estratégia no espaço das posições relativas

(b) Estratégia no espaço dos sensores

Figura 5.8 - Erro de estimação das polarizações dos acelerómetros



(a) Estratégia no espaço das posições relativas

(b) Estratégia no espaço dos sensores

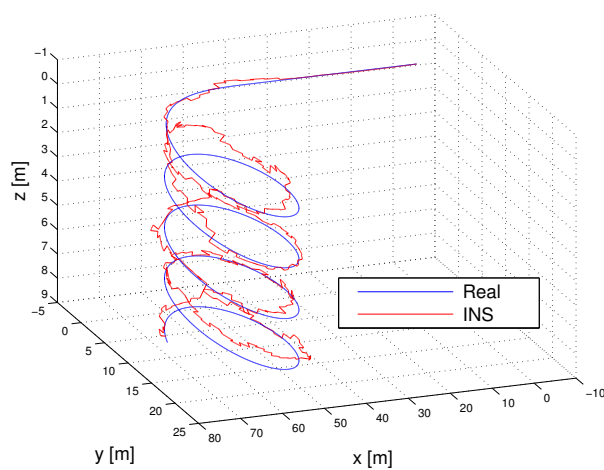
Figura 5.9 - Erro de estimação das polarizações dos giroscópios

Para uma melhor percepção da melhoria de desempenho utilizando a estratégia no espaço dos sensores, apresenta-se na Figura 5.12 a norma do erro de posição para cada uma das estratégias e na Figura 5.13 a norma do erro de orientação, ao longo da trajectória de teste. A norma do erro de posição e de orientação é bastante inferior para a estratégia no espaço dos sensores em relação à estratégia no espaço das posições relativas.

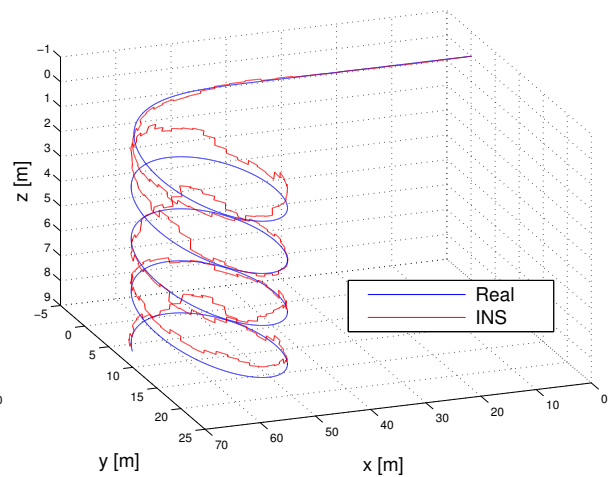
5.8 Comentários finais

Neste Capítulo foi apresentada uma nova estratégia de projecto do sistema de navegação baseada em fornecer directamente a informação dos receptores ao filtro de Kalman.

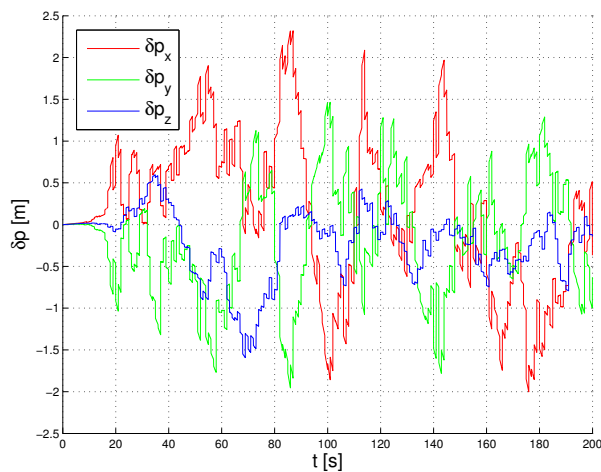
O desempenho desta nova estratégia foi comparado com o de uma estratégia clássica de projecto baseada nas posições relativas dos emissores no referencial $\{B\}$, calculadas com base na informação dos sensores. As duas estratégias foram avaliadas em condições idênticas e os ruídos das observações das posições relativas rigorosamente caracterizados com base nos ruídos dos receptores acústicos.



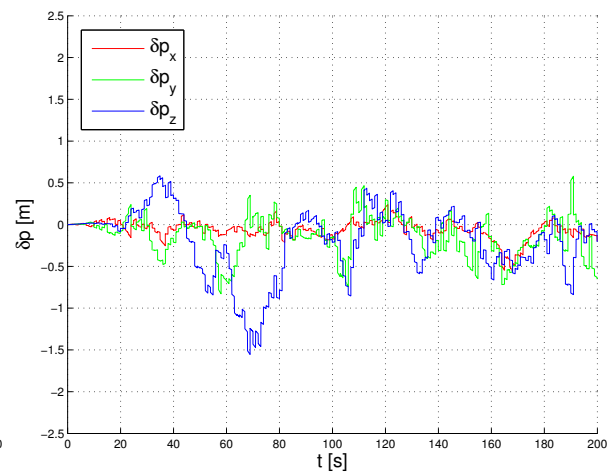
(a) Trajectória real e estimada em 3D



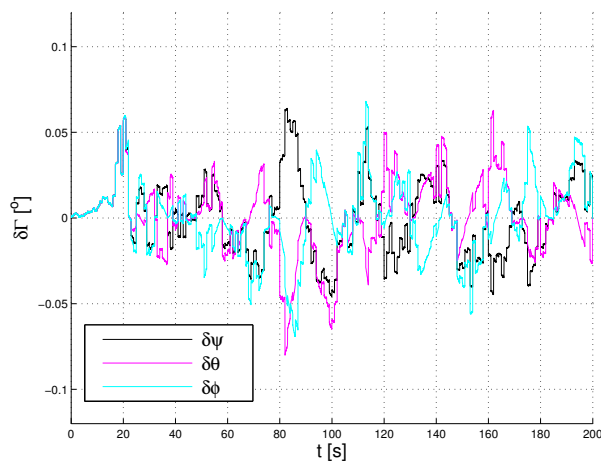
(a) Trajectória real e estimada em 3D



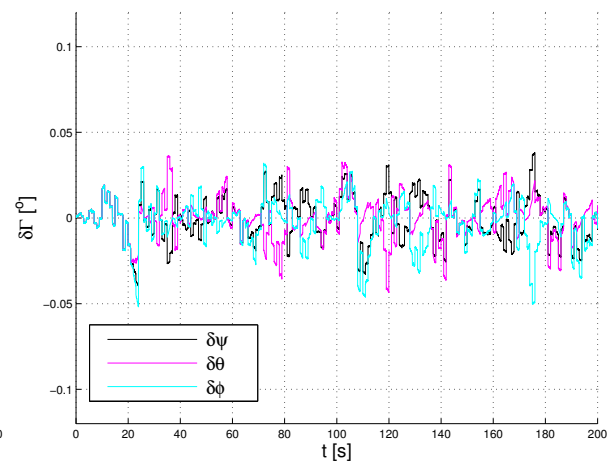
(b) Erro de estimação de posição



(b) Erro de estimação de posição



(c) Erro de estimação de orientação



(c) Erro de estimação de orientação

Figura 5.10 - Resultado da estratégia no espaço das posições relativas com 4 receptores, 1 emissor a 100 m e magnetómetro

Figura 5.11 - Resultado da estratégia no espaço dos sensores com 4 receptores, 1 emissor a 100 m e magnetómetro

Tabela 5.8 - Raiz quadrada do erro quadrático médio de estimação de posição e orientação com 4 receptores, 1 emissor a 100 m e magnetómetro

Estratégia	δp_x [m]	δp_y [m]	δp_z [m]	$\delta \psi$ [°]	$\delta \theta$ [°]	$\delta \phi$ [°]
Posições Relativas	0.91	0.72	0.47	0.0219	0.0220	0.0219
Sensores	0.13	0.28	0.46	0.0129	0.0122	0.0136

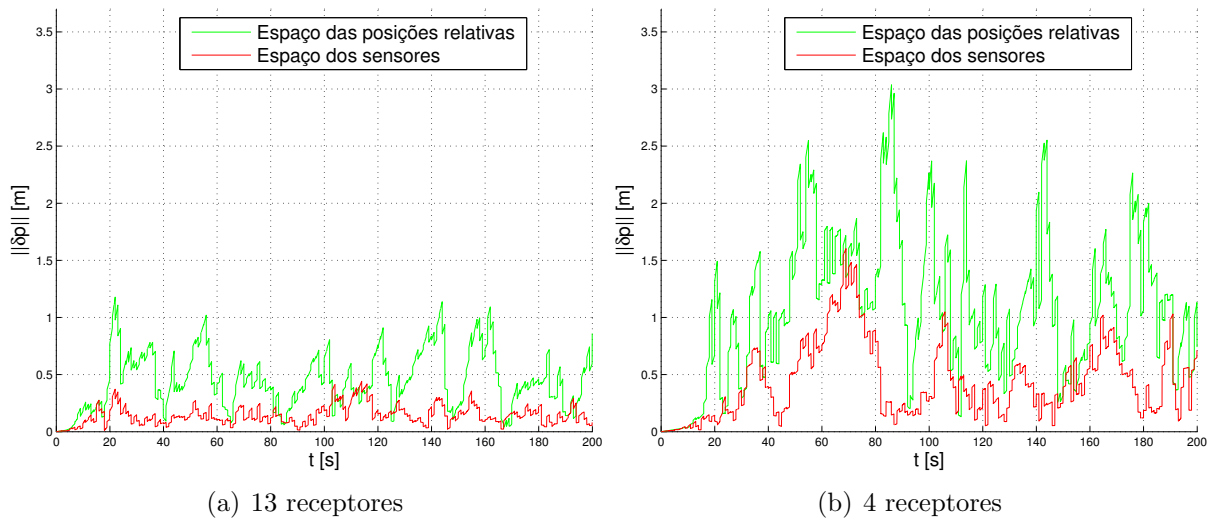


Figura 5.12 - Norma do erro de posição

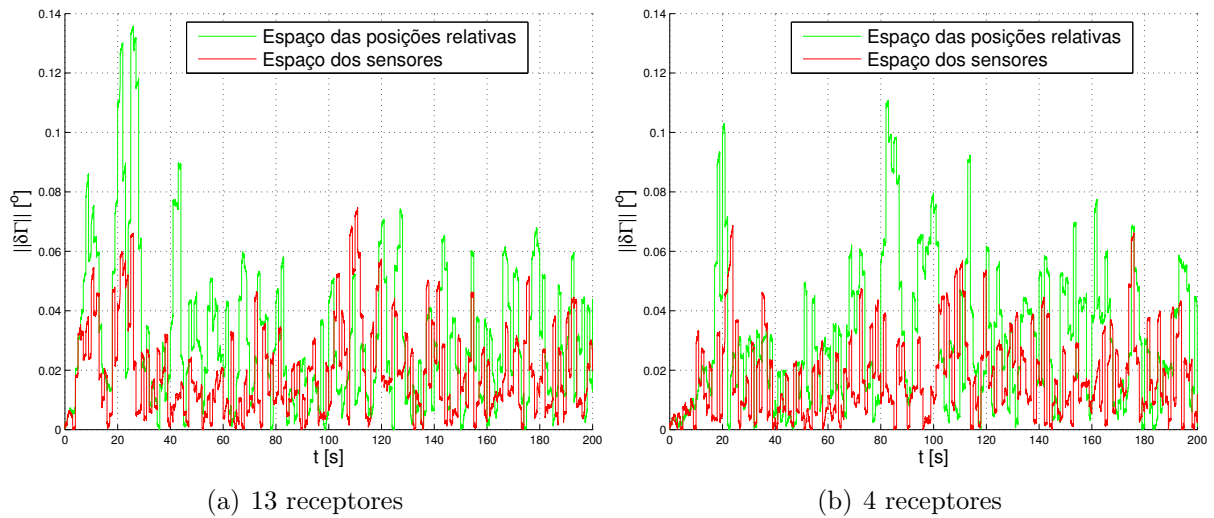


Figura 5.13 - Norma do erro de orientação

Analisando os resultados dos sistemas de navegação implementados com ambas as estratégias observou-se que a estratégia de projecto no espaço dos sensores apresenta um desempenho superior tanto em posição como em orientação. O erro quadrático médio de estimação das polarizações dos sensores inerciais é também inferior utilizando a estratégia no espaço dos sensores.

O projecto na estratégia das posições relativas revelou-se bastante mais complexo que a nova estratégia proposta pois necessita do cálculo da direcção e da distância dos emissores

no referencial $\{B\}$, reflectindo-se numa maior complexidade computacional.

Uma situação crítica a analisar em ambas as estratégias é a de falhas na recepção dos sinais acústicos. Na estratégia das posições relativas, quando um receptor falha é necessário modificar as matrizes de cálculo das direcções e distâncias dos emissores, podendo-se atingir uma situação limite em que não seja possível calcular a posição relativa dos emissores no referencial $\{B\}$. A estratégia no espaço dos sensores está concebida de modo a poder incorporar e retirar facilmente medidas de receptores acústicos, bastando a existência de um receptor para já ser possível ajudar a corrigir os erros do INS.

Capítulo 6

Conclusões

No presente trabalho apresenta-se o desenvolvimento de um sistema de navegação inercial com o auxílio de sistemas de posicionamento acústico baseados nas topologias USBL/LUSBL. O sistema de navegação é concebido segundo uma topologia de realimentação directa recorrendo a um filtro de Kalman estendido para estimar os erros do INS.

Foi apresentada uma estratégia, tanto quanto se sabe inovadora, de projecto do sistema de navegação baseado na informação directa dos receptores acústicos instalados a bordo do veículo. O desempenho deste sistema foi comparado, em condições idênticas, com o de um sistema implementado com uma estratégia clássica, baseada nas posições relativas dos emissores no referencial do veículo, tendo-se verificado que esta nova estratégia apresenta um desempenho superior ao da estratégia clássica. Na estratégia clássica, as posições relativas dos emissores no referencial $\{B\}$ são calculadas com base nos tempos de chegada dos sinais acústicos aos receptores instalados a bordo do veículo e os ruídos de observação das posições relativas são rigorosamente caracterizados com base nos ruídos de observação dos tempos de chegada tornando a comparação o mais correcta possível.

A estratégia no espaço dos sensores, por fornecer directamente a informação dos receptores acústicos ao filtro de Kalman, precisa de efectuar muito menos cálculos sobre as medições (apenas precisa de multiplicar pela velocidade de propagação do som na água) ao contrário da estratégia no espaço das posições relativas, cujos cálculos excedentários reflectem-se claramente numa maior complexidade computacional. Esta estratégia inovadora permite ainda uma melhor caracterização dos ruídos dos sensores acústicos embutindo directamente esta informação no filtro de Kalman.

Ambas as estratégias foram ainda testadas utilizando uma geometria de instalação dos receptores no veículo semelhante à de um sistema já existente denominado GAPS, desenvolvido pela iXSea [12]. A estratégia no espaço dos sensores revelou-se uma vez mais com melhor desempenho como era de esperar.

No Capítulo 2 estudaram-se estratégias de processamento de sinal em ambientes subaquáticos utilizando técnicas de espalhamento espectral. Verificou-se que a utilização de sinais SS é vantajosa relativamente aos tradicionalmente utilizados pulsos sinusoidais. Os sinais SS permitem a utilização de potências de transmissão mais baixas do que os pulsos sinusoidais por espalharem a sua energia por uma banda muito maior de frequências em vez de a concentrar numa única banda estreita. Têm ainda a vantagem de tornar a detecção de chegada de sinais função da amplitude relativa dos picos da saída de um filtro adaptado em vez de absoluta como no caso dos pulsos sinusoidais. O facto de utilizarem potências mais baixas permite assim aumentar a autonomia das baterias. Permitem ainda

um melhor desempenho em situações de utilização simultânea do canal e na rejeição de trajectos múltiplos dos sinais propagados.

6.1 Trabalho futuro

Tendo em conta os resultados obtidos, o trabalho futuro incidirá claramente sobre a estratégia no espaço da informação directa dos sensores. Um aspecto importante a ter em conta será a caracterização do ruído de modo comum dos receptores acústicos tendo em conta o perfil de velocidade de aproximação/afastamento do veículo em relação aos emissores, distância dos emissores ao veículo, frequência de operação dos sistemas de recepção, efeito de Doppler e outros factores.

Uma análise interessante a efectuar será o cálculo dos limites de desempenho do sistema tendo em conta os limites inferiores de Cramer-Rao (CRLB - Cramer-Rao *Lower Bound*) [13].

Com o objectivo de aumentar a robustez e desempenho do sistema poderão ser incluídas restrições associadas à dinâmica do veículo [4] e leituras do vector de gravidade [6] que explora a informação de baixa-frequência do vector de gravidade embebida nas leituras dos acelerómetros.

Poderá também incluir-se medições de um profundímetro [14] para a obtenção de medições mais precisas da profundidade do veículo.

Será importante também no futuro incluir no sistema sensores de medição da velocidade de propagação do som na água [15] uma vez que esta depende de factores como a temperatura e salinidade. A medição de distâncias depende fortemente do conhecimento preciso desta variável.

Técnicas semelhantes às utilizadas neste trabalho poderão ser aplicadas a sistemas de navegação inercial auxiliados por GPS fornecendo ao filtro de Kalman a informação directa de cada satélite tendo em conta as suas trajectórias na órbita terrestre. Estas técnicas de fusão sensorial permitirão uma melhor caracterização dos ruídos que afectam as medições de GPS e uma melhoria de desempenho.

Apêndice A

Relação da saída do filtro adaptado com a autocorrelação

Um aspecto interessante do filtro adaptado é poder estabelecer-se uma relação directa com a autocorrelação de um sinal. A autocorrelação $v(n)$ de $h(n)$ é dada por

$$v(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)h^*(-(n-k)) = h(n) * h^*(-n). \quad (\text{A.1})$$

Da Figura 2.1 tem-se que $y(n)$ é dado por

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) = h(n) * x(n). \quad (\text{A.2})$$

Tem-se ainda da Figura 2.1 que

$$x(n) = g(n) + w(n). \quad (\text{A.3})$$

Discretizando 2.2, tem-se

$$h_{opt}(n) = kg \left(\frac{T}{T_S} - n \right), \quad (\text{A.4})$$

onde T_S é o tempo de amostragem (múltiplo de T).

Substituindo A.4 em A.1 e A.2 e tendo ainda em conta que os sinais em questão são todos reais tem-se

$$\begin{cases} y(n) = kg \left(\frac{T}{T_S} - n \right) * x(n) \\ v(n) = k^2 g \left(\frac{T}{T_S} - n \right) * g \left(n - \frac{T}{T_S} \right) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Substituindo A.3 em A.5 pode-se escrever

$$\begin{cases} y(n) = kg \left(\frac{T}{T_S} - n \right) * (g(n) + w(n)) = kg \left(\frac{T}{T_S} - n \right) * g(n) + kg \left(\frac{T}{T_S} - n \right) * w(n) \\ v(n) = k^2 g \left(\frac{T}{T_S} - n \right) * g \left(n - \frac{T}{T_S} \right) \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Aplicando a transformada de *Fourier* a ambos os lados de A.6 e tendo em conta as suas propriedades [16] tem-se

$$\begin{cases} Y(e^{jw}) = kG(e^{jw})G^*(e^{jw})e^{jw\frac{T}{T_s}} + kG^*(e^{jw})e^{jw\frac{T}{T_s}}W(e^{jw}) \\ V(e^{jw}) = k^2G(e^{jw})e^{-jw\frac{T}{T_s}}G^*(e^{jw})e^{jw\frac{T}{T_s}} = k^2G(e^{jw})G^*(e^{jw}) \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Considere-se então um sinal $q(n) = g(n)g(-n)$. Tem-se então $Q(e^{jw}) = G(e^{jw})G^*(e^{jw})$ pelo que

$$\begin{cases} y(n) = kq\left(n + \frac{T}{T_s}\right) + kg\left(\frac{T}{T_s} - n\right) * w(n) \\ v(n) = k^2q(n) \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

De A.8 pode-se então extrair a relação

$$y(n) = \frac{1}{k}v\left(n + \frac{T}{T_s}\right) + kg\left(\frac{T}{T_s} - n\right) * w(n), \quad (\text{A.9})$$

donde se pode concluir que

- Para $w(n) = 0$: a resposta do filtro adaptado é igual à autocorrelação do sinal de entrada deslocada no tempo e escalada de $\frac{1}{k}$;
- Para $w(n) \neq 0$: surge um termo aditivo relativo ao erro introduzido pelo ruído e que é dado por

$$\xi(n) = kg\left(\frac{T}{T_s} - n\right) * w(n). \quad (\text{A.10})$$

Apêndice B

Geração de sinais SS

A utilização de sinais SS (*Spread-Spectrum*) é uma técnica de transmissão onde uma sequência de pseudo-ruído (PN, de *Pseudo-Noise*) é utilizada para "espalhar" a energia de um sinal numa banda muito maior que a banda original. Em geral, na recepção utiliza-se uma réplica da sequência PN usada na transmissão para desmodulação do sinal recebido.

B.1 DSSS vs FHSS

Existem essencialmente dois tipos de sinais SS:

- **DSSS - *Direct Sequence Spread-Spectrum***: O sinal a transmitir é directamente multiplicado pela sequência PN para se obter o sinal SS;
- **FHSS - *Frequency Hopping Spread-Spectrum***: A sequência PN é utilizada para efectuar saltos entre frequências que servem para modular o sinal original em frequência em instantes de tempo diferentes.

Na Figura B.1 apresenta-se o espectro de frequência para os dois tipos de sinais SS onde T_C é o tempo de duração de cada amostra da sequência PN, f_S é a frequência central do sinal, N é o número de frequências de salto, Δf_{CH} é a largura de banda do sinal modulado em cada posição do espectro e B_{SS} é a largura de banda do sinal SS. Pode observar-se por esta e pela definição de cada um dos tipos de sinais SS que a largura de banda ocupada instantaneamente pelos FHSS é muito estreita em relação à ocupada instantaneamente pelos DSSS. No entanto, em média tanto a largura de banda ocupada pelos DSSS como a ocupada pelos FHSS é muito superior à ocupada pelo sinal original.

Instantaneamente os sinais FHSS não apresentam qualquer das características de correlação desejadas das sequências PN: são apenas réplicas do sinal moduladas em diferentes frequências definidas pela sequência PN. Por outro lado, os sinais DSSS por serem directamente gerados por uma multiplicação do sinal original por uma sequência PN apresentam as boas propriedades de correlação inerente às sequências PN [17].

Pode ainda verificar-se que uma vez que os sinais FHSS não têm o mesmo espalhamento instantâneo que os sinais DSSS, necessitam de maior potência de transmissão para obter a mesma relação sinal-ruído [18].

Tendo em conta todos os aspectos referidos anteriormente a escolha ideal recai sobre os sinais DSSS.

É possível ainda estabelecer uma relação entre a largura de banda do sinal original com a largura de banda do sinal SS. A esta relação chama-se factor de espalhamento (SF,

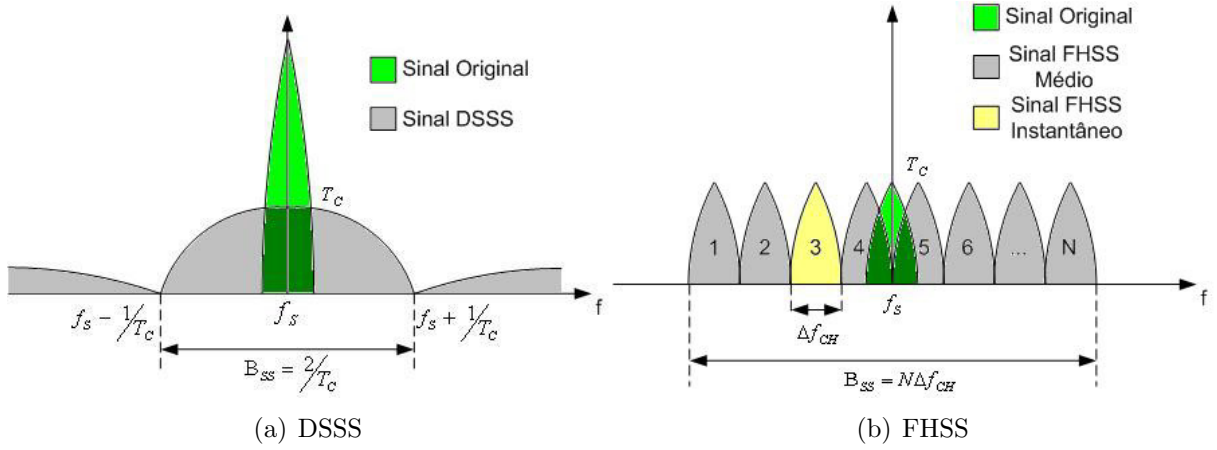


Figura B.1 - Diferenças no espectro de frequência dos diferentes tipos de sinais SS

de *Spread Factor*) e é dado por

$$SF = \frac{B_{SS}}{B_{orig}} = \frac{T_S}{T_C}, \quad (B.1)$$

onde B_{orig} é a largura de banda do sinal original e T_S é a duração de um *bit* de dados do sinal original. Na prática é escolhido um número inteiro.

B.2 Arquitectura proposta para geração e detecção de sinais SS

A desmodulação do sinal para obtenção da informação transmitida não faz parte do âmbito deste trabalho. Os sinais modulados são apenas pulsos sinusoidais e o objectivo é apenas detectar a chegada do sinal utilizando um filtro adaptado. Desta forma a arquitectura do sistema proposto para geração e detecção de sinais SS (baseada na topologia de sinais DSSS) é a que se apresenta na Figura B.2.

O sinal transmitido é gerado *off-line* por uma multiplicação de um sinal sinusoidal e uma sequência gerada por um gerador de PN. Este sinal é fornecido ao emissor para que este o possa enviar quando assim o entender e ao receptor para que este o possa detectar caso o receba. O filtro adaptado e o algoritmo de detecção são apresentados no Capítulo 2.

B.3 Sequências/Códigos PN

Uma sequência ou código PN é uma sequência que se comporta como ruído branco gaussiano sendo no entanto determinística. As sequências PN ocupam, idealmente, todo o espectro de frequências tal como o ruído branco gaussiano. A autocorrelação de sequências PN tem então propriedades semelhantes à autocorrelação de ruído branco gaussiano: tendem a aproximar um impulso de *Dirac*. A correlação cruzada entre duas sequências PN diferentes é geralmente muito baixa.

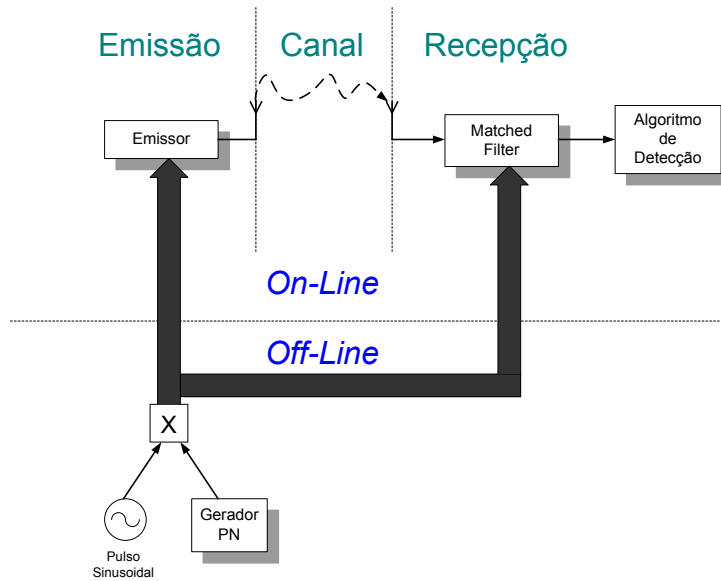


Figura B.2 - Sistema de geração e detecção de sinais SS

B.3.1 Tipos de sequências PN

Para maior detalhe em cada tipo de sequência PN aconselha-se a consulta de [17, 18]. Apresenta-se então de seguida os tipos de códigos relevantes para este trabalho.

Códigos de comprimento máximo

São gerados por um SSRG (*Simple Shift Register Generator*) que se apresenta na Figura B.3. Um SSRG é linear se a função de retroacção f puder ser escrita como uma soma em complemento para 2.

Um SSRG com L *flip-flops* produz sequências que dependem de L , dos coeficientes c_i com $i = \{1, 2, \dots, n\}$ e das condições iniciais. Quando o período N_{PN} da sequência é exactamente $N_{PN} = 2^L - 1$ a sequência diz-se de comprimento máximo.

De seguida verifica-se as suas principais propriedades:

- **Autocorrelação:** A função de autocorrelação $R_a(\tau)$ tem o valor -1 para todos os valores de τ excepto no intervalo $[-1; 0]$ em que varia linearmente de -1 a N_{PN} e no intervalo $[0; +1]$ em que varia linearmente de N_{PN} a -1 .
- **Correlação Cruzada:** Infelizmente não é tão bem comportada como a autocorrelação. Em situações de utilização simultânea do canal, os códigos devem ser cuidadosamente escolhidos pois podem causar interferências entre utilizadores.

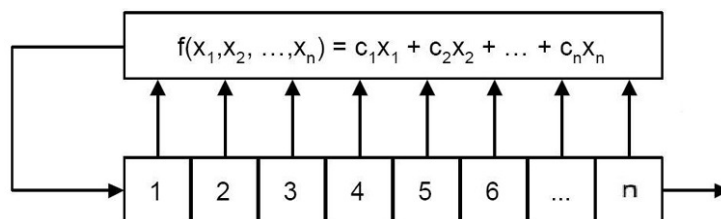


Figura B.3 - SSRG - Simple Shift Register Generator

Códigos *Gold*

São gerados pela soma em complemento para 2 de dois códigos de comprimento máximo com o mesmo comprimento. Os códigos gerados têm o mesmo comprimento que os códigos base utilizados mas no entanto não são de comprimento máximo.

Uma modificação na fase entre os dois sinais de comprimento máximo utilizados causa a geração de um novo código *gold*. Por esta razão, um gerador de códigos *gold* pode gerar um total de $2^L + 1$ sequências PN distintas.

É possível escolher pares de sequências base de comprimento máximo de forma a tornar a autocorrelação e a correlação cruzada controlada e limitada. Estes pares são chamados "pares preferidos".

De seguida verifica-se as suas principais propriedades:

- **Autocorrelação:** A função de autocorrelação $R_a(\tau)$ continua a ter o valor máximo N_{PN} para $\tau = 0$ no entanto no resto dos valores de τ apresenta valores não constantes mas que se encontram limitados e são bastante inferiores ao valor máximo. Estes valores limite são conhecidos para os "pares preferidos".
- **Correlação Cruzada:** Para os "pares preferidos" são conhecidos os valores limite de correlação cruzada.

Os códigos *gold* são então escolhidos para serem utilizados neste trabalho pois são os que apresentam um melhor conjunto de propriedades de autocorrelação e correlação cruzada e permitem ainda uma boa utilização em ambientes de utilização simultânea do canal.

Apêndice C

Modelação da dinâmica dos transdutores

Os transdutores são modelados por filtros passa-banda com frequência central de 50 KHz, largura de banda de 40 KHz e ganho unitário na banda passante. Na Figura C.1 apresenta-se então a resposta em amplitude e na Figura C.2 a resposta em fase dos filtros que modelam os transdutores eléctrico-acústico. Este modelo foi construído em tempo discreto para uma frequência de amostragem de 200 KHz, utilizando o método *equiripple* e a ferramenta *fdatool* do *MATLAB*. A ordem do filtro é 64.

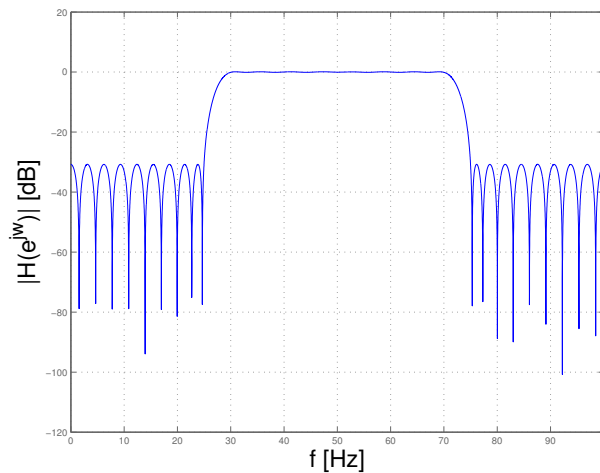


Figura C.1 - Resposta em amplitude dos filtros que modelam os transdutores

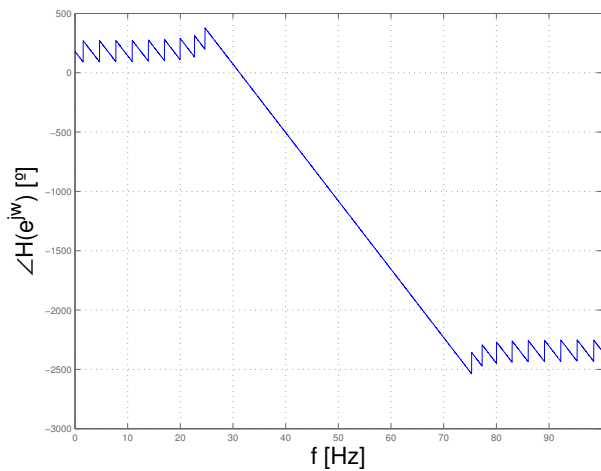


Figura C.2 - Resposta em fase dos filtros que modelam os transdutores

Apêndice D

Perturbação da matriz de rotação

A relação entre a matriz de rotação estimada ${}^E_B\widehat{\mathcal{R}}$ e a real ${}^E_B\overline{\mathcal{R}}$ pode ser descrita através de uma matriz de rotação de erro $\mathcal{R}_e$ e é dada por [5]

$${}^E_B\widehat{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_e {}^E_B\overline{\mathcal{R}}. \quad (\text{D.1})$$

Para pequenos ângulos de rotação prova-se que [5]

$$\mathcal{R}_e \approx [\mathbf{I}_{3 \times 3} + [\delta\boldsymbol{\lambda} \times]], \quad (\text{D.2})$$

onde $\delta\boldsymbol{\lambda}$ representa o vector de rotação do erro de orientação.

De D.1 e D.2 obtém-se

$${}^E_B\widehat{\mathcal{R}} \approx [\mathbf{I}_{3 \times 3} + [\delta\boldsymbol{\lambda} \times]] {}^E_B\overline{\mathcal{R}}. \quad (\text{D.3})$$

Pode-se ainda escrever de D.3, tendo em conta as propriedades do produto externo e das matrizes *skew-symmetric* (Apêndice E), as relações

$${}^E_B\widehat{\mathcal{R}}^T \approx {}^E_B\overline{\mathcal{R}}^T [\mathbf{I}_{3 \times 3} - [\delta\boldsymbol{\lambda} \times]], \quad (\text{D.4})$$

$${}^E_B\overline{\mathcal{R}} \approx [\mathbf{I}_{3 \times 3} - [\delta\boldsymbol{\lambda} \times]] {}^E_B\widehat{\mathcal{R}}, \quad (\text{D.5})$$

$${}^E_B\overline{\mathcal{R}}^T \approx {}^E_B\widehat{\mathcal{R}}^T [\mathbf{I}_{3 \times 3} + [\delta\boldsymbol{\lambda} \times]]. \quad (\text{D.6})$$

Apêndice E

Propriedades do produto externo e das matrizes *skew-symmetric*

O operador produto externo verifica as propriedades

$$\begin{cases} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \end{cases} . \quad (\text{E.1})$$

O operador produto externo pode ser escrito sob a forma de matricial

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a} \times] \mathbf{b}, \quad (\text{E.2})$$

onde $[\mathbf{a} \times]$ é a matriz *skew-symmetric* dada por

$$[\mathbf{a} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.3})$$

De E.3 pode-se facilmente verificar que as matrizes *skew-symmetric* verificam a propriedade

$$[\mathbf{a} \times]^T = -[\mathbf{a} \times]. \quad (\text{E.4})$$

A rotação do resultado de um produto externo $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é igual ao produto externo da rotação prévia de cada um dos vectores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$

$${}_D^C \mathcal{R} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = ({}_D^C \mathcal{R} \mathbf{a}) \times ({}_D^C \mathcal{R} \mathbf{b}). \quad (\text{E.5})$$

Apêndice F

Derivada da norma de um vector

Considere-se um vector genérico $\mathbf{d}$ dado por

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_n \end{bmatrix}^T. \quad (\text{F.1})$$

A norma de F.1 pode ser descrita como

$$\|\mathbf{d}\| = \sqrt{\mathbf{d}^T \mathbf{d}} = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2}. \quad (\text{F.2})$$

Derivando F.2 em ordem a uma variável genérica x obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{\mathbf{d}^T \mathbf{d}} \right) &= \frac{\frac{\partial}{\partial x} (d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2)}{2\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2}}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{\mathbf{d}^T \mathbf{d}} \right) &= \frac{2d_1 \frac{\partial d_1}{\partial x} + 2d_2 \frac{\partial d_2}{\partial x} + \dots + 2d_n \frac{\partial d_n}{\partial x}}{2\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2}}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{\mathbf{d}^T \mathbf{d}} \right) &= \frac{\mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial x}}{\sqrt{\mathbf{d}^T \mathbf{d}}}. \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Tem-se então que a derivada da norma de um vector é dada por

$$\frac{\partial \|\mathbf{d}\|}{\partial x} = \frac{\mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial x}}{\|\mathbf{d}\|}. \quad (\text{F.4})$$

Apêndice G

Filtros de Kalman discretos

G.1 Filtro de Kalman discreto

O Filtro de Kalman discreto tem como objectivo minimizar o erro quadrático médio de estimação das variáveis que se pretende estimar [19, 10]. Para tal são calculados os ganhos que minimizam a covariância do erro de estimação e realimenta-se a diferença entre as variáveis estimadas e as observações efectuadas. Considere-se então um sistema em tempo discreto descrito por

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\phi}_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\omega}_k \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\nu}_k \end{cases}, \quad (\text{G.1})$$

sendo

- $\mathbf{x}_k$ o vector $(n \times 1)$ de variáveis de estado no instante t_k ;
- $\mathbf{z}_k$ o vector $(m \times 1)$ de observações no instante t_k ;
- $\boldsymbol{\omega}_k$ o vector $(n \times 1)$ de ruído branco gaussiano que afecta estado do sistema no instante t_k com estrutura de covariância conhecida;
- $\boldsymbol{\nu}_k$ o vector $(m \times 1)$ de ruído branco gaussiano que afecta as observações no instante t_k com estrutura de covariância conhecida;
- $\boldsymbol{\phi}_k$ a matriz de transição $(n \times n)$ do estado do sistema no instante t_k para o instante t_{k+1} ;
- $\mathbf{H}_k$ a matriz de ligação $(m \times n)$ que relaciona as observações e o vector de estado no instante t_k .

Os ruídos de estado e de observação apresentam matrizes de covariância na forma

$$E[\boldsymbol{\omega}_k \boldsymbol{\omega}_i^T] = \begin{cases} \mathbf{Q}_k, & i = k, \mathbf{Q}_k \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ [0_{n \times n}], & i \neq k \end{cases}, \quad (\text{G.2})$$

$$E[\boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_i^T] = \begin{cases} \mathbf{R}_k, & i = k, \mathbf{R}_k \in \mathbb{R}^{m \times m} \\ [0_{m \times m}], & i \neq k \end{cases}, \quad (\text{G.3})$$

$$E[\boldsymbol{\omega}_k \boldsymbol{\nu}_i^T] = [0_{n \times m}], \forall k, i. \quad (\text{G.4})$$

Quando existe um novo vector de observações disponível, a estimativa do estado é actualizada de acordo com

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-), \quad (\text{G.5})$$

onde $\mathbf{K}_k$ é a matriz de ganhos a calcular, $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ é a estimativa *a priori* do estado do sistema obtida por projecção em malha aberta da estimativa anterior

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \phi_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}. \quad (\text{G.6})$$

As matrizes de covariância do erro de estimação *a priori* $\mathbf{P}_k^-$ e do erro de estimação $\mathbf{P}_k$ são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{P}_k^- = E[\mathbf{e}_k^- \mathbf{e}_k^{-T}] = E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T], \quad (\text{G.7})$$

$$\mathbf{P}_k = E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] = E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T]. \quad (\text{G.8})$$

Substituindo G.5 em G.8 obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T], \\ \mathbf{P}_k &= E\left[\left([\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k](\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{K}_k \boldsymbol{\nu}_k\right)\left([\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k](\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{K}_k \boldsymbol{\nu}_k\right)^T\right], \\ \mathbf{P}_k &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_k^- [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k]^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T + \\ &\quad - \mathbf{K}_k E[\boldsymbol{\nu}_k \mathbf{e}_k^{-T}] [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k]^T - [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] E[\mathbf{e}_k^- \boldsymbol{\nu}_k^T] \mathbf{K}_k^T. \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

Tendo em conta que o ruído de observação é incorrelacionado com o ruído de estado tem-se

$$E[\boldsymbol{\nu}_k \mathbf{e}_k^{-T}] = E[\mathbf{e}_k^- \boldsymbol{\nu}_k^T] = 0 \quad (\text{G.10})$$

o que resulta, reescrevendo G.9, na expressão final para a matriz de covariância do erro de estimação

$$\mathbf{P}_k = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_k^- [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k]^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T. \quad (\text{G.11})$$

Os ganhos óptimos são tais que minimizam as variâncias dos erros de estimação, i.e. o somatório dos elementos da diagonal (traço) de $\mathbf{P}_k$. Tendo em conta as propriedades do traço de uma matriz, as regras de derivação matricial e expandindo G.11 tem-se

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k) \mathbf{K}_k^T, \quad (\text{G.12})$$

$$\frac{\partial \text{tr}(\mathbf{P}_k)}{\partial \mathbf{K}_k} = -2 (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^-)^T + 2 \mathbf{K}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k) = 0, \quad (\text{G.13})$$

o que resulta na expressão final para os ganhos óptimos que minimizam o erro quadrático médio de estimação

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}. \quad (\text{G.14})$$

Para completar as equações do filtro de Kalman discreto é necessário determinar ainda a expressão de propagação da covariância do erro de estimação. Recorrendo a G.1 e a G.6 tem-se

$$\mathbf{e}_{k+1}^- = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = (\phi_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\omega}_k) - \phi_k \hat{\mathbf{x}}_k = \phi_k (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + \boldsymbol{\omega}_k,$$

obtendo-se então

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{k+1}^- &= E \left[\mathbf{e}_{k+1}^- \mathbf{e}_{k+1}^{-T} \right], \\ \mathbf{P}_{k+1}^- &= E \left[(\phi_k (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + \boldsymbol{\omega}_k) (\phi_k (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + \boldsymbol{\omega}_k)^T \right], \\ \mathbf{P}_{k+1}^- &= \phi_k \mathbf{P}_k \phi_k^T + \mathbf{Q}_k.\end{aligned}\tag{G.15}$$

As equações G.5, G.6, G.11, G.14 e G.15 permitem a implementação de um filtro de Kalman discreto, recursivo e não estacionário que minimiza em todos os instantes de amostragem o erro quadrático médio de estimação.

G.2 Filtro de Kalman discreto com matriz de ligação

Em diversas situações pretende-se implementar filtros de Kalman discretos enriquecendo a informação de ruído de observação do sistema. Para tal considere-se a seguinte modificação de G.1

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \phi_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\omega}_k \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \boldsymbol{\nu}_k \end{cases},\tag{G.16}$$

onde $\mathbf{B}_k$ é a matriz de ligação do vector de ruídos das observações ao vector de observações.

As equações do filtro podem então ser deduzidas de forma análoga ao que foi feito na Secção G.1. A covariância do erro de estimação vem então dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_k &= E \left[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \right], \\ \mathbf{P}_k &= E \left[([\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{K}_k \mathbf{B}_k \boldsymbol{\nu}_k) ([\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{K}_k \mathbf{B}_k \boldsymbol{\nu}_k)^T \right], \\ \mathbf{P}_k &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_k^- [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k]^T + \mathbf{K}_k \mathbf{B}_k \mathbf{R}_k \mathbf{B}_k^T \mathbf{K}_k^T + \\ &\quad - \mathbf{K}_k \mathbf{B}_k E [\boldsymbol{\nu}_k \mathbf{e}_k^{-T}] [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k]^T - [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] E [\mathbf{e}_k^- \boldsymbol{\nu}_k^T] \mathbf{B}_k^T \mathbf{K}_k^T.\end{aligned}\tag{G.17}$$

Novamente, tendo em conta G.10, pode-se escrever

$$\mathbf{P}_k = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_k^- [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k]^T + \mathbf{K}_k \mathbf{B}_k \mathbf{R}_k \mathbf{B}_k^T \mathbf{K}_k^T\tag{G.18}$$

cujas expansões dá origem a

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{B}_k \mathbf{R}_k \mathbf{B}_k^T) \mathbf{K}_k^T.\tag{G.19}$$

Derivando o traço de G.19 em ordem a $\mathbf{K}_k$ obtém-se então a expressão para os ganhos óptimos que minimizam em cada instante o erro quadrático médio de estimação

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{B}_k \mathbf{R}_k \mathbf{B}_k^T)^{-1}.\tag{G.20}$$

A equação de propagação da matriz de covariância do erro de estimação é dada por G.15.

G.3 Filtro de Kalman estendido

Quando a dinâmica do sistema é não linear e/ou existe uma relação não linear entre as observações e o vector de estados torna-se necessário proceder a uma linearização do modelo a fim de ser possível recorrer à metodologia apresentada. Considere-se então o seguinte modelo não linear de um sistema discreto

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_k, k) + \boldsymbol{\omega}_k \\ \mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k, k) + \boldsymbol{\nu}_k \end{cases}, \quad (\text{G.21})$$

sendo

- $\mathbf{x}_k$ o vector ($n \times 1$) de variáveis de estado no instante t_k ;
- $\mathbf{z}_k$ o vector ($m \times 1$) de observações no instante t_k ;
- $\boldsymbol{\omega}_k$ o vector ($n \times 1$) de ruído branco gaussiano que afecta estado do sistema no instante t_k com estrutura de covariância conhecida;
- $\boldsymbol{\nu}_k$ o vector ($m \times 1$) de ruído branco gaussiano que afecta as observações no instante t_k com estrutura de covariância conhecida;
- $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_k, k)$ a matriz de transição ($n \times n$) não linear do estado do sistema no instante t_k para o instante t_{k+1} ;
- $h(\mathbf{x}_k, k)$ a matriz de ligação ($m \times n$) não linear que relaciona as observações e o vector de estado no instante t_k .

Os ruídos de estado e de observação apresentam matrizes de covariância definidas em G.2, G.3 e G.4.

Admita-se então que o filtro opera ao longo de uma trajectória de estado aproximada, verificando a relação não linear

$$\mathbf{x}_{k+1}^* = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_k^*, k). \quad (\text{G.22})$$

Tem-se ainda que o erro entre a trajectória real e a aproximada sobre o qual o filtro opera é dado por

$$\Delta \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^*. \quad (\text{G.23})$$

Tendo em conta G.23 pode-se reescrever G.21 como

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^* + \Delta \mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_k^* + \Delta \mathbf{x}_k, k) + \boldsymbol{\omega}_k \\ \mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k^* + \Delta \mathbf{x}_k, k) + \boldsymbol{\nu}_k \end{cases}. \quad (\text{G.24})$$

Para erros de trajectória $\Delta \mathbf{x}_k$ muito pequenos é válida a aproximação das funções $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_k, k)$ e $h(\mathbf{x}_k, k)$ pelos termos de primeira ordem das suas expansões em série de Taylor, obtendo-se

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^* + \Delta \mathbf{x}_{k+1} \approx \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_k^*, k) + \left[\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \mathbf{x}_k} \right]_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^*} \cdot \Delta \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\omega}_k \\ \mathbf{z}_k \approx h(\mathbf{x}_k^*, k) + \left[\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_k} \right]_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^*} \cdot \Delta \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\nu}_k \end{cases}. \quad (\text{G.25})$$

Tendo em conta a dinâmica da trajectória aproximada G.22 obtém-se

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x}_{k+1} = \phi_k \Delta \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\omega}_k \\ \mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k^*, k) = \mathbf{H}_k \Delta \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\nu}_k \end{cases}, \quad (\text{G.26})$$

onde

$$\phi_k = \left[\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_k} \right]_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^*}, \quad (\text{G.27})$$

$$\mathbf{H}_k = \left[\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_k} \right]_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^*}. \quad (\text{G.28})$$

Se G.27 e G.28 forem calculadas para uma trajectória predeterminada diz-se que o filtro resultante é linearizado. Se essa linearização for feita ao longo da trajectória estimada pelo filtro, então diz-se que o filtro resultante é um filtro de Kalman estendido. Tem-se então que o filtro de Kalman estendido opera sobre o modelo G.26 sendo a medida apresentada ao filtro dada por

$$\mathbf{z}_{inc} = [\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k^*, k)]. \quad (\text{G.29})$$

De forma análoga a G.5, a estimativa do erro é actualizada através de

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_k = \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_{inc} - \mathbf{H}_k \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^-). \quad (\text{G.30})$$

A estimativa *a priori* do erro de trajectória é dada por

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_k^- = \phi_k \Delta \hat{\mathbf{x}}_{k-1}. \quad (\text{G.31})$$

As equações para cálculo dos ganhos e cálculo da matriz de covariância do erro de estimação do filtro são análogas às anteriores podendo ser usadas quer as do filtro discreto convencional (G.14 e G.11 respectivamente) quer as do filtro discreto com matriz de ligação do vector de ruídos das observações ao vector de observações (G.20 e G.18 respectivamente) utilizando no entanto a matriz linearizada $\mathbf{H}_k$.

A equação de propagação da matriz de covariância do erro de estimação é análoga a G.15 utilizando no entanto a matriz linearizada ϕ_k .

É no entanto necessário ter em conta que se o erro de trajectória for suficientemente pequeno para que a linearização em torno do ponto de funcionamento seja válida, um filtro de Kalman estendido terá claramente vantagem em relação a um linearizado. Por outro lado uma má estimativa inicial ou erros grandes nas medidas apresentadas ao filtro poderão gerar situações de instabilidade. Por esta razão, é necessário que seja feita uma análise para cada caso particular e a escolha entre um filtro de Kalman linearizado e um estendido seja feita com a devida parcimónia.

Embora o filtro de Kalman estendido tenha sido aqui apresentado para trabalhar no espaço de erro de trajectória é possível modificá-lo por forma a que trabalhe nas variáveis totais. Com este fim, se na equação G.30 se expandir $\mathbf{z}_{inc}$ obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{x}}_k &= \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_{inc} - \mathbf{H}_k \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^-), \\ \Delta \hat{\mathbf{x}}_k &= \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k^*, k) - \mathbf{H}_k \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^-), \\ \Delta \hat{\mathbf{x}}_k &= \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - (h(\mathbf{x}_k^*, k) + \mathbf{H}_k \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^-)), \\ \Delta \hat{\mathbf{x}}_k &= \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^-). \end{aligned} \quad (\text{G.32})$$

Adicionando $\mathbf{x}_k^*$ a ambos os lados da equação G.32 vem

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k^* + \Delta \hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{x}_k^* + \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^-), \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^-).\end{aligned}\tag{G.33}$$

Quando a actualização é efectuada através de G.33 o erro de trajectória $\Delta \hat{\mathbf{x}}_k$ torna-se nulo. A projecção da estimativa do filtro é então dada por

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \phi(\hat{\mathbf{x}}_k, k).\tag{G.34}$$

Uma vez determinado $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$ pode-se calcular a estimativa das observações através de

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1}^- = h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-).\tag{G.35}$$

Tem-se desta forma o conjunto de equações que permite implementar um filtro de Kalman estendido discreto, recursivo e não estacionário que opera nas variáveis totais de estimação em vez das variáveis de erro de estimação.

Apêndice H

Caracterização estatística de $\mathbf{d}$, ρ e ${}^B\mathbf{p}_e$

H.1 Média e covariância do vector de tempos

Aplicando o operador valor esperado a 4.4, tem-se que a média do vector de tempos é dada por

$$m_{\mathbf{t}_m} = E[\mathbf{t}_m] = E[\bar{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\varepsilon}_c + \boldsymbol{\varepsilon}_d] = E[\bar{\mathbf{t}}] + E[\boldsymbol{\varepsilon}_c] + E[\boldsymbol{\varepsilon}_d]. \quad (\text{H.1})$$

Tendo em conta que o valor médio do erro de modo comum e do erro de modo diferencial é nulo

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}_c] = E[\boldsymbol{\varepsilon}_d] = [0_{N \times 1}], \quad (\text{H.2})$$

pode-se reescrever H.1 como

$$m_{\mathbf{t}_m} = E[\bar{\mathbf{t}}] = \bar{\mathbf{t}}. \quad (\text{H.3})$$

A matriz de covariância do vector de tempos é dada por

$$E[(\mathbf{t}_m - m_{\mathbf{t}_m})(\mathbf{t}_m - m_{\mathbf{t}_m})^T] = E[\mathbf{t}_m \mathbf{t}_m^T - m_{\mathbf{t}_m} \mathbf{t}_m^T - \mathbf{t}_m m_{\mathbf{t}_m}^T + m_{\mathbf{t}_m} m_{\mathbf{t}_m}^T]. \quad (\text{H.4})$$

Tendo em conta que $m_{\mathbf{t}_m} \mathbf{t}_m^T = \mathbf{t}_m m_{\mathbf{t}_m}^T$ e pode-se reescrever a equação anterior como

$$\begin{aligned} E[(\mathbf{t}_m - m_{\mathbf{t}_m})(\mathbf{t}_m - m_{\mathbf{t}_m})^T] &= E[\mathbf{t}_m \mathbf{t}_m^T - 2\bar{\mathbf{t}} \mathbf{t}_m^T + \bar{\mathbf{t}} \bar{\mathbf{t}}^T], \\ E[(\mathbf{t}_m - m_{\mathbf{t}_m})(\mathbf{t}_m - m_{\mathbf{t}_m})^T] &= E[\mathbf{t}_m \mathbf{t}_m^T] - E[2\bar{\mathbf{t}} \mathbf{t}_m^T] + E[\bar{\mathbf{t}} \bar{\mathbf{t}}^T], \\ E[(\mathbf{t}_m - m_{\mathbf{t}_m})(\mathbf{t}_m - m_{\mathbf{t}_m})^T] &= E[\mathbf{t}_m \mathbf{t}_m^T] - 2\bar{\mathbf{t}} \bar{\mathbf{t}}^T + \bar{\mathbf{t}} \bar{\mathbf{t}}^T, \\ E[(\mathbf{t}_m - m_{\mathbf{t}_m})(\mathbf{t}_m - m_{\mathbf{t}_m})^T] &= E[\mathbf{t}_m \mathbf{t}_m^T] - \bar{\mathbf{t}} \bar{\mathbf{t}}^T. \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

O termo $E[\mathbf{t}_m \mathbf{t}_m^T]$ em H.5 é dado por

$$\begin{aligned} E[\mathbf{t}_m \mathbf{t}_m^T] &= E[(\bar{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\varepsilon}_c + \boldsymbol{\varepsilon}_d)(\bar{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\varepsilon}_c + \boldsymbol{\varepsilon}_d)^T], \\ E[\mathbf{t}_m \mathbf{t}_m^T] &= E[\bar{\mathbf{t}} \bar{\mathbf{t}}^T + \boldsymbol{\varepsilon}_c \boldsymbol{\varepsilon}_c^T + \boldsymbol{\varepsilon}_d \boldsymbol{\varepsilon}_d^T + 2\bar{\mathbf{t}} \boldsymbol{\varepsilon}_c^T + 2\bar{\mathbf{t}} \boldsymbol{\varepsilon}_d^T + 2\boldsymbol{\varepsilon}_c \boldsymbol{\varepsilon}_d^T], \\ E[\mathbf{t}_m \mathbf{t}_m^T] &= E[\bar{\mathbf{t}} \bar{\mathbf{t}}^T] + E[\boldsymbol{\varepsilon}_c \boldsymbol{\varepsilon}_c^T] + E[\boldsymbol{\varepsilon}_d \boldsymbol{\varepsilon}_d^T] + 2\bar{\mathbf{t}} E[\boldsymbol{\varepsilon}_c^T] + 2\bar{\mathbf{t}} E[\boldsymbol{\varepsilon}_d^T] + 2E[\boldsymbol{\varepsilon}_c \boldsymbol{\varepsilon}_d^T]. \end{aligned} \quad (\text{H.6})$$

Sabendo que o erro de modo de comum e o erro de modo diferencial são incorrelacionados

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}_c \boldsymbol{\varepsilon}_d^T] = [0_{N \times N}], \quad (\text{H.7})$$

e tendo em conta H.2 pode-se reescrever H.6 como

$$E[\mathbf{t}_m \mathbf{t}_m^T] = \overline{\mathbf{t}\mathbf{t}}^T + E[\boldsymbol{\varepsilon}_c \boldsymbol{\varepsilon}_c^T] + E[\boldsymbol{\varepsilon}_d \boldsymbol{\varepsilon}_d^T], \quad (\text{H.8})$$

onde $E[\boldsymbol{\varepsilon}_c \boldsymbol{\varepsilon}_c^T]$ é a matriz de covariância do erro de modo comum e $E[\boldsymbol{\varepsilon}_d \boldsymbol{\varepsilon}_d^T]$ é a matriz de covariância do erro de modo diferencial e são dadas por

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}_c \boldsymbol{\varepsilon}_c^T] = \sigma_c^2 [1_{N \times N}], \quad (\text{H.9})$$

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}_d \boldsymbol{\varepsilon}_d^T] = \sigma_d^2 \mathbf{I}_{N \times N}. \quad (\text{H.10})$$

Substituindo H.8 em H.5 tem-se que a matriz de covariância do vector de tempos é dada por

$$E[(\mathbf{t}_m - m_{\mathbf{t}_m})(\mathbf{t}_m - m_{\mathbf{t}_m})^T] = \overline{\mathbf{t}\mathbf{t}}^T + E[\boldsymbol{\varepsilon}_c \boldsymbol{\varepsilon}_c^T] + E[\boldsymbol{\varepsilon}_d \boldsymbol{\varepsilon}_d^T] - \overline{\mathbf{t}\mathbf{t}}^T = E[\boldsymbol{\varepsilon}_c \boldsymbol{\varepsilon}_c^T] + E[\boldsymbol{\varepsilon}_d \boldsymbol{\varepsilon}_d^T]. \quad (\text{H.11})$$

H.2 Média e covariância da medida da direcção $\mathbf{d}$

Aplicando o operador valor esperado a 4.18, tem-se que a média da direcção de um dado emissor é dada por

$$m_{\mathbf{d}} = E[\mathbf{d}] = E[-v_p \mathbf{M}_{PS}^{\#} \mathbf{C} \mathbf{t}_m] = -v_p \mathbf{M}_{PS}^{\#} \mathbf{C} E[\mathbf{t}_m] = -v_p \mathbf{M}_{PS}^{\#} \mathbf{C} m_{\mathbf{t}_m}. \quad (\text{H.12})$$

Substituindo H.1 em H.12 vem que a média do vector de direcção é dada por

$$m_{\mathbf{d}} = -v_p \mathbf{M}_{PS}^{\#} \mathbf{C} \bar{\mathbf{t}}. \quad (\text{H.13})$$

A matriz de covariância do vector de direcção é dada, analogamente ao deduzido para a Equação H.5, por

$$E[(\mathbf{d} - m_{\mathbf{d}})(\mathbf{d} - m_{\mathbf{d}})^T] = E[\mathbf{d}\mathbf{d}^T] - m_{\mathbf{d}} m_{\mathbf{d}}^T. \quad (\text{H.14})$$

O termo $E[\mathbf{d}\mathbf{d}^T]$ em H.14 é dado por

$$\begin{aligned} E[\mathbf{d}\mathbf{d}^T] &= E[-v_p \mathbf{M}_{PS}^{\#} \mathbf{C} \mathbf{t}_m (-v_p \mathbf{M}_{PS}^{\#} \mathbf{C} \mathbf{t}_m)^T], \\ E[\mathbf{d}\mathbf{d}^T] &= E[v_p^2 \mathbf{M}_{PS}^{\#} \mathbf{C} \mathbf{t}_m \mathbf{t}_m^T \mathbf{C}^T \mathbf{M}_{PS}^{\#T}], \\ E[\mathbf{d}\mathbf{d}^T] &= v_p^2 \mathbf{M}_{PS}^{\#} \mathbf{C} E[\mathbf{t}_m \mathbf{t}_m^T] \mathbf{C}^T \mathbf{M}_{PS}^{\#T}. \end{aligned} \quad (\text{H.15})$$

Substituindo H.8 em H.15 vem

$$E[\mathbf{d}\mathbf{d}^T] = v_p^2 \mathbf{M}_{PS}^{\#} \mathbf{C} (\overline{\mathbf{t}\mathbf{t}}^T + E[\boldsymbol{\varepsilon}_c \boldsymbol{\varepsilon}_c^T] + E[\boldsymbol{\varepsilon}_d \boldsymbol{\varepsilon}_d^T]) \mathbf{C}^T \mathbf{M}_{PS}^{\#T}. \quad (\text{H.16})$$

Tendo em conta H.13, o termo $m_{\mathbf{d}} m_{\mathbf{d}}^T$ em H.14 é dado por

$$m_{\mathbf{d}} m_{\mathbf{d}}^T = -v_p \mathbf{M}_{PS}^{\#} \mathbf{C} \bar{\mathbf{t}} (-v_p \mathbf{M}_{PS}^{\#} \mathbf{C} \bar{\mathbf{t}})^T = v_p^2 \mathbf{M}_{PS}^{\#} \mathbf{C} \bar{\mathbf{t}} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{C}^T \mathbf{M}_{PS}^{\#T}. \quad (\text{H.17})$$

Substituindo H.16 e H.17 em H.14 tem-se que a matriz de covariância do vector direcção é dada por

$$E[(\mathbf{d} - m_{\mathbf{d}})(\mathbf{d} - m_{\mathbf{d}})^T] = v_p^2 \mathbf{M}_{PS}^{\#} \mathbf{C} (E[\boldsymbol{\varepsilon}_c \boldsymbol{\varepsilon}_c^T] + E[\boldsymbol{\varepsilon}_d \boldsymbol{\varepsilon}_d^T]) \mathbf{C}^T \mathbf{M}_{PS}^{\#T}. \quad (\text{H.18})$$

H.3 Média e covariância da medida da distância ρ

Aplicando o operador valor esperado a 4.25, tem-se que a média da distância de um emissor à origem do referencial $\{B\}$ é dada por

$$m_\rho = E[\rho] = E\left[\frac{1}{N}\mathbf{m}_{esp}(v_p\mathbf{t}_m + {}^B\bar{\mathbf{p}}_r^T \mathbf{d})\right] = \frac{1}{N}\mathbf{m}_{esp}(v_p E[\mathbf{t}_m] + {}^B\bar{\mathbf{p}}_r^T E[\mathbf{d}]). \quad (\text{H.19})$$

Substituindo H.1 e H.13 em H.19 obtém-se

$$m_\rho = \frac{1}{N}\mathbf{m}_{esp}(v_p\bar{\mathbf{t}} - v_p {}^B\bar{\mathbf{p}}_r^T \mathbf{M}_{PS}^\# \mathbf{C}\bar{\mathbf{t}}). \quad (\text{H.20})$$

De 4.25, 4.4 e H.19 pode-se escrever

$$\rho - m_\rho = \frac{1}{N}\mathbf{m}_{esp}(v_p(\boldsymbol{\varepsilon}_c + \boldsymbol{\varepsilon}_d) + {}^B\bar{\mathbf{p}}_r^T (\mathbf{d} - m_d)). \quad (\text{H.21})$$

Tendo em conta H.21 tem-se que a matriz de covariância da distância ρ é dada por

$$\begin{aligned} E[(\rho - m_\rho)(\rho - m_\rho)^T] &= E\left[\left(\frac{1}{N}\mathbf{m}_{esp}(v_p(\boldsymbol{\varepsilon}_c + \boldsymbol{\varepsilon}_d) + {}^B\bar{\mathbf{p}}_r^T (\mathbf{d} - m_d))\right)\right. \\ &\quad \left.\left(\frac{1}{N}\mathbf{m}_{esp}(v_p(\boldsymbol{\varepsilon}_c + \boldsymbol{\varepsilon}_d) + {}^B\bar{\mathbf{p}}_r^T (\mathbf{d} - m_d))\right)^T\right], \\ E[(\rho - m_\rho)(\rho - m_\rho)^T] &= \frac{1}{N^2}\mathbf{m}_{esp}E[v_p^2(\boldsymbol{\varepsilon}_c + \boldsymbol{\varepsilon}_d)(\boldsymbol{\varepsilon}_c + \boldsymbol{\varepsilon}_d)^T + \\ &\quad + 2v_p {}^B\bar{\mathbf{p}}_r^T (\mathbf{d} - m_d)(\boldsymbol{\varepsilon}_c + \boldsymbol{\varepsilon}_d)^T + \\ &\quad + {}^B\bar{\mathbf{p}}_r^T (\mathbf{d} - m_d)(\mathbf{d} - m_d)^T {}^B\bar{\mathbf{p}}_r] \mathbf{m}_{esp}^T, \\ E[(\rho - m_\rho)(\rho - m_\rho)^T] &= \frac{1}{N^2}\mathbf{m}_{esp}(v_p^2(E[\boldsymbol{\varepsilon}_c\boldsymbol{\varepsilon}_c^T] + 2E[\boldsymbol{\varepsilon}_c\boldsymbol{\varepsilon}_d^T] + E[\boldsymbol{\varepsilon}_d\boldsymbol{\varepsilon}_d^T]) + \\ &\quad + 2v_p {}^B\bar{\mathbf{p}}_r^T E[(\mathbf{d} - m_d)(\boldsymbol{\varepsilon}_c + \boldsymbol{\varepsilon}_d)^T] + \\ &\quad + {}^B\bar{\mathbf{p}}_r^T E[(\mathbf{d} - m_d)(\mathbf{d} - m_d)^T] {}^B\bar{\mathbf{p}}_r) \mathbf{m}_{esp}^T. \end{aligned} \quad (\text{H.22})$$

O termo $E[(\mathbf{d} - m_d)(\boldsymbol{\varepsilon}_c + \boldsymbol{\varepsilon}_d)^T]$ em H.22 é dado por

$$E[(\mathbf{d} - m_d)(\boldsymbol{\varepsilon}_c + \boldsymbol{\varepsilon}_d)^T] = E[\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_c^T] + E[\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_d^T] - m_d(E[\boldsymbol{\varepsilon}_c^T] + E[\boldsymbol{\varepsilon}_d^T]). \quad (\text{H.23})$$

Tendo em conta H.2 e 4.18 vem

$$E[(\mathbf{d} - m_d)(\boldsymbol{\varepsilon}_c + \boldsymbol{\varepsilon}_d)^T] = E[-v_p\mathbf{M}_{PS}^\# \mathbf{C}\mathbf{t}_m\boldsymbol{\varepsilon}_c^T] + E[-v_p\mathbf{M}_{PS}^\# \mathbf{C}\mathbf{t}_m\boldsymbol{\varepsilon}_d^T]. \quad (\text{H.24})$$

Substituindo 4.4 em H.24 e tendo em conta H.7 e H.2 tem-se

$$E[(\mathbf{d} - m_d)(\boldsymbol{\varepsilon}_c + \boldsymbol{\varepsilon}_d)^T] = -v_p\mathbf{M}_{PS}^\# \mathbf{C}(E[\boldsymbol{\varepsilon}_c\boldsymbol{\varepsilon}_c^T] + E[\boldsymbol{\varepsilon}_d\boldsymbol{\varepsilon}_d^T]). \quad (\text{H.25})$$

Substituindo H.25, H.7 e H.18 em H.22 obtém-se

$$\begin{aligned} E[(\rho - m_\rho)(\rho - m_\rho)^T] &= \frac{1}{N^2}v_p^2\mathbf{m}_{esp}((E[\boldsymbol{\varepsilon}_c\boldsymbol{\varepsilon}_c^T] + E[\boldsymbol{\varepsilon}_d\boldsymbol{\varepsilon}_d^T]) + \\ &\quad - 2 {}^B\bar{\mathbf{p}}_r^T \mathbf{M}_{PS}^\# \mathbf{C}(E[\boldsymbol{\varepsilon}_c\boldsymbol{\varepsilon}_c^T] + E[\boldsymbol{\varepsilon}_d\boldsymbol{\varepsilon}_d^T]) + \\ &\quad + {}^B\bar{\mathbf{p}}_r^T \mathbf{M}_{PS}^\# \mathbf{C}(E[\boldsymbol{\varepsilon}_c\boldsymbol{\varepsilon}_c^T] + E[\boldsymbol{\varepsilon}_d\boldsymbol{\varepsilon}_d^T]) \mathbf{C}^T \mathbf{M}_{PS}^{\#T} {}^B\bar{\mathbf{p}}_r) \mathbf{m}_{esp}^T. \end{aligned} \quad (\text{H.26})$$

H.4 Covariância entre as medidas da distância ρ e da direcção $\mathbf{d}$

A matriz de covariância entre a distância ρ e a direcção $\mathbf{d}$ é dada por

$$E[(\rho - m_\rho)(\mathbf{d} - m_d)^T] = E[\rho \mathbf{d}^T] - m_\rho m_d^T. \quad (\text{H.27})$$

Partindo de 4.25, o termo $E[\rho \mathbf{d}^T]$ em H.27 é dado por

$$\begin{aligned} E[\rho \mathbf{d}^T] &= E\left[\left(\frac{1}{N} \mathbf{m}_{esp} (v_p \mathbf{t}_m + {}^B\overline{\mathbf{p}}_r^T \mathbf{d})\right) \mathbf{d}^T\right], \\ E[\rho \mathbf{d}^T] &= \frac{1}{N} \mathbf{m}_{esp} (v_p E[\mathbf{t}_m \mathbf{d}^T] + {}^B\overline{\mathbf{p}}_r^T E[\mathbf{d} \mathbf{d}^T]). \end{aligned} \quad (\text{H.28})$$

Tendo em conta 4.18 e 4.4, o termo $E[\mathbf{t}_m \mathbf{d}^T]$ em H.28 vem dado por

$$\begin{aligned} E[\mathbf{t}_m \mathbf{d}^T] &= E[\mathbf{t}_m (-v_p \mathbf{M}_{PS}^\# \mathbf{C} \mathbf{t}_m)^T] \\ E[\mathbf{t}_m \mathbf{d}^T] &= -v_p E[\mathbf{t}_m \mathbf{t}_m^T] \mathbf{C}^T \mathbf{M}_{PS}^{\#T}. \end{aligned} \quad (\text{H.29})$$

Substituindo H.8 em H.29 tem-se

$$E[\mathbf{t}_m \mathbf{d}^T] = -v_p (\overline{\mathbf{t} \mathbf{t}}^T + E[\boldsymbol{\varepsilon}_c \boldsymbol{\varepsilon}_c^T] + E[\boldsymbol{\varepsilon}_d \boldsymbol{\varepsilon}_d^T]) \mathbf{C}^T \mathbf{M}_{PS}^{\#T}. \quad (\text{H.30})$$

Substituindo H.30 e H.16 em H.28 obtém-se

$$\begin{aligned} E[\rho \mathbf{d}^T] &= \frac{1}{N} \mathbf{m}_{esp} (-v_p^2 (\overline{\mathbf{t} \mathbf{t}}^T + E[\boldsymbol{\varepsilon}_c \boldsymbol{\varepsilon}_c^T] + E[\boldsymbol{\varepsilon}_d \boldsymbol{\varepsilon}_d^T]) \mathbf{C}^T \mathbf{M}_{PS}^{\#T} + \\ &\quad + v_p^2 {}^B\overline{\mathbf{p}}_r^T \mathbf{M}_{PS}^\# \mathbf{C} (\overline{\mathbf{t} \mathbf{t}}^T + E[\boldsymbol{\varepsilon}_c \boldsymbol{\varepsilon}_c^T] + E[\boldsymbol{\varepsilon}_d \boldsymbol{\varepsilon}_d^T]) \mathbf{C}^T \mathbf{M}_{PS}^{\#T}). \end{aligned} \quad (\text{H.31})$$

Substituindo H.31, H.1 e H.13 em H.27 tem-se que a matriz de covariância entre a distância ρ e a direcção $\mathbf{d}$ é dada por

$$\begin{aligned} E[(\rho - m_\rho)(\mathbf{d} - m_d)^T] &= \frac{1}{N} \mathbf{m}_{esp} (-v_p^2 (E[\boldsymbol{\varepsilon}_c \boldsymbol{\varepsilon}_c^T] + E[\boldsymbol{\varepsilon}_d \boldsymbol{\varepsilon}_d^T]) \mathbf{C}^T \mathbf{M}_{PS}^{\#T} + \\ &\quad + v_p^2 {}^B\overline{\mathbf{p}}_r^T \mathbf{M}_{PS}^\# \mathbf{C} (E[\boldsymbol{\varepsilon}_c \boldsymbol{\varepsilon}_c^T] + E[\boldsymbol{\varepsilon}_d \boldsymbol{\varepsilon}_d^T]) \mathbf{C}^T \mathbf{M}_{PS}^{\#T}). \end{aligned} \quad (\text{H.32})$$

H.5 Aproximação das posições relativas por uma distribuição normal

A posição de um dado emissor no referencial $\{B\}$ pode ser expressa a partir de H.33 nas suas três componentes

$${}^B\mathbf{p}_e = [\rho d_x \quad \rho d_y \quad \rho d_z]^T. \quad (\text{H.33})$$

Seja a função escalar

$$g(\rho, d_k) = \rho d_k \text{ com } k = \{x, y, z\}. \quad (\text{H.34})$$

Pode-se então reescrever H.33 a partir de H.34

$${}^B\mathbf{p}_e = [g(\rho, d_x) \quad g(\rho, d_y) \quad g(\rho, d_z)]^T. \quad (\text{H.35})$$

A expansão em série de Taylor de H.34 em torno dos valores médios de ρ e d_k dá origem a

$$g(\rho, d_k) = g(\rho, d_k) + \nabla g(\rho, d_k) \begin{bmatrix} \rho - m_\rho \\ d_k - m_{d_k} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \rho - m_\rho & d_k - m_{d_k} \end{bmatrix} \nabla^2 g(\rho, d_k) \begin{bmatrix} \rho - m_\rho \\ d_k - m_{d_k} \end{bmatrix} + \dots \quad (\text{H.36})$$

O gradiente $\nabla g(\rho, d_k)$ em H.36 é dado por

$$\nabla g(\rho, d_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g(\rho, d_k)}{\partial \rho} & \frac{\partial g(\rho, d_k)}{\partial d_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_k & \rho \end{bmatrix}. \quad (\text{H.37})$$

A matriz Hermiteana $\nabla^2 g(\rho, d_k)$ em H.36 é dada por

$$\nabla^2 g(\rho, d_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g(\rho, d_k)}{\partial^2 \rho} & \frac{\partial^2 g(\rho, d_k)}{\partial \rho \partial d_k} \\ \frac{\partial^2 g(\rho, d_k)}{\partial d_k \partial \rho} & \frac{\partial^2 g(\rho, d_k)}{\partial^2 d_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{H.38})$$

Os termos de ordem superior à segunda em H.36 são todos nulos pois todas as derivadas de ordem superior à segunda de $g(\rho, d_k)$ também o são.

O valor esperado de $g(\rho, d_k)$ é dado por [2]

$$E[g(\rho, d_k)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\rho, d_k) f(\rho, d_k) \partial \rho \partial d_k, \quad (\text{H.39})$$

onde $f(\rho, d_k)$ é a função densidade de probabilidade conjunta de ρ e d_k que verifica [2]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho, d_k) \partial \rho \partial d_k = 1. \quad (\text{H.40})$$

Aplicando H.39 a H.36 obtém-se

$$E[g(\rho, d_k)] = m_\rho m_{d_k} + E[(\rho - m_\rho)(d_k - m_{d_k})]. \quad (\text{H.41})$$

A média da posição do emissor no referencial $\{B\}$ é dada, na forma vectorial, por

$$E[{}^B \mathbf{p}_e] = \begin{bmatrix} E[g(\rho, d_x)] & E[g(\rho, d_y)] & E[g(\rho, d_z)] \end{bmatrix} \quad (\text{H.42})$$

em que os elementos $E[g(\rho, d_k)]$ com $k = \{x, y, z\}$ são dados por H.41.

A matriz de covariância da posição do emissor no referencial $\{B\}$ é dada por

$$E[({}^B \mathbf{p}_e - E[{}^B \mathbf{p}_e])({}^B \mathbf{p}_e - E[{}^B \mathbf{p}_e])^T] = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{bmatrix}, \quad (\text{H.43})$$

onde os elementos V_{kj} com $k = \{x, y, z\}$ e $j = \{x, y, z\}$ são dados por

$$V_{kj} = E[(g(\rho, d_k) - E[g(\rho, d_k)])(g(\rho, d_j) - E[g(\rho, d_j)])]. \quad (\text{H.44})$$

Aplicando H.39 a H.44 e desprezando os termos de ordem superior à segunda obtém-se

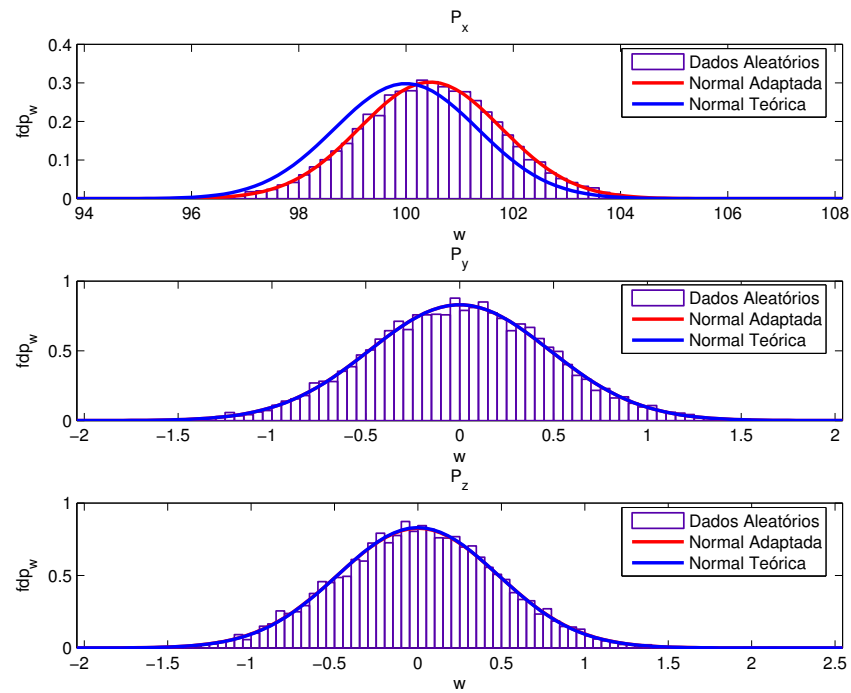
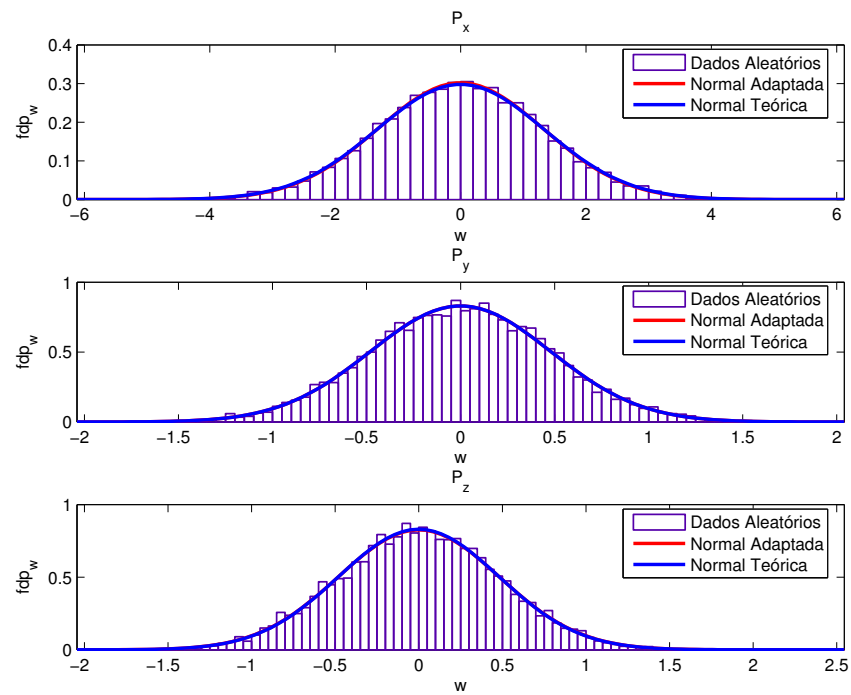
$$V_{kj} = m_{d_k} m_{d_j} E[(\rho - m_\rho)^2] + m_{d_k} m_\rho E[(\rho - m_\rho)(d_j - m_{d_j})] + m_{d_j} m_\rho E[(\rho - m_\rho)(d_k - m_{d_k})] + m_\rho^2 E[(d_k - m_{d_k})(d_j - m_{d_j})]. \quad (\text{H.45})$$

Para validação desta aproximação foi efectuada uma simulação de Monte-Carlo com 10000 experiências aleatórias. É utilizada uma geometria de instalação dos receptores no referencial $\{B\}$ semi-esférica como estudado em [1] com 13 receptores. O emissor é colocado a 100 metros da origem do referencial $\{B\}$ alinhado segundo eixo x (${}^B\mathbf{p}_e = [100 \ 0 \ 0]^T$).

Na Figura H.1 apresenta-se o resultado desta simulação. As barras verticais representam os dados aleatórios gerados pela simulação, a vermelho representa-se uma distribuição normal adaptada aos dados aleatórios gerados e a azul encontra-se a distribuição normal esperada teoricamente tal como calculado anteriormente nesta Secção.

Na Figura H.1(b) encontra-se o resultado da simulação adaptando a distribuição normal aos dados aleatórios depois de subtraída a sua média. Como se pode verificar, aproximação é válida.

Na Figura H.1(a) encontra-se o resultado da simulação adaptando a distribuição normal aos dados aleatórios sem subtrair a sua média. Pode-se observar na componente em x um deslocamento no valor médio da distribuição. Este deslocamento é devido à aproximação planar da onda acústica no cálculo da direcção $\mathbf{d}$ e da distância ρ . Depende ainda da zona espacial em que se encontra o emissor em relação ao veículo, tal como estudado em [1]. No entanto, no âmbito deste trabalho, não se consegue caracterizar este deslocamento quando implementado no filtro de Kalman. O filtro de Kalman assume que os ruídos das observações têm média nula, pelo que este deslocamento surge como uma polarização nas medidas não permitindo que se distinga da grandeza nominal.

(a) Função densidade de probabilidade em torno da posição nominal (${}^B\mathbf{p}_e$)(b) Função densidade de probabilidade em torno da origem (${}^B\mathbf{p}_e - E[{}^B\mathbf{p}_e]$)Figura H.1 - Simulação de Monte-Carlo: validação da aproximação normal para a posição do emissor no referencial $\{B\}$

Apêndice I

Modelo do veículo

O desempenho dos sistemas de navegação implementados é avaliado utilizando o modelo matemático de um veículo genérico apresentado neste Apêndice.

I.1 Descrição física do veículo

Perante a intenção de conceber algoritmos de navegação genéricos e independentes do tipo de veículo, utiliza-se um veículo holonómico (pode-se movimentar em qualquer direcção), simétrico e uniforme em relação ao centro de massa. Representado na Figura I.1, o veículo possui seis propulsores, dois por face permitindo movimentos em qualquer direcção e rotações sobre qualquer eixo.

Na Tabela I.1 apresentam-se as características físicas do veículo em coordenadas do referencial do centro de massa $\{G\}$. A posição dos sensores não é necessariamente e em geral coincidente com o centro de massa do veículo, no entanto, neste caso assume-se que coincidem por uma questão de simplicidade de análise dos resultados.

I.2 Equações da dinâmica

A dedução das equações da dinâmica é descrita no referencial $\{B\}$ devido às leituras dos sensores serem efectuadas neste referencial. Parte-se da equação de Euler para rotação

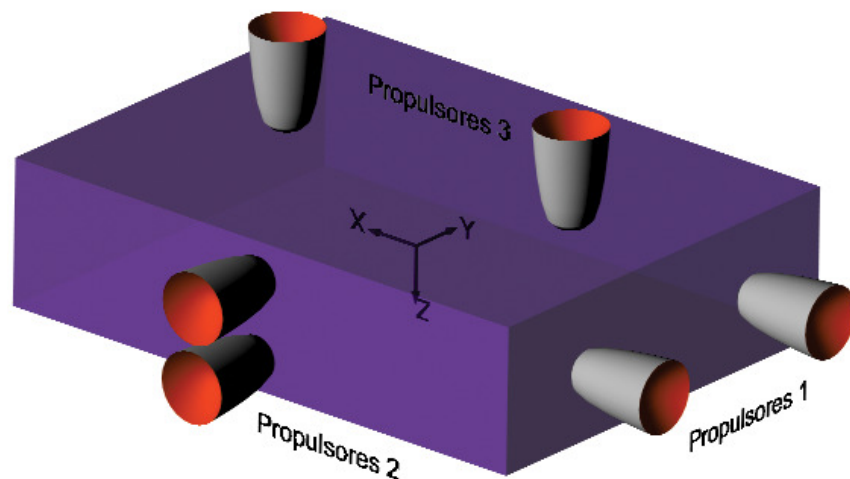


Figura I.1 - Representação gráfica do modelo do veículo (extraído de [3])

Tabela I.1 - Características físicas do veículo

Massa	10 <i>Kg</i>
Altura (z)	0.25 <i>m</i>
Largura (y)	0.75 <i>m</i>
Comprimento (x)	1 <i>m</i>
Propulsores 1	$[-0.5, \pm 0.3, 0]^T$ <i>m</i>
Propulsores 2	$[0, -0.375, \pm 0.1]^T$ <i>m</i>
Propulsores 3	$[\pm 0.4, 0, -0.125]^T$ <i>m</i>
Sensores	$[0, 0, 0]^T$ <i>m</i>

em torno de ${}^I\mathbf{p}_{Borg}$, e da terceira lei de Newton sobre a translação do ponto de um corpo rígido em relação a um referencial inercial [20]

$$\begin{cases} \frac{d {}^I\mathcal{L}_{Borg}}{dt} = {}^I\boldsymbol{\tau}_{Borg} + m ({}^I\mathbf{p}_{Borg} - {}^I\mathbf{p}_{Gorg}) \times \frac{d {}^I\mathbf{v}_{Borg}}{dt}, \\ {}^I\mathbf{f}_{Gorg} = m \frac{d {}^I\mathbf{v}_{Gorg}}{dt} \end{cases}, \quad (\text{I.1})$$

onde m é a massa do veículo, ${}^I\mathcal{L}_{Borg}$ é o momento angular, ${}^I\boldsymbol{\tau}_{Borg}$ é o binário total exercido pelas forças externas em torno da origem de $\{B\}$ e ${}^I\mathbf{f}_{Gorg}$ é a resultante das forças externas aplicadas no centro de massa, vistas no referencial inercial $\{I\}$.

Por desenvolvimento de I.1, obtém-se as expressões que descrevem a influência das forças e binários exteriores na rotação e translação do corpo rígido [20]

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}_R \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{M}_{RT} \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{M}_{RT} \mathbf{u} + \mathbf{M}_R \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{u} \times (\mathbf{M}_{TR} \boldsymbol{\omega}) \\ \mathbf{f} = \mathbf{M}_T \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}_{TR} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{M}_{TR} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{M}_T \mathbf{u}) \end{cases}, \quad (\text{I.2})$$

onde

- $\boldsymbol{\tau} = {}^B\boldsymbol{\tau}_{Borg}$ é o binário total exercido pelas forças externas em torno da origem de $\{B\}$, visto em $\{B\}$;
- $\mathbf{f} = {}^B\mathbf{f}_{Gorg}$ é a resultante das forças externas aplicadas no centro de massa, vista em $\{B\}$;
- $\mathbf{u} = {}^B({}^I\mathbf{v}_{Borg})$ é a velocidade da origem de $\{B\}$ em relação a $\{I\}$, vista em $\{B\}$;
- $\boldsymbol{\omega} = {}^B({}^I\boldsymbol{\omega}_B)$ é a velocidade angular do referencial $\{B\}$ em relação ao referencial $\{I\}$, vista em $\{B\}$;
- $\mathbf{M}_R = \mathbf{I}_B$ é a matriz dos efeitos inerciais de rotação devido à rotação;
- $\mathbf{M}_T = m\mathbf{I}_{3 \times 3}$ é a matriz dos efeitos inerciais de translação devido à translação;
- $\mathbf{M}_{RT} = m [{}^B\mathbf{p}_{Gorg} \times]$ é a matriz dos efeitos inerciais de rotação devido à translação;
- $\mathbf{M}_{TR} = -m [{}^B\mathbf{p}_{Gorg} \times] = \mathbf{M}_{RT}^T$ é a matriz dos efeitos inerciais de translação devido à rotação.

O tensor de inércia no referencial de centro de massa $\{G\}$ é definido [5] por

$$\mathbf{I}_G = \int \int \int_v \rho \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} dv, \quad (\text{I.3})$$

onde ρ é a densidade do veículo em cada elemento diferencial de volume dv .

Particularizando para o veículo modelado tem-se

$$\mathbf{I}_G = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} w^2 + h^2 & 0 & 0 \\ 0 & l^2 + h^2 & 0 \\ 0 & 0 & l^2 + w^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{I.4})$$

onde h , l e w são a altura, comprimento e largura do veículo, respectivamente.

Devido aos referenciais $\{G\}$ e $\{B\}$ terem a mesma orientação, o tensor de inércia no referencial do corpo $\mathbf{I}_B$ é definido em função de $\mathbf{I}_G$ através do Teorema dos Eixos Paralelos [5]

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_G + m \left[{}^B\mathbf{p}_{Gorg}^T {}^B\mathbf{p}_{Gorg} \mathbf{I}_{3 \times 3} - {}^B\mathbf{p}_{Gorg} {}^B\mathbf{p}_{Gorg}^T \right]. \quad (\text{I.5})$$

Reescrevendo I.2 como equações diferenciais de $\mathbf{u}$ e $\boldsymbol{\omega}$, obtém-se as equações fundamentais da dinâmica do veículo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{Y}^{-1} \{ \mathbf{f} - \mathbf{M}_{TR} \mathbf{M}_R^{-1} [\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{M}_R \boldsymbol{\omega} + \mathbf{M}_{RT} \mathbf{u}) + \\ \quad - \mathbf{u} \times (\mathbf{M}_{TR} \boldsymbol{\omega})] - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{M}_T \mathbf{u} + \mathbf{M}_{TR} \boldsymbol{\omega}) \} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{X}^{-1} \{ \boldsymbol{\tau} - \mathbf{M}_{RT} \mathbf{M}_T^{-1} [\mathbf{f} - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{M}_T \mathbf{u} + \mathbf{M}_{TR} \boldsymbol{\omega})] + \\ \quad - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{M}_R \boldsymbol{\omega} + \mathbf{M}_{RT} \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times (\mathbf{M}_{TR} \boldsymbol{\omega}) \} \end{cases}, \quad (\text{I.6})$$

onde

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \mathbf{M}_R - \mathbf{M}_{RT} \mathbf{M}_T^{-1} \mathbf{M}_{TR} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{M}_T - \mathbf{M}_{TR} \mathbf{M}_R^{-1} \mathbf{M}_{RT} \end{cases}. \quad (\text{I.7})$$

I.3 Influência das forças e binários externos

O veículo é afectado por diversas forças exteriores, nomeadamente, a força de gravidade, a força gerada pelos propulsores e a força de atrito. Estas forças externas geram adicionalmente binários em torno do centro de gravidade do veículo.

O binário originado por forças exteriores em torno da origem do referencial $\{B\}$, visto num referencial genérico $\{A\}$, é dado por

$${}^A\boldsymbol{\tau}_{Borg} = {}^A\mathcal{R} \sum_i {}^B\mathbf{p}_i \times {}^B\mathbf{f}_i, \quad (\text{I.8})$$

onde ${}^B\mathbf{f}_i$ é a força externa com índice i com ponto de aplicação ${}^B\mathbf{p}_i$, ambos vistos em $\{B\}$.

Devido às equações da dinâmica do veículo I.6 estarem descritas no referencial do corpo torna-se necessária a conversão das forças e binários externos do referencial do centro de massa $\{G\}$ para o referencial $\{B\}$. Os referenciais $\{G\}$ e $\{B\}$ têm a mesma orientação (${}^G\mathcal{R} = \mathbf{I}_{3 \times 3}$) pelo que se verifica

$${}^B\mathbf{f} = {}^G\mathbf{f}. \quad (\text{I.9})$$

No caso de existir uma translação entre os referenciais $\{B\}$ e $\{G\}$, surgem binários em torno de $\{B\}$ devido às forças aplicadas em $\{G\}$. A conversão de coordenadas de um ponto em $\{G\}$ para $\{B\}$, tendo em conta que os referenciais têm a mesma orientação (${}^G_B\mathcal{R} = \mathbf{I}_{3 \times 3}$), é dada por

$${}^B\mathbf{p} = {}^B\mathbf{p}_{Gorg} + {}^B_G\mathcal{R} {}^G\mathbf{p} = {}^B\mathbf{p}_{Gorg} + {}^G\mathbf{p}. \quad (\text{I.10})$$

Fazendo coincidir $\{A\}$ com $\{B\}$ em I.8, e tendo em conta I.10, I.9 e as propriedades do produto externo (Apêndice E) tem-se

$$\begin{aligned} {}^B\boldsymbol{\tau}_{Borg} &= \sum_i {}^B\mathbf{p}_i \times {}^B\mathbf{f}_i = \sum_i ({}^B\mathbf{p}_{Gorg} + {}^G\mathbf{p}_i) \times {}^B\mathbf{f}_i, \\ {}^B\boldsymbol{\tau}_{Borg} &= \sum_i ({}^G\mathbf{p}_i \times {}^G\mathbf{f}_i) + \sum_i ({}^B\mathbf{p}_{Gorg} \times {}^B\mathbf{f}_i), \\ {}^B\boldsymbol{\tau}_{Borg} &= {}^G\boldsymbol{\tau}_{Gorg} + {}^B\mathbf{p}_{Gorg} \times {}^B\mathbf{f}. \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

A força gravítica que actua sobre o veículo resulta da existência de massa no corpo e é dada por

$${}^G\mathbf{f}_g = m {}^G\mathbf{g}, \quad (\text{I.12})$$

onde ${}^G\mathbf{g}$ é a aceleração gravítica expressa no referencial $\{G\}$.

Os atritos são traduzidos através de uma força e de um binário de atrito proporcionais às velocidades linear e angular do veículo, respectivamente, e são dados por

$$\begin{cases} {}^G\mathbf{f}_a = -K_{lin} {}^G({}^I\mathbf{v}_{Gorg}) \\ \boldsymbol{\tau}_a = -K_{ang} {}^G({}^I\boldsymbol{\omega}_G) \end{cases}, \quad (\text{I.13})$$

sendo o binário $\boldsymbol{\tau}_a$ distinto do binário gerado por ${}^G\mathbf{f}_a$ e invariante do referencial $\{G\}$ para o referencial $\{B\}$. As velocidades ${}^G({}^I\mathbf{v}_{Gorg})$ e ${}^G({}^I\boldsymbol{\omega}_G)$ são calculadas recorrendo ao Teorema de Coriolis [4], sabendo que ambos os referenciais têm a mesma orientação e rodam com a mesma velocidade angular (${}^G_B\mathcal{R} = \mathbf{I}_{3 \times 3}$, ${}^B\boldsymbol{\omega}_G = 0$)

$$\begin{cases} {}^G({}^I\mathbf{v}_{Gorg}) = {}^B({}^I\mathbf{v}_{Gorg}) = \mathbf{u} + [\boldsymbol{\omega} \times] {}^B\mathbf{p}_{Gorg} \\ {}^G({}^I\boldsymbol{\omega}_G) = {}^G({}^I\boldsymbol{\omega}_B) + {}^G({}^B\boldsymbol{\omega}_G) = \boldsymbol{\omega} \end{cases}. \quad (\text{I.14})$$

As forças e binários gerados pelos propulsores são dados por

$$\begin{cases} {}^G\mathbf{f}_{prop} = \sum_i {}^G\mathbf{f}_{prop_i} \\ {}^G\boldsymbol{\tau}_{Gorg \ prop} = \sum_i {}^G\mathbf{p}_{prop_i} \times {}^G\mathbf{f}_{prop_i} \end{cases}, \quad (\text{I.15})$$

onde ${}^G\mathbf{p}_{prop_i}$ é a posição do propulsor i no referencial $\{G\}$.

A força e o binário resultantes no centro de massa são então dados por

$$\begin{cases} {}^G\mathbf{f}_{ext} = {}^G\mathbf{f}_a + {}^G\mathbf{f}_g + {}^G\mathbf{f}_{prop} \\ {}^G\boldsymbol{\tau}_{Gorg \ ext} = {}^G\boldsymbol{\tau}_{Gorg \ prop} + \boldsymbol{\tau}_a \end{cases}. \quad (\text{I.16})$$

Tendo em conta que ${}^G_B\mathcal{R} = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ tem-se a partir de I.9, I.11 e I.16 que a força e binário resultantes no referencial $\{B\}$ são dadas por

$$\begin{cases} {}^B\mathbf{f}_{ext} = {}^G\mathbf{f}_a + {}^G\mathbf{f}_g + {}^G\mathbf{f}_{prop} \\ {}^B\boldsymbol{\tau}_{Borg \ ext} = {}^G\boldsymbol{\tau}_{Gorg \ prop} + \boldsymbol{\tau}_a + {}^B\mathbf{p}_{Gorg} \times {}^B\mathbf{f}_{ext} \end{cases}. \quad (\text{I.17})$$

Para maior simplicidade no comando do veículo, considera-se que a força gravítica é anulada por um propulsor virtual. No entanto, esta compensação não impede a existência de uma força específica correspondente nos acelerómetros, uma vez que a componente gravítica da força específica não está relacionada com a actuação do propulsor virtual.

Apêndice J

Desenvolvimento dos simuladores em *Simulink*

Neste Apêndice aborda-se o desenvolvimento em *Simulink* dos simuladores para as técnicas de processamento de sinal e para o modelo do veículo e dos sistemas de navegação implementados.

J.1 Simulador das técnicas de processamento de sinal

As técnicas de processamento de sinal apresentadas no Capítulo 2 são simuladas utilizando os modelos apresentados na Figura J.1 para 1 emissor e 1 receptor e na Figura J.2 para 3 emissores e 1 receptor. No ficheiro "Communications.m" encontram-se as configurações do modelo de 1 emissor e 1 receptor e as suas instruções de execução. Analogamente, para configurar e executar o modelo de 3 emissores e 1 receptor, deve-se editar e executar em ambiente *MATLAB* o ficheiro "Beacon3Communications.m"

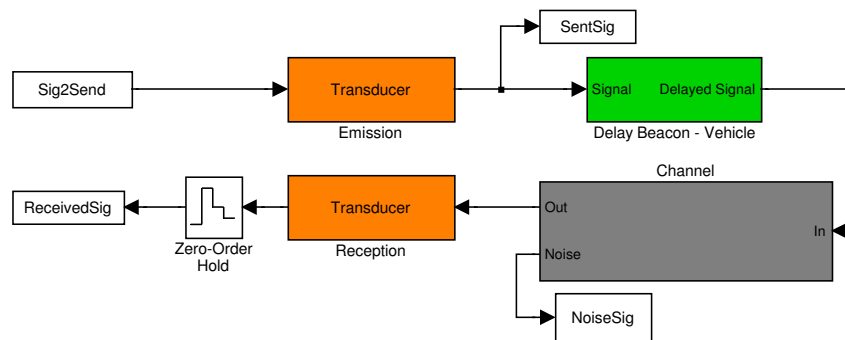


Figura J.1 - Modelo em *Simulink* para simulação das técnicas de processamento de sinal para 1 emissor e 1 receptor

Os sinais utilizados no envio e recepção dos modelos anteriores são gerados *off-line* (Arquitetura proposta para geração e detecção de sinais SS, no Apêndice B) através do modelo apresentado na Figura J.3(a) sendo obtidos pela multiplicação directa de um pulso sinusoidal por um código *gold* tal como ilustrado na Figura J.3(b).

Para modelar o canal ruidoso e com um trajecto múltiplo utiliza-se o modelo apresentado na Figura J.4 em que se adiciona ao sinal uma réplica sua atrasada no tempo e ruído branco gaussiano.

J.2 Simulador dos sistemas de navegação

Os sistemas de navegação são implementados utilizando uma plataforma comum, apresentada na Figura J.5, que compreende o modelo do veículo, os sensores inerciais, o algoritmo de INS e o filtro de Kalman. Para executar qualquer um dos modelos, deve-se correr em ambiente *MATLAB* o ficheiro "RunINS.m" que também contém comandos de execução de outros ficheiros de configuração dos modelos sendo a sua edição fácil e intuitiva. Alternativamente, executando o ficheiro "OpenMainFiles.m" são mostrados no editor de ficheiros do *MATLAB* todos os ficheiros de configuração dos modelos.

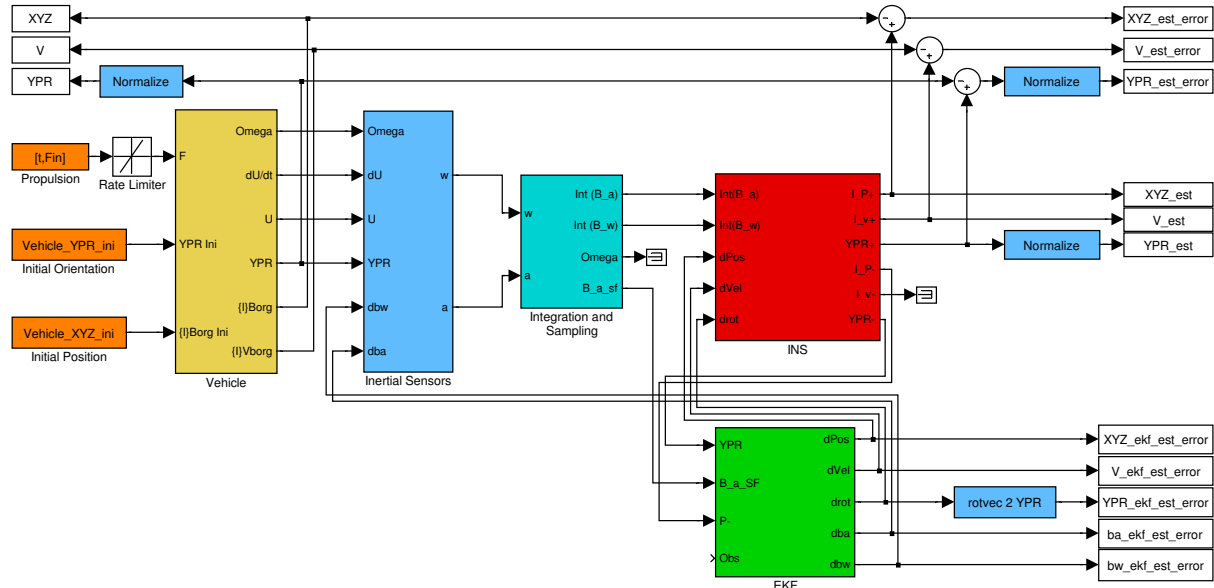


Figura J.5 - Plataforma comum aos dois sistemas de navegação implementados

O veículo é implementado utilizando o modelo em *Simulink* ilustrado na Figura J.6 e corresponde à implementação das equações do modelo matemático do veículo apresentado no Apêndice I.

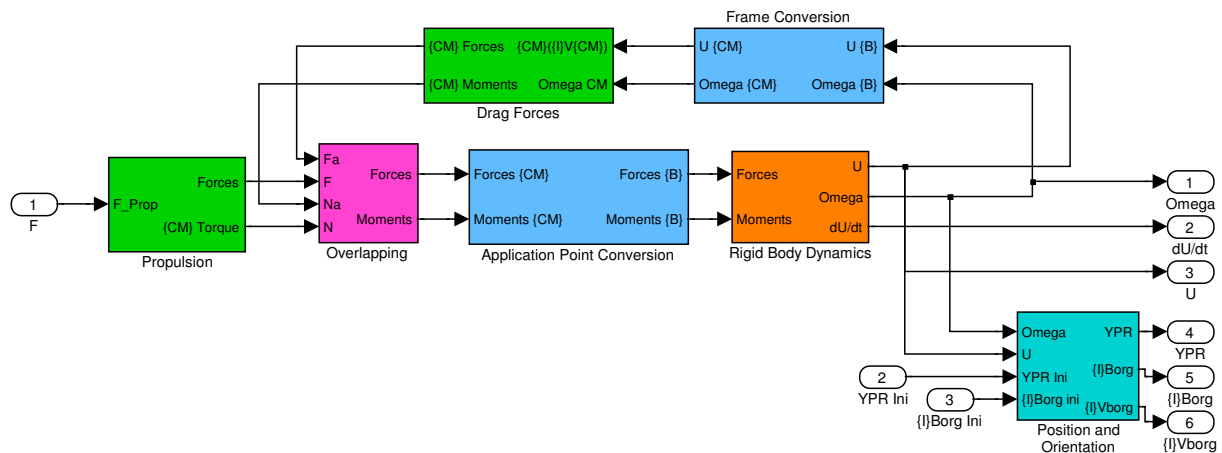


Figura J.6 - Modelo em *Simulink* do veículo

Os modelos em *Simulink* para os sensores inerciais são apresentados na Figura J.7. As medidas dos acelerómetros são geradas com o recurso a uma função que constrói

todas as componentes da aceleração específica do veículo (aceleração linear, aceleração centrípeta e aceleração de gravidade). Como já referido anteriormente no Apêndice I, embora se considere que a força de gravidade é anulada por um propulsor virtual para maior simplicidade no comando do veículo, a medida da aceleração específica contém a componente gravítica pois não está relacionada com a actuação do propulsor virtual. A medida dos giroscópios é mais simples de ser gerada, por medição directa da velocidade de rotação do veículo. Ambas as medidas, dos acelerómetros e dos giroscópios, são afectadas por polarizações e ruído branco gaussiano.

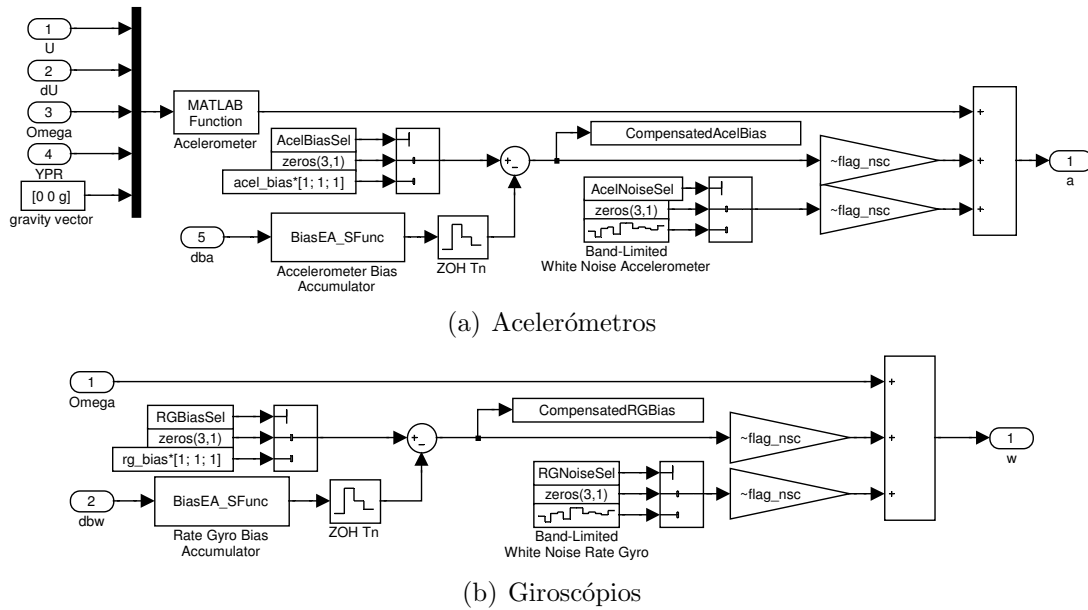


Figura J.7 - Modelo em *Simulink* para os sensores inerciais

O modelo em *Simulink* do algoritmo INS é ilustrado na Figura J.8 sendo possível diferenciar as rotinas de correcção e os algoritmos de cálculo de posição, velocidade e orientação. Estes últimos calculam as estimativas *a priori* de posição, velocidade e orientação com base nos integrais entre instantes de amostragem das medidas dos sensores inerciais. As rotinas de correcção são as últimas a ser executadas, aguardando que sejam fornecidos os valores dos erros de estimação de posição, velocidade e orientação (estimados externamente pelo filtro de Kalman com base nas observações e nas estimativas *a priori* destas).

O filtro de Kalman é implementado recorrendo a uma função que contém as equações de predição e propagação do filtro (funções distintas dependendo do sistema de navegação implementado).

O modelo em *Simulink* do sistema de navegação projectado no espaço das posições relativas é apresentado na Figura J.9.

Na Figura J.10 ilustra-se o modelo em *Simulink* para as observações efectuadas no espaço das posições relativas. As posições relativas dos emissores no referencial do veículo, são calculadas com base no vector de tempos de chegada dos sinais acústicos e são comparadas com as mesmas grandezas estimadas com dados fornecidos pelo INS, formando assim as observações a fornecer ao filtro de Kalman.

As observações do magnetómetro são formadas de forma semelhante, comparando as medidas do vector do campo magnético terrestre, afectadas por ruído aditivo branco gaussiano, com a mesma grandeza estimada com dados fornecidos pelo INS. Na Figura J.11(a)

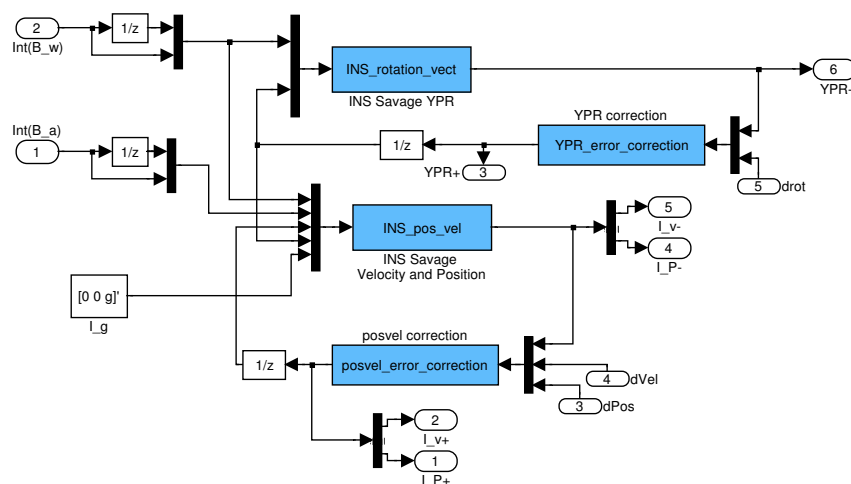


Figura J.8 - Modelo em *Simulink* do INS

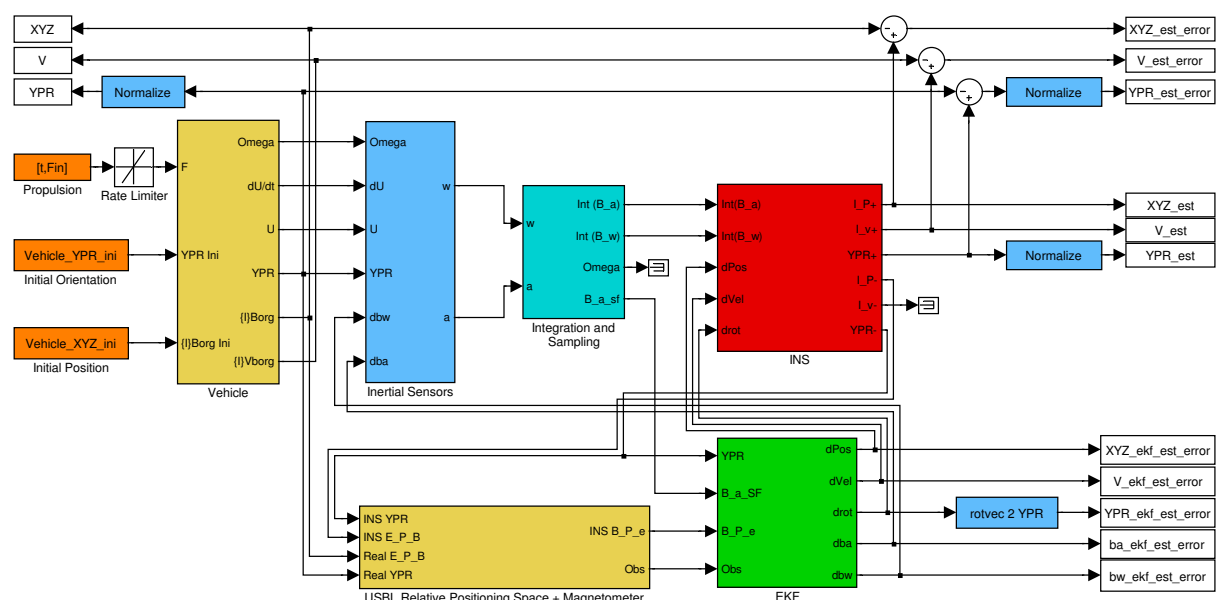
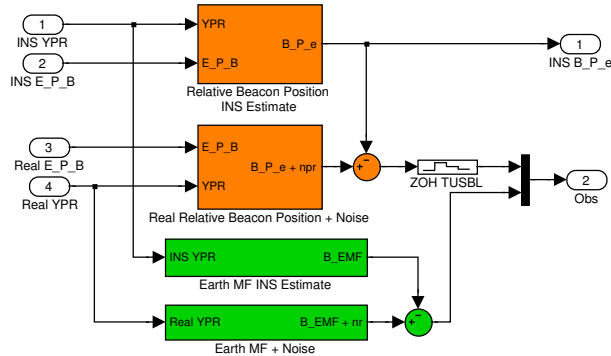


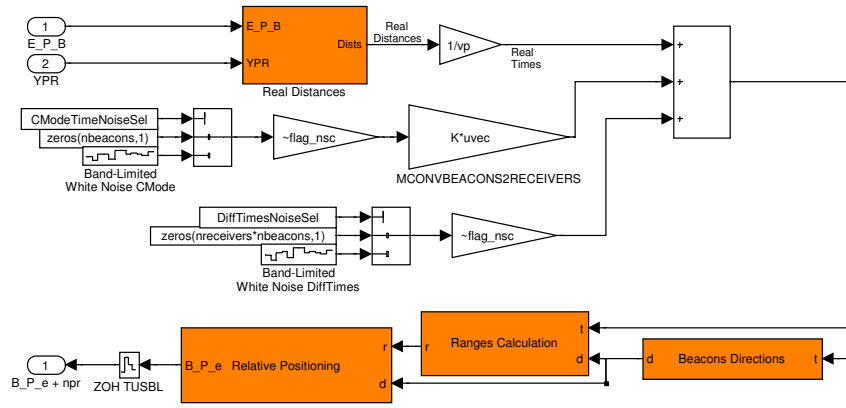
Figura J.9 - Modelo em *Simulink* do sistema de navegação projectado no espaço das posições relativas

ilustra-se o modelo que gera a estimativa do campo magnético terrestre a partir da estimativa de orientação fornecida pelo INS e na Figura J.11(b) o modelo do magnetômetro.

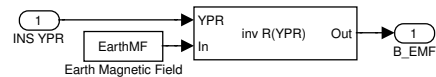
O sistema de navegação projectado no espaço dos sensores é implementado utilizando o modelo em *Simulink* apresentado na Figura J.12. Na Figura J.13 apresenta-se o modelo utilizado para as observações no espaço dos sensores.



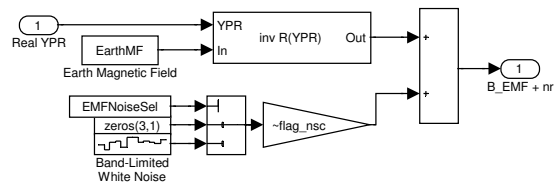
(a) Observações das posições relativas e magnetômetro



(b) Detalhe do cálculo das posições relativas com base no vector de tempos de chegada

Figura J.10 - Modelo em *Simulink* para as observações no espaço das posições relativas

(a) Estimativa do campo magnético terrestre



(b) Medição do campo magnético terrestre - magnetômetro

Figura J.11 - Modelo em *Simulink* para geração da medida e da estimativa do campo magnético terrestre

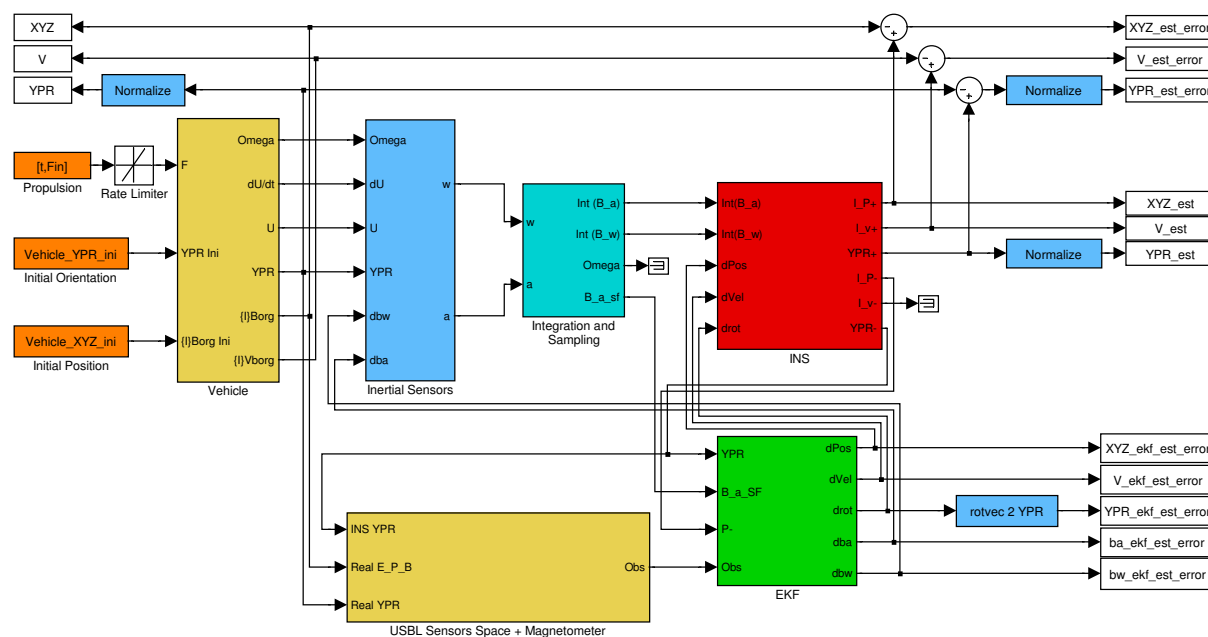


Figura J.12 - Modelo em *Simulink* do sistema de navegação projectado no espaço dos sensores

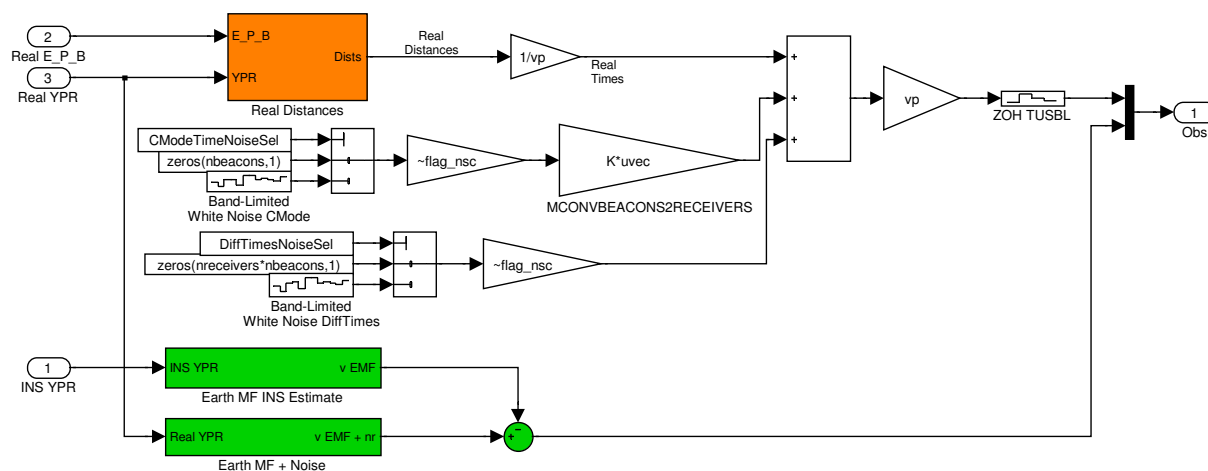


Figura J.13 - Modelo em *Simulink* para as observações no espaço dos sensores

Referências

- [1] P. Batista. Controlo de veículos autónomos baseado na informação directa de sensores acústicos. Relatório de trabalho final de curso, Universidade Técnica de Lisboa - Instituto Superior Técnico, Setembro 2005.
- [2] A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, second edition, 1984.
- [3] J. Calvário and J. Vasconcelos. Estratégias de fusão sensorial para sistemas de navegação com aplicação a helicópteros autónomos. Relatório de trabalho final de curso, Universidade Técnica de Lisboa - Instituto Superior Técnico, Setembro 2003.
- [4] S. Sukkarieh. *Low Cost, High Integrity, Aided Inertial Navigation Systems for Autonomous Land Vehicles*. PhD thesis, The University of Sydney, Março 2000.
- [5] J. Craig. *Introduction to Robotics, Mechanics and Control*. Addison-Wesley, New York, second edition, 1989.
- [6] J.F. Vasconcelos, P. Oliveira, and C. Silvestre. Inertial Navigation System Aided by GPS and Selective Frequency Contents of Vector Measurements. In *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference (GNC2005)*, San Francisco, USA, August 2005. American Institute for Aeronautics and Astronautics.
- [7] P. Savage. Strapdown inertial navigation integration algorithm design part 1: Attitude algorithms. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 21(1):19–28, January-February 1998.
- [8] P. Savage. Strapdown inertial navigation integration algorithm design part 2: Velocity and position algorithms. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 21(2):208–221, March-April 1998.
- [9] K. Britting. *Inertial Navigation Systems Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 1971.
- [10] R.G. Brown and P.Y.C. Hwang. *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. John Wiley & Sons, third edition, 1997.
- [11] W. Rugh. *Linear System Theory*. Prentice-Hall, second edition, 1996.
- [12] iXSea. GAPS portable calibration-free usbl. Página Internet do fabricante, (<http://www.ixsea.com/php/contenu/en/p-gaps.php>).
- [13] S. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Prentice-Hall, first edition, 1993.

- [14] Inc. Paroscientific. Miniature depth sensor model 181kt. Página Internet do fabricante, (<http://www.paroscientific.com/pdf/181KT.pdf>).
- [15] Ltd Applied Microsystems. Sound velocity smart sensor. Página Internet do fabricante, (<http://www.appliedmicrosystems.com/sensors/sound-velocity-of-water.html>).
- [16] A.V. Oppenheim, R.W. Schafer, and J.R. Buck. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice-Hall International, second edition, 1999.
- [17] S. Glisic and B. Vucetic. *Spread Spectrum CDMA Systems for Wireless Communications*. Artech House, Inc., 1997.
- [18] J. Meel. Spread spectrum (SS) introduction, Outubro 1999. De Nayer Instituut, (http://www.sss-mag.com/pdf/Ss_jme_denayer_intro_print.pdf).
- [19] A. Gelb. *Applied Optimal Estimation*. MIT Press, 1974.
- [20] C. Silvestre. Modelação e controlo de veículos submarinos autónomos. Tese de mestrado, Universidade Técnica de Lisboa - Instituto Superior Técnico, 1995.