

Navegação Local/INS para Formações de Veículos Autónomos

Nuno Miguel dos Santos Valverde, Nº 52256

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em **Engenharia Electrotécnica e de Computadores**

Jurí

Presidente: Prof. Francisco Miguel Prazeres da Silva Garcia Orientador: Prof. Carlos Jorge Ferreira Silvestre Co-orientador: Prof. Paulo Jorge Coelho Ramalho Oliveira Vogais: Pedro Manuel Urbano de Almeida Lima

Setembro 2007

It's useless to have wings, if you don't know how to fly.

Agradecimentos

Apesar deste trabalho ter sido realizado pela minha pessoa, ele não poderia ter sido concluído sem o apoio de diversas pessoas.

Em primeiro lugar queria deixar uma palavra de agradecimento aos Professores Carlos Silvestre e Paulo Oliveira pelo desafio que me lançaram e pela confiança dada desde o inicio do trabalho.

Queria também agradecer a todos os meus amigos que me apoiaram na realização deste trabalho e me proporcionaram momentos de alegria e distracção.

Como não poderia deixar de ser queria deixar aqui uma palavra de carinho para com o meu irmão Pedro que me aturou nos momentos mais difíceis e mais complicados. Agradeço-lhe as nossas úteis discussões para a realização deste trabalho. Sem ele nada disto seria possível.

Um agradecimento especial aos meus Pais que sempre me apoiaram até aqui, e me aturaram nos momentos mais difíceis.

Obrigado a todos.

(página intencionalmente deixada em branco)

Resumo

Este relatório aborda o estudo da determinação de uma estimativa da distância entre veículos autónomos constituintes de uma formação. Este trabalho propõe-se estudar diferentes estratégias para o cálculo da distância entre os veículos constituintes da formação com base em sistema de GPS e recorrendo a filtragem de Kalman.

É estudado em algum pormenor o sistema de GPS, nomeadamente o funcionamento do sistema e os erros que afectam este sistema. Com base neste sistema são estudadas, desenvolvidas e implementadas diferentes estratégias para estimativa da distância entre veículos. É apresentada uma estratégia centralizada - que consiste num centro de processamento que processa toda a informação existente – uma estratégia descentralizada – que consiste em obter para cada um dos veículos uma estimativa da sua posição e posteriormente obter uma estimativa da distância entre veículos. Por fim é apresentada uma estratégia que, a partir das posições estimadas dos veículos recorre ao algoritmo Covariance Intersection de modo a tentar melhorar a estimativa obtida pela estratégia descentralizada. O desempenho destas estratégias são ainda comparadas com um algoritmo básico de determinação de posicionamento a partir do sistema de GPS.

Na parte final deste trabalho é ainda apresentado um estudo do desempenho dos algoritmos estudados.

Palavras Chave: GPS, Pseudo-distância, Formações de Veículos, Filtragem de Kalman, *Covariance Intersection, Posterior Cramér-Rao* (página intencionalmente deixada em branco)

Abstract

This report presents the study of computation of the distance between vehicles of a formation. This work proposes to study several strategies in order to determine the distance between the constituent vehicles of a formation aided by a GPS system and using Kalman filtering.

The GPS system is studied in detail. It's also presented the errors that affect the GPS system. Based on this location system, is introduced, developed and implemented several strategies to obtain a estimation of the vehicles distance.

The centralized strategy consists in estimating the distance between vehicles using all the information existing. The decentralized strategy estimates the position of each vehicle and then computes the distance between the vehicles. The last strategy presented consists in trying to improve the estimation of the decentralized strategy using Covariance Intersection algorithm.

These strategies are also compared with an iterative algorithm to determine the position.

At the end, is presented the performance of the studied algorithms.

Keywords: GPS, Pseudo-distance, Vehicle Formation, Kalman Filtering, *Covariance Intersection, Posterior Cramér-Rao* (página intencionalmente deixada em branco)

Índice

Lista de Tabelas	X
Lista de Figuras	xi
1.Introdução	1
2.Global Position System (GPS)	4
2.1 Constituição do sistema GPS	4
2.2 Princípio de funcionamento do GPS	6
2.3 Erros que afectam medições do sistema de GPS	7
2.4 Determinação da pseudo-distância	11
3.Algoritmos de Posicionamento	16
3.1 Algoritmo iterativo	16
3.2 Algoritmo recorrendo a filtragem de Kalman	20
3.1.1 Modelo de estado	20
3.1.2 Modelo não linear	20
3.1.3 Aproximação linear	23
3.1.5 Observações do filtro de Kalman	25
3.1.6 Nota conclusiva	25
4.Covariance Intersection	28
4.1 Covariance Intersection Algorithm	28
4.2 Cálculo analítico do valor de ω	31
5. Estratégias de estimação da distância entre dois veículos de uma formação	34
5.1 Estimação da distância recorrendo à estratégia centralizada	34
5.2 Estimo de Kalman para estrategia centralizada	ככ דר
5.2 Estimação da distancia recorrendo a estrategia descentralizada	37
5.3 Estimação da distância recorrendo a estratégia descentralizada com recurso a <i>CI</i>	30
5.3.1 Filtro de Kalman para estratégia descentralizada com recurso a CI	40
5.3.2 Algoritmo CI para estratégia descentralizada com recurso a CI	40
5.4 Comparação das diferentes estratégias e conclusões	41

6.Avaliação de desempenho do algoritmo estudado	50
6.1 Posterior Cramér-Rao	50
6.1.1 Matriz de covariância de ruído de estado singular	52
6.2 Resultados e Conclusões	54
7.Conclusões e trabalho futuro	59
7.1 Trabalho futuro	60
Referências	62
Apêndice A – Propriedades da variância	65
Apêndice B – Filtro de Kalman Discreto	66
B.1 Filtro de Kalman Discreto	66
B.2 Filtro de Kalman Estendido	69
Apêndice C – Método dos Mínimos Quadrados	73
Apêndice D – Representação gráfica de covariâncias	74
D.1 Diagonalização de matrizes	74
D.2 Calculo dos pontos da elipse de covariância	75
D.3 Código MatLab para representação gráfica da elipse de covariância	76
Apêndice E – Cálculo da matriz de covariâncias das observações	77
Apêndice F – Método iterativo para cálculo da matriz de informação	79

Lista de Tabelas

Tabela 2.1 – Tipos de erro para cada fonte de erro e causas 10
Tabela 2.2 – Erro introduzido na pseudo-distância para cada fonte de erro [Fonte: <i>IAG</i>] 10
Tabela 2.3 – Separação das fontes de erro em modo comum e modo diferencial 11
Tabela 5.1 – Erro quadrático médio obtido em simulação da distância estimada entre veículos para cada uma das estratégias analisadas. É também apresentado o erro quadrático médio obtido no cálculo da distância entre veículos quando é utilizado um receptor de GPS dispondo do algoritmo Iterativo
Tabela 6.1 – Erro Quadrático médio obtido em simulação da distância estimada entre veículos

Lista de Figuras

Figura 2.1 – Fotografia de um satélite NAVSTAR [Fonte: U.S.AirForce]
Figura 2.2 – Comparação entre a duração da órbita de um satélite constituinte do sistema de GPS com o período de rotação da Terra
Figura 2.3 – Localização geográfica da componente de monitorização e controlo [Fonte: NASA]
Figura 2.4 – Conceito bidimensional de trilateração
Figura 2.5 – Conceito tridimensional de trilateração7
Figura 2.6 – Influência dos erros nas pseudo-distâncias
Figura 2.8 Erros de atraso na ionosfera e troposfera [Fonte: Trimble]
Figura 2.8 – Linha do tempo com representação dos referenciais e instantes de tempo de emissão e recepção do sinal
Figura 4.1 – Representação da matriz $\overline{\mathbf{P}}_{zz}$ com covariância $\overline{\mathbf{P}}_{xy}$ conhecida
Figura 4.2 – Representação da matriz $\overline{\mathbf{P}}_{zz}$ com covariância $\overline{\mathbf{P}}_{xy}$ desconhecida, para vários valores de ω
Figura 5.1 – Representação esquemática da estratégia centralizada
Figura 5.2 – Representação esquemática da estratégia descentralizada
Figura 5.3 – Representação esquemática da estratégia descentralizada com recurso a CI 39
Figura 5.4 – Trajectórias reais e estimadas para estratégia centralizada para uma formação de dois veículos, considerando $\sigma_c = 20$ metros e $\sigma_{d_{ij}} = 40$ metros

Figura 5.6 – Distância real e estimada para a estratégia centralizada, estratégia descentralizada e estratégia descentralizada com recurso a CI, considerando $\sigma_c = 20$ metros e $\sigma_{d_{ij}} = 40$ metros.

1.Introdução

Desde sempre o Homem teve curiosidade em explorar e conhecer o seu planeta e o universo que o rodeia. Estes desejos nem sempre puderam/podem ser concretizados. Por um lado existem as exigências económicas que uma actividade destas acarreta. Por outro o medo, dificuldades ou mesmo a impossibilidade do Homem aceder ou cumprir certas missões. Foram surgindo, então, ideias de criar veículos não tripulados que pudessem auxiliar ou mesmo substituir o Homem. Surgiram, assim, os veículos operados remotamente (RCV –Remote Control Vehicle) e, mais tarde, os veículos autónomos (AGV - Automated Guided Vehicles).

Actualmente e cada vez mais, quer os veículos autónomos quer os veículos operados remotamente assumem um papel cada vez mais importante. A necessidade de redução de custos, aumento da eficácia de operação, melhoria dos processos produtivos, impulsiona cada vez mais este tipo de soluções.

A este tipo de veículos são incumbidas missões de vigilância, salvamento, estudo de zonas de difícil acesso ao ser humano, ou mesmo de elevado risco e com condições perigosas. Acções extremamente perigosas e exigentes nos dias de hoje. É desta forma que este tipo de veículos assume cada vez um papel mais importante na sociedade.

Muitas vezes as operações referidas anteriormente são efectuadas por veículos autónomos individuais e "solitários". No entanto, estas acções podem requerer mais que um veículo. Surge, assim, o conceito de formação de veículos autónomos.

Os veículos constituintes de uma formação de veículos autónomos actuam em conjunto e mantendo as posições relativas entre veículos fixas. É necessário ter um conhecimento preciso e rigoroso da posição de cada um dos veículos, pois qualquer falha na estimação da posição pode ser fatal quer para a missão a desempenhar pela formação, quer mesmo para os veículos. Torna-se, então, necessário estudar e desenvolver um conjunto de estratégias que permitam a estimação da posição da formação e/ou a distância entre os veículos da formação.

Neste trabalho é apresentado o estudo da determinação da distância entre veículos constituintes de uma formação recorrendo a filtragem de Kalman e à informação fornecida por um sistema de GPS a bordo de cada um dos veículos constituintes da formação. Deste modo, este documento encontrase estruturado da seguinte forma:

 Capítulo 2: é introduzido e explicado o funcionamento básico de um sistema de GPS. São também apresentados e caracterizados os erros que afectam as medições deste sistema. Na parte final deste capítulo é desenvolvido um modelo para os erros que afectam as medições dos satélites;

- Capítulo 3: são apresentados dois algoritmos de posicionamento. O primeiro algoritmo apresentado trata-se de um algoritmo iterativo que apenas tira partido da informação fornecida pelos satélites, mais precisamente a pseudo-distância, para estimar a distância entre os veículos. O segundo algoritmo estudado usa igualmente as pseudo-distâncias fornecidas pelos satélites e tira partido da filtragem de Kalman para determinação da distância entre veículos. Neste capítulo é igualmente apresentada a dinâmica dos veículos utilizada neste trabalho;
- Capítulo 4: é apresentado o algoritmo de Covariance Intersection. Este algoritmo é utilizado para fazer estimação quando a covariância cruzada entre dados é desconhecida. Este algoritmo é posteriormente utilizado no Capítulo 5, onde se apresentam as estratégias para determinação da distância entre veículos;
- Capítulo 5: são apresentadas as estratégias estudadas. Começa-se por apresentar uma estratégia centralizada, que consiste num modelo de estado único que estima o estado de cada um dos veículos simultaneamente. Apresenta-se de seguida uma estratégia descentralizada que consiste em cada veículo estimar o seu próprio estado e posteriormente calcular a distância entre os veículos. A terceira estratégia apresentada parte da estimativa da estratégia descentralizada e recorrendo ao algoritmo introduzido no Capítulo 4, *Covariance Intersection*, tenta-se melhorar a estimativa obtida a partir da estratégia descentralizada;
- Capítulo 6: é analisada o desempenho das estratégias estudadas, através da comparação dos resultados obtidos para a estratégia centralizada com o algoritmo de *Posterior Cramér-Rao*, que dá indicação da melhor estimativa possível para problemas de filtragem não lineares;
- Capítulo 7: são apresentadas as conclusões gerais do trabalho e passos futuros a desenvolver.

(página intencionalmente deixada em branco)

2. Global Position System (GPS)

O sistema de GPS foi criado originalmente com o intuito de se obter um posicionamento tridimensional preciso de um qualquer veículo/utilizador a qualquer instante e independente das condições atmosféricas.

Neste capítulo pretende-se dar uma breve explicação sobre o sistema de posicionamento global (GPS), a sua constituição, princípios básicos de funcionamento. Refere-se também a que erros as medições dos satélites estão expostos. São, também, apresentados alguns algoritmos de cálculo da posição de um veículo equipado com sistema de GPS ([GoMe06]).

2.1 Constituição do sistema GPS

O sistema de GPS é constituído por três componentes essenciais ([GoMe06]):

- Componente espacial;
- Componente de controlo;
- Componente de utilizador.

A componente espacial é constituída por 24 satélites do tipo NAVSTAR GPS (Figura 2.1) que orbitam, aproximadamente a 20200 km de distância, em torno da terra. Os satélites estão dispostos ao longo de 6 planos inclinados de 55° e igualmente espaçados de 60° de latitude. O período dos satélites em torno da terra é de 12 horas (Figura 2.2).

Esta disposição dos satélites permite uma optimização da cobertura da crosta terrestre, permitindo que qualquer ponto da crosta terrestre esteja visível a, pelo menos, 4 satélites.



Figura 2.1 – Fotografia de um satélite NAVSTAR [Fonte: U.S.AirForce].



Figura 2.2 – Comparação entre a duração da órbita de um satélite constituinte do sistema de GPS com o período de rotação da Terra.

A componente de controlo é constituída por 5 estações de monitorização, dispersas ao longo da terra, e por uma estação de controlo. As estações de monitorização têm como função fazer o seguimento dos satélites, recebendo, em cada instante, a sua posição, velocidade e orientação. Essa informação é, posteriormente, enviada para a estação de controlo principal de modo a verificar e corrigir a trajectória e informação dos satélites. Este método permite um correcto funcionamento do sistema.



Figura 2.3 – Localização geográfica da componente de monitorização e controlo [Fonte: NASA].

A componente de utilizador representa todo o sistema de recepção de um sinal proveniente de um sistema de GPS, tanto a nível de *hardware* como a nível de *software*. Esta componente é capaz ainda de, através dos dados provenientes do satélite, calcular a posição, velocidade ou referências de tempo.

2.2 Princípio de funcionamento do GPS

O intuito do sistema de GPS é determinar o posicionamento de um veículo/utilizador. O posicionamento é representado em coordenadas espaciais em relação a um referencial ortogonal com origem no centro da terra, e que acompanha o seu movimento de rotação. Este referencial é denominado ECEF (Earth - Centered, Earth - Fixed).

Para determinação das coordenadas espaciais do veículo, recorre-se às posições dos satélites, que se assumem que são conhecidas exactamente, e às respectivas distâncias ao veículo, denominadas por pseudo-distâncias e definida pela equação (2.1). Através desta informação e através de um processo de trilateração, é possível determinar as coordenadas do veículo.

$$d_i^* = \sqrt{\left(X_i - x\right)^2 + \left(Y_i - y\right)^2 + \left(Z_i - z\right)^2},$$
(2.1)

onde:

- X_i, Y_i, Z_i definem as coordenadas do satélite i;
- x, y, z definem as coordenadas do veículo.

O conceito de trilateração ([GoMe06]) para duas dimensões, em termos geométricos, é representado pela intersecção de duas circunferências. Cada uma das circunferências apresenta raios definidos pelas pseudo-distâncias definidas anteriormente, e centro nas coordenadas do satélite respectivo. A intersecção destas duas circunferências definidas anteriormente resulta, em geral, em dois pontos possíveis para a posição do veículo. É, deste modo, necessário mais um satélite de forma a determinar univocamente as coordenadas do veículo. Este facto é retratado na Figura 2.4.



Figura 2.4 – Conceito bidimensional de trilateração.

Generalizando o conceito da trilateração para o caso tridimensional, conclui-se que é necessário recorrer a quatro satélites de forma a que as pseudo-distâncias definidas por estes identifiquem,

univocamente, as coordenadas do veiculo. Neste caso, a posição do veículo é identificada pela intersecção de superfícies esféricas.



Figura 2.5 – Conceito tridimensional de trilateração.

Em termos geométricos, a intersecção entre duas superfícies esféricas define uma circunferência. Uma nova intersecção com outra superfície esférica define dois pontos, no entanto, apenas o ponto que estiver mais próximo da superfície terrestre representa as coordenadas do veículo. Assim, assumindo que o sistema de GPS não é afectado por erros, pode-se identificar a posição de um veículo apenas com recurso a três satélites. No entanto, a existência de erros que afectam as pseudo-distâncias dos satélites, torna necessário a existência de um quarto satélite para identificação das coordenadas do veículo, como se explica mais adiante.

2.3 Erros que afectam medições do sistema de GPS

Apesar do excelente sistema de localização que o sistema de GPS constitui, este é sensível a erros de diversas fontes que afectam a precisão e exactidão das medições. Na Figura 2.6 representase medições do sistema de GPS sujeitos a erros de diversas fontes.

Os erros que afectam as medições das distâncias aos satélites têm diversas fontes, entre elas destacam-se os erros associados aos satélites, ao receptor, e ao meio de propagação.



Figura 2.6 – Influência dos erros nas pseudo-distâncias.

As fontes de erro originárias nos satélites têm ordem de grandeza pequena, quando comparados com os outros erros que afectam o sistema de GPS. Os erros originários nos satélites possuem a vantagem de poderem ser controlados. Pode-se tomar como exemplo deste tipo de erros as efemérides dos satélites, que são constantemente controladas e corrigidas, se necessário.

O meio de propagação do sinal de GPS é, também, originário de fontes de erros nas pseudodistâncias obtidas a partir do sistema de GPS. Este tipo de erros é influenciado pelas condições atmosféricas, uma vez que estas alteram a velocidade de propagação do sinal de GPS ([Stei76]). A atmosfera terrestre é constituída por várias camadas, das quais se destacam a troposfera e ionosfera. São estas duas camadas que mais afectam as medições efectuadas pelos satélites. Os erros introduzidos nas medições devido ao efeito da ionosfera variam pouco e lentamente ao longo do tempo e é definido pela densidade de electrões existentes na ionosfera. Os erros introduzidos pela troposfera, camada inferior da atmosfera terrestre, variam com a humidade e provocam atrasos na propagação do sinal. Este efeito sofre uma variação mais rápida do que o efeito introduzido pela ionosfera, sendo por isso mais difíceis de compensar.

O efeito do atraso introduzido na propagação do sinal de GPS é minimizado quando o satélite se encontra na vertical em relação ao plano tangente à superfície terrestre onde se localiza o receptor de GPS, uma vez que a distância a percorrer pelo sinal de GPS é menor. Este tipo de erros afecta, com elevada importância, a precisão das medições do sistema de GPS. No entanto, uma vez que as posições exactas dos satélites são conhecidas e que a posição do veículo é aproximadamente conhecida é possível modelar e compensar este tipo de erros.



Figura 2.8 Erros de atraso na ionosfera e troposfera [Fonte: Trimble].

As fontes de erro associados aos receptores de GPS são a principal razão para a diminuição da precisão das medições. Este tipo de erros tem principal origem nos relógios internos pouco exactos, efeitos de multi-percurso do sinal desde o satélite até ao receptor, limitações físicas dos receptores que introduzem ruído no sinal recebido. Os erros introduzidos pelos relógios internos são a principal fonte de erro, não podendo ser modelados. Os erros introduzidos pela existência de multi-percursos podem ser minimizados recorrendo às características do sinal, tais como baixo espectro de potência.

Na Tabela 2.1 apresenta-se vários tipos de erro inerentes a cada fonte de erro e causas do erro em causa.

Fonte de erro	Tipo de erro	Causa de erro	
	Relógio interno	Deriva do relógio atómico	
	Efemérides	Alterações das trajectórias	
S	Liemendes	previstas dos satélites	
ellite		Sistema implementado para	
até	Selective Availability	degradar performance para	
S		utilizadores civis	
	Geometria dos	Posição relativa dos satélites	
	satélites		
•		Elevada densidade de eléctrões	
de çã	Atraso ionosférico	que influência velocidade de	
os (Iga		propagação	
<i>dei</i> c opa		Temperatura, pressão e humidade	
ud V	Atraso troposterico	alteram velocidade de propagação	
	Relógio interno	Deriva do relógio do receptor	
de		Sinal é recebido em instantes	
S	Multi-percurso	diferentes provocando	
ept 3P		interferência com ele próprio	
çeç		Restrição física que limita a	
ц К	Ruído de receptor	qualidade do sinal recebido	

Tabela 2.1 – Tipos de erro para cada fonte de erro e causas.

O GPS tem, tipicamente, um erro de posição na ordem dos 15 metros. No entanto, cada diferente tipo de erro influência a medição das pseudo-distâncias de forma diferente. Na Tabela 2.2 apresenta-se o erro típico máximo para diversas fontes de erro apresentadas.

Tabela 2.2 – Erro introduzido n	a pseudo-distância para	a cada fonte de erro [Fonte: IAG]
---------------------------------	-------------------------	-----------------------------------

Fonte de erro	Erro máximo [m]
lonosfera	±5
Troposfera	±2.5
Efemérides	±2
Reógio do satélite	±1
Multi-percurso	±0.5
Erros numéricos	±1

Os erros apresentados anteriormente afectam as medições das pseudo-distâncias de cada um dos satélites. No entanto, os erros que influenciam as medições de cada um dos satélites podem estar correlacionados ou não com os erros que afectam cada um dos outros satélites. Pode-se, então, dividir os erros apresentados na Tabela 2.1 em duas classes: erros de modo comum e erros de modo diferencial. Esta separação encontra-se feita na Tabela 2.3.

Fontes de erro			
Modo Comum (Rc)	Modo Diferencial (Ri)		
Ruído do receptor	Deriva dos relógios internos dos satélites		
Atraso ionosférico	Multi-percurso do sinal		
Atraso troposférico	Efemérides		
Deriva do relógio do			
receptor			

Tabela 2.3 – Separação das fontes de erro em modo comum e modo diferencial.

2.4 Determinação da pseudo-distância

A pseudo-distância definida por (2.1), é a distância geométrica entre o veículo equipado com sistema de GPS e um determinado satélite, que passará a ser designada por pseudo-distância ideal. A pseudo-distância ideal, assumindo que a velocidade de propagação do sinal é a velocidade da luz, é dada pela multiplicação da velocidade da luz com a diferença de tempos entre a emissão do sinal pelo GPS e a recepção do sinal no veículo, medidos na mesma referência de tempo:

$$d_i^* = c \left(t_r - \left(t_e \right)_i \right),$$
 (2.2)

onde,

- c é a velocidade da luz em [m/s];
- t_r é o tempo de recepção do sinal no veiculo, em [s];
- (t_e)_i é o tempo de emissão do sinal do satélite i, em [s].

Existem problemas na resolução da equação (2.2) uma vez que são utilizadas duas referências distintas para os tempos de emissão e de recepção do sinal. O tempo de emissão é dado pelo relógio

atómico do satélite que é bastante exacto. No entanto, o tempo de recepção é dado pelo relógio do receptor do veículo que é bastante menos exacto e não está sincronizado com o relógio dos satélites.



Figura 2.8 – Linha do tempo com representação dos referenciais e instantes de tempo de emissão e recepção do sinal

Deste modo, é necessário entrar em conta com o tempo de deriva do relógio do receptor do veículo no tempo de recepção, e do relógio do satélite no tempo de emissão (Figura 2.8). Redefinese, então, a o conceito de pseudo-distância:

$$d_{i} = c \left(\left[t_{r} + b_{ut} \right] - \left[\left(t_{e} \right)_{i} + \left(b_{t} \right)_{i} \right] \right).$$
(2.3)

Recorrendo ao conceito de pseudo-distância ideal, definido em (2.2), obtêm-se (2.4).

$$d_{i} = d_{i}^{*} + c \left(b_{ut} - \left(b_{t} \right)_{i} \right) = d_{i}^{*} + b_{u} - b_{i}, \qquad (2.4)$$

onde:

- *d_i* é a pseudo-distância, em [m];
- *d_i*^{*} é a pseudo-distância ideal definida em (2.2), em [m];
- *b_{ut}* é o tempo de deriva do relógio do receptor do veículo, em [s],
- $(b_t)_i$ é o tempo de deriva do relógio do satélite, em [s];
- *b_u* é a deriva do relógio do receptor do veículo, em [m];
- *b_i* é a deriva do relógio do satélite i, em [m].

Entrando em conta com os erros definidos na Secção 2.3 obtêm-se (2.5), para a pseudodistância.

$$d_{i} = d_{i}^{*} + b_{\mu} - b_{i} + T + I + \varepsilon$$
, (2.5)

onde:

- T é o atraso troposférico, em [m];
- I é o atraso ionosférico, em [m];
- *ε* representa outros efeitos não modelados e o ruído das medições, em [m].

A deriva dos relógios do satélite e do receptor do veículo são constantes ao longo do tempo e não são alteradas. Podem, então, ser definidas por uma constante que pode representar a deriva dos relógios em metros ou em segundos, sendo que a velocidade da luz (c) é a constante de proporcionalidade entre as duas. Uma vez que o termo da deriva do relógio do receptor do veículo é bastante superior à deriva do relógio do satélite, esta pode ser desprezada face à deriva do relógio do receptor do veículo. Introduzindo esta nova incógnita na equação (2.1), obtêm-se (2.6) para as pseudo-distâncias.

$$d_{i} = \sqrt{\left(X_{i} - x\right)^{2} + \left(Y_{i} - y\right)^{2} + \left(Z_{i} - z\right)^{2}} + b_{u}, \qquad (2.6)$$

onde b_{μ} é a deriva do relógio do receptor do veículo, em metros.

Na equação (2.6) é introduzida uma nova incógnita, a deriva do relógio do receptor do veículo, aumentando o número de incógnitas para quatro. Torna-se assim necessário a existência de, no mínimo, quatro satélites de modo a permitir determinar as coordenadas do veículo.

Os erros definidos anteriormente na Secção 2.3, afectam também a medição da pseudodistância. Apesar de alguns dos erros definidos anteriormente poderem ser modelados, como é o exemplo do atraso troposférico, não podem ser modelados na sua totalidade, sendo a medição da pseudo-distância afectada por uma parte do erro que não foi possível modelar na totalidade.

Como definido na Secção 2.3, os erros podem ser divididos em duas classes. Uma em que os erros entre satélites estão correlacionados (Rc), e a outra classe em que os erros entre satélites não são correlacionados (Ri). Pode-se assim introduzir na definição de pseudo-distância o efeito dos erros que não são possíveis modelar e variam aleatoriamente, assumindo-se que variam segundo uma distribuição normal com média nula e com uma determinada variância que se assume conhecida. Define-se, então, a pseudo-distância (2.7).

$$d_{i} = \sqrt{\left(X_{i} - x\right)^{2} + \left(Y_{i} - y\right)^{2} + \left(Z_{i} - z\right)^{2}} + b_{u} + \eta_{c} + \eta_{di}, \qquad (2.7)$$

onde:

- η_c é o ruído de modo comum entre os satélites;
- $\eta_{\scriptscriptstyle di}$ é o ruído de modo diferencial entre os satélites.

A pseudo-distância definida em (2.7) inclui os efeitos da deriva dos relógios, nomeadamente do relógio do receptor, visto ser o que introduz um maior erro nas medições. Engloba, também, outros erros que afectam a medição da distância dos satélites ao veículo e que não podem ser modelados ou corrigidos.

(página intencionalmente deixada em branco)

3.Algoritmos de Posicionamento

Com o uso do sistema de GPS pretende-se obter a posição de um veículo/utilizador, ou seja, pretende-se obter as coordenadas espaciais x_u , y_u e z_u de um veículo/utilizador definidas num sistema global de coordenadas, o ECEF.

Existem inúmeros algoritmos para determinação da posição de um veículo equipado com um sistema de GPS. Os algoritmos de posicionamento podem utilizar como informação somente a pseudo-distância ou a pseudo-distância e a fase da portadora ([GoMe06]). Com recurso aos algoritmos de determinação da posição do veículo utilizando a informação da pseudo-distância e da fase da portadora é possível obter-se resultados de elevada precisão. No entanto, este tipo de algoritmos necessita de resolver o problema da estimativa da ambiguidade inteira da fase ([GoMe06], [BaTs00]), o que necessita de algoritmos com maior nível de complexidade dos que os algoritmos que apenas utilizam informação da pseudo-distância.

Como exemplo de alguns algoritmos de determinação da posição de um veículo equipado com um sistema de GPS, enumeram-se os seguintes: algoritmo iterativo, algoritmo de Bancroft ([Banc85]), GPS diferencial (DGPS), duplas diferenças, método Lambda ([Jong96]). É possível, também, determinar a posição de um veículo com recurso a filtragem de Kalman, recorrendo à informação da pseudo-distância fornecida pelos satélites e à cinemática do veículo.

Neste capítulo apresentam-se dois exemplos de algoritmos de posicionamento absoluto, que consiste em determinar a posição de um veículo equipado com GPS, recorrendo unicamente às observações dos satélites realizadas pelo receptor de GPS. Os algoritmos apresentados são o algoritmo iterativo e o algoritmo recorrendo a filtragem de Kalman.

3.1 Algoritmo iterativo

O algoritmo iterativo enquadra-se no conjunto de algoritmos de posicionamento absoluto, que tal como já referido, consiste em determinar a posição de um veículo com sistema de GPS recorrendo apenas às pseudo-distâncias obtidas a partir das medições realizadas pelos satélites e/ou fase da portadora.

O problema de determinação da posição de um veículo resume-se em determinar, a partir de um sistema de equações, as coordenadas espaciais do veículo. O sistema de equações (3.1) deve, no mínimo, ser constituído por quatro equações de modo a ser possível encontrar uma única solução

para o sistema de equações. Este facto significa o receptor de GPS do veículo deve estar visível, pelo menos, por quatro satélites. Uma vez que o sistema de equações é definido por equações não lineares do tipo de (2.6), é necessário recorrer a um método que torne possível a resolução deste tipo de sistema de equações.

$$\begin{cases} d_{1} = \sqrt{(X_{1} - x)^{2} + (Y_{1} - y)^{2} + (Z_{1} - z)^{2}} + b_{u} \\ d_{2} = \sqrt{(X_{2} - x)^{2} + (Y_{2} - y)^{2} + (Z_{2} - z)^{2}} + b_{u} \\ d_{3} = \sqrt{(X_{3} - x)^{2} + (Y_{3} - y)^{2} + (Z_{3} - z)^{2}} + b_{u} \\ \vdots \\ d_{N} = \sqrt{(X_{N} - x)^{2} + (Y_{N} - y)^{2} + (Z_{N} - z)^{2}} + b_{u} \end{cases}$$
(3.1)

onde o sistema de equações deve, no mínimo, ser constituído por quatro equações, ou seja, N≥4.

Existem várias soluções para resolução do sistema de equações (3.1). Contudo, apresenta-se apenas um algoritmo iterativo que recorre à aproximação em expansão em série de Taylor de primeira ordem de cada equação constituinte do sistema.

Define-se δd_i como sendo o incremento diferencial da pseudo-distância do i-ésimo satélite ((3.2)) que é dado pela expansão em série de Taylor de primeira ordem (3.3).

$$\delta d_{i} = \frac{\partial d_{i}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial d_{i}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial d_{i}}{\partial z} \delta z + \frac{\partial d_{i}}{\partial b_{u}} \delta b_{u} .$$
(3.2)

$$\delta d_{i} = -\frac{(X_{i} - x)\delta x + (Y_{i} - y)\delta y + (Z_{i} - z)\delta z}{\sqrt{(X_{i} - x)^{2} + (Y_{i} - y)^{2} + (Z_{i} - z)^{2}}} + \delta b_{u}, \qquad (3.3)$$

onde δx , δy , δz e δb_u são os incrementos diferenciais de x, y, z e b_u .

Reescrevendo o sistema (3.1) linearizado, obtém-se (3.4).

$$\begin{cases} \delta d_{1} = -\frac{(X_{1} - x)\delta x + (Y_{1} - y)\delta y + (Z_{1} - z)\delta z}{\sqrt{(X_{1} - x)^{2} + (Y_{1} - y)^{2} + (Z_{1} - z)^{2}}} + \delta b_{u} \\ \delta d_{2} = -\frac{(X_{2} - x)\delta x + (Y_{2} - y)\delta y + (Z_{2} - z)\delta z}{\sqrt{(X_{2} - x)^{2} + (Y_{2} - y)^{2} + (Z_{2} - z)^{2}}} + \delta b_{u} \\ \delta d_{3} = -\frac{(X_{3} - x)\delta x + (Y_{3} - y)\delta y + (Z_{3} - z)\delta z}{\sqrt{(X_{3} - x)^{2} + (Y_{3} - y)^{2} + (Z_{3} - z)^{2}}} + \delta b_{u} \\ \vdots \\ \delta d_{N} = -\frac{(X_{N} - x)\delta x + (Y_{N} - y)\delta y + (Z_{N} - z)\delta z}{\sqrt{(X_{N} - x)^{2} + (Y_{N} - y)^{2} + (Z_{N} - z)^{2}}} + \delta b_{u} \end{cases}$$
(3.4)

Escrevendo o sistema (3.4) em forma matricial obtém-se (3.5).

$$\delta d = \alpha . \delta c \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \delta d_1 \\ \delta d_2 \\ \delta d_3 \\ \vdots \\ \delta d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \alpha_{N3} & \alpha_{N4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta b_u \end{bmatrix},$$
(3.5)

onde:

$$\alpha_{j1} = -\frac{(X_j - x)}{\sqrt{(X_j - x)^2 + (Y_j - y)^2 + (Z_j - z)^2}},$$
(3.6)

$$\alpha_{j2} = -\frac{(Y_j - y)}{\sqrt{(X_j - x)^2 + (Y_j - y)^2 + (Z_j - z)^2}},$$
(3.7)

$$\alpha_{j3} = -\frac{(Z_j - z)}{\sqrt{(X_j - x)^2 + (Y_j - y)^2 + (Z_j - z)^2}}.$$
(3.8)

De forma a determinar as coordenadas do veículo equipado com GPS recorre-se ao método iterativo que se descreve de seguida:

- 1. Escolhe-se uma estimativa inicial para as coordenadas do receptor do veículo (x, y, z) e para a deriva do relógio (b_u);
- 2. Calcula-se a pseudo-distância com base nos valores estimados (x , y , z , b_u);
- 3. Calcula-se a diferença entre a pseudo-distância observada e a estimada;
- 4. Calcula-se a matriz α definida em (3.5);
- 5. Recorrendo à equação (3.9) resultando do método dos mínimos quadrados (Apêndice C), determina-se os valores δx , δy , δz e δb_u .

$$\delta c = \left[\alpha^T . \alpha\right]^{-1} \alpha^T . \delta d ; \qquad (3.9)$$

- 6. Calcula-se a nova estimativa de x, y, z, b_u somando δx , δy , δz e δb_u à estimativa anterior.
- 7. Com base nos valores δx , δy , $\delta z \in \delta b_u$ calculados no ponto 5, calcula-se δv através da expressão (3.10).

$$\delta v = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 + \delta b_u^2}; \qquad (3.10)$$

8. Verifica-se se o valor de δv é inferior a um determinado erro $\varepsilon_{\delta v}$ especificado. Se for, termina aqui o processo. Caso contrário, retorna-se ao ponto 2.

A convergência do algoritmo iterativo depende fortemente da escolha da estimativa inicial. Para posicionamento perto da superfície terrestre este problema pode ser facilmente ultrapassado, conhecendo a localização aproximada.

3.2 Algoritmo recorrendo a filtragem de Kalman

A determinação das coordenadas de um veículo utilizando um sistema de GPS pode, também, ser determinada recorrendo a filtragem de Kalman ([BrHw97]). Pretende-se com esta abordagem obter uma melhor estimativa das coordenadas do veículo, uma vez que se utiliza maior quantidade de informação para obtenção da estimativa, nomeadamente as pseudo-distâncias obtidas a partir de cada um dos satélites e as variâncias dos erros que afectam estas.

De seguida apresenta-se o algoritmo de Kalman para o sistema de GPS.

3.1.1 Modelo de estado

A forma mais comum de descrição de grandezas que evoluem ao longo do tempo é através de espaço de estados. Nesta descrição o estado do sistema é representado por uma função vectorial, cuja dimensão é pelo menos igual ao número de grandezas a relacionar e dependente do tempo. No entanto, há duas abordagens distintas, dependendo da forma como é representada a evolução temporal. Se esta evoluir de uma forma contínua obtemos modelos em tempo contínuo; se o tempo variar de forma discreta obtemos modelos em tempo discreto.

Primeiramente define-se o modelo de estado em tempo contínuo do veículo procedendo, de seguida, à sua discretização.

3.1.2 Modelo não linear

Para caracterizar a posição de cada veículo consideram-se as seguintes variáveis de estado:

- *ψ* ângulo entre o referencial do corpo e o referência inercial;
- *p_x* posição do veículo no referencial inercial segundo a coordenada x;
- p_y posição do veículo no referencial inercial segundo a coordenada y;
- ω velocidade angular do veículo;
- *V* velocidade do veículo no referencial inercial.

É ainda adicionada uma variável de estado auxiliar, b_u , que representa a deriva do relógio do receptor de GPS do veículo em relação ao relógio dos satélites, medida em metros.

Tendo em conta as variáveis de estado referidas acima, define-se o modelo (3.11) que permite descrever a trajectória do veículo em tempo contínuo:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= \omega(t) \\ \dot{p}_x(t) &= V(t) \cos(\psi(t)) \\ \dot{p}_y(t) &= V(t) \sin(\psi(t)) \\ \dot{\omega}(t) &= 0 \\ \dot{V}(t) &= 0 \\ \dot{b}_u &= 0 \end{aligned}$$

$$(3.11)$$

Assume-se que não existe nenhuma entrada a afectar directamente a posição, portanto a velocidade linear e velocidade angular são constantes. No entanto, pode-se estender o modelo (3.11) de forma a permitir a variação nas variáveis de estado que caracterizam a trajectória. Deste modo, definem-se $\xi_{\nu}(t)$ e $\xi_{w}(t)$ como sendo entradas aleatórias que caracterizam as variações da velocidade linear e velocidade angular, respectivamente ([Alv04]). Define-se, então, o modelo (3.12) para descrever a trajectória do veículo ao longo do tempo.

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = \omega(t) \\ \dot{p}_{x}(t) = V(t)\cos(\psi(t)) \\ \dot{p}_{y}(t) = V(t)\sin(\psi(t)) \\ \dot{\omega}(t) = \xi_{w}(t) \\ \dot{V}(t) = \xi_{v}(t) \\ \dot{b}_{u} = 0 \end{cases}$$

$$(3.12)$$

Discretizando o sistema de equações determinísticas (3.11), obtém-se o sistema de equações discreto (3.13),

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = \omega(t) \\ \dot{p}_{x}(t) = V(t)\cos(\psi(t)) \\ \dot{p}_{y}(t) = V(t)\sin(\psi(t)) \\ \dot{\omega}(t) = 0 \\ \dot{\psi}(t) = 0 \\ \dot{b}_{u} = 0 \end{cases} \approx \begin{cases} \psi(t+h) = \psi(t) + h\omega(t) \\ p_{x}(t+h) = p_{x}(t) + V(t)\cos(\psi(t)).h \\ p_{y}(t+h) = p_{y}(t) + V(t)\sin(\psi(t)).h \\ \omega(t+h) = \omega(t) \\ V(t+h) = V(t) \\ b_{u}(t+h) = b_{u}(t) \end{cases}$$
(3.13)

onde h é o intervalo de amostragem.

Segundo [Alv04], para se concentrar a acção do ruído em instantes de tempo discretos, a covariância associada deverá depender linearmente da largura do intervalo de amostragem e portanto, o ruído associado deverá ser proporcional à raiz do intervalo de amostragem (\sqrt{h}). É possível, desta forma, obter o sistema de equações estocásticas (3.14) que representa a evolução das variáveis de estado ao longo do tempo discreto.

$$\begin{cases} \psi(t+h) = \psi(t) + h\omega(t) \\ p_x(t+h) = p_x(t) + V(t)\cos(\psi(t)).h \\ p_y(t+h) = p_y(t) + V(t)\sin(\psi(t)).h \\ \omega(t+h) = \omega(t) + \sqrt{h}\xi_{\omega}(t) \\ V(t+h) = V(t) + \sqrt{h}\xi_{\nu}(t) \\ b_u(t+h) = b_u(t) \end{cases}$$
(3.14)

Escrevendo o sistema de equações estocásticas (3.14) na forma de modelo de estado, obtém-se (3.15).

$$\mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\varphi} \left(\mathbf{x}_{k}, k \right) + \mathbf{G} \boldsymbol{\xi}_{k} , \qquad (3.15)$$

onde:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} \psi_{k+1} & (p_x)_{k+1} & (p_y)_{k+1} & \omega_{k+1} & V_{k+1} & b_{u_{k+1}} \end{bmatrix}^T;$$
(3.16)

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_{k},k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cos(\psi_{k})h & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \sin(\psi_{k})h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$
(3.17)

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{h} & 0 \end{bmatrix} ;$$
(3.18)

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{w} \\ \boldsymbol{\xi}_{v} \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

3.1.3 Aproximação linear

Uma vez que o modelo obtido para o veículo é não linear, é necessário proceder à sua linearização ([BrHw97]). Deste modo, calcula-se o Jacobiano de $\varphi(\mathbf{x}_k, k)$ em ordem às variáveis de estado:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_{k},k) = \frac{\partial \mathbf{\varphi}(\mathbf{x}_{k},k)}{\partial \mathbf{x}_{k}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ -V_{k} sen(\psi_{k})h & 1 & 0 & 0 & \cos(\psi_{k})h & 0 \\ V_{k} \cos(\psi_{k})h & 0 & 1 & 0 & \sin(\psi_{k})h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
 (3.20)

3.1.4 Matriz de covariância do estado

Segundo [BrHw97], a matriz de covariância do ruído de estado é dada por (3.21).
onde:

- $\sigma_{\omega}^{2} = E\left\{\xi_{\omega}\xi_{\omega}^{T}\right\}$, é a variância da entrada aleatória ξ_{ω} ;
- $\sigma_v^2 = E\{\xi_v \xi_v^T\}$, é a variância da entrada aleatória ξ_v ;
- h é o intervalo de amostragem.

3.1.5 Observações do filtro de Kalman

Cada um dos veículos constituintes da formação recebe as distâncias a cada um dos quatro satélites (pseudo-distâncias) existentes:

$$\begin{cases} d_{1i} = \sqrt{(X_1 - x_i)^2 + (Y_1 - y_i)^2 + (Z_1 - z_i)^2} + b_u + \eta_c + \eta_{d1i} \\ d_{2i} = \sqrt{(X_2 - x_i)^2 + (Y_2 - y_i)^2 + (Z_2 - z_i)^2} + b_u + \eta_c + \eta_{d2i} \\ d_{3i} = \sqrt{(X_3 - x_i)^2 + (Y_3 - y_i)^2 + (Z_3 - z_i)^2} + b_u + \eta_c + \eta_{d3i} \\ d_{4i} = \sqrt{(X_4 - x_i)^2 + (Y_4 - y_i)^2 + (Z_4 - z_i)^2} + b_u + \eta_c + \eta_{d4i} \end{cases}$$
(3.22)

Uma vez que (3.22) são equações não lineares, é necessário proceder à sua linearização ([BrHw97]) de modo a relacioná-las com as variáveis de estado utilizadas (Apêndice B):

$$\frac{\partial h(x_k,k)}{\partial x_k} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial d_{1i}}{\partial x} & \frac{\partial d_{1i}}{\partial y} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\partial d_{2i}}{\partial x} & \frac{\partial d_{2i}}{\partial y} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\partial d_{3i}}{\partial x} & \frac{\partial d_{3i}}{\partial y} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\partial d_{4i}}{\partial x} & \frac{\partial d_{4i}}{\partial y} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
(3.23)

onde:

•
$$\frac{\partial d_{ji}}{\partial x} = -\frac{\left(X_j - x\right)}{\sqrt{\left(X_j - x\right)^2 + \left(Y_j - y\right)^2 + \left(Z_j - z\right)^2}}, \text{ sendo j cada um dos satélites;}$$

•
$$\frac{\partial d_{ji}}{\partial y} = -\frac{\left(Y_j - y\right)}{\sqrt{\left(X_j - x\right)^2 + \left(Y_j - y\right)^2 + \left(Z_j - z\right)^2}}, \text{ sendo j cada um dos satélites;}$$

A matriz de covariâncias associada ao ruído das observações é dada por (3.24).

$$\mathbf{R}_{ki} = E\left\{\mathbf{\eta}_{i}\mathbf{\eta}_{i}^{T}\right\} = \begin{bmatrix} \sigma_{d1i}^{2} + \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} \\ \sigma_{c}^{2} & \sigma_{d2i}^{2} + \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} \\ \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{d3i}^{2} + \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} \\ \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{d4i}^{2} + \sigma_{c}^{2} \end{bmatrix},$$
(3.24)
$$c_{c} + \eta_{d1i} \left(\eta_{c} + \eta_{d2i}\right) \quad \left(\eta_{c} + \eta_{d3i}\right) \quad \left(\eta_{c} + \eta_{d4i}\right)^{T}.$$

onde $\mathbf{\eta}_i = \left[\left(\eta_c \right) \right]$ $(+\eta_{d1i})$ $(\eta_c + \eta_{d2i})$ $(\eta_c + \eta_{d3i})$ $(\eta_c + \eta_{d4i})$

3.1.6 Nota conclusiva

Em suma pode-se construir um filtro de Kalman para determinação da posição de um veículo recorrendo às pseudo-distâncias fornecidas pelos satélites. Para tal, considera-se o sistema de equações discretas definido em (3.14). É possível, através do sistema (3.14), definir o modelo de estado (3.15), que tem a matriz de covariância (3.21) associada.

As observações do filtro de Kalman são dadas pelas pseudo-distâncias. Estas são relacionadas com o vector de estado através da matriz (3.23). A matriz de covariância associada às observações é dada por (3.24).

(página intencionalmente deixada em branco)

4.Covariance Intersection

Quando se pretende obter uma estimativa de uma determinada variável a partir de duas medições descorrelacionadas, pode-se efectuar uma combinação linear de variáveis cujos ganhos óptimos são dados pelo ganho de Kalman (*Kalman Gain*), tal como definido no filtro de Kalman [BrHw97]. Quando a covariância entre variáveis é desconhecida, e assumindo-a como sendo zero pode-se obter ainda estimativas satisfatórias para várias aplicações. No entanto, em muitos casos assumir independência entre variáveis pode levar a sérios problemas.

O algoritmo de *Covariance Intersection* surgiu da necessidade de estimar variáveis com covariância desconhecida. Este algoritmo permite obter uma estimação de variáveis a partir de medidas com covariância desconhecida, mantendo a consistência da estimativa. A consistência da estimativa é definida como um limite superior da covariância estimada, em relação à covariância real ((4.1)) ([PaCR01], [LiPR02]).

$$\mathbf{P}_{zz} - \mathbf{P}_{zz} \ge \mathbf{0} \ . \tag{4.1}$$

4.1 Covariance Intersection Algorithm

Defina-se X e Y como duas variáveis aleatórias, cujas médias e variâncias são dadas por:

$$E\left\{\mathbf{X}\right\} = \overline{\mathbf{x}}, \qquad (4.2)$$

$$E\left\{\mathbf{Y}\right\} = \overline{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{x}} , \qquad (4.3)$$

$$E\left\{\mathbf{X}.\mathbf{X}^{T}\right\} = \overline{\mathbf{P}}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}, \qquad (4.4)$$

$$E\left\{\mathbf{Y}.\mathbf{Y}^{T}\right\} = \overline{\mathbf{P}}_{\mathbf{y}\mathbf{y}},\tag{4.5}$$

$$E\left\{\mathbf{X}.\mathbf{Y}^{T}\right\} = \overline{\mathbf{P}}_{\mathbf{x}\mathbf{y}}.$$
(4.6)

Seja \hat{z} uma combinação linear de x e y, tal que:

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{W}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{W}_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{y} , \qquad (4.7)$$

onde:

- x e y podem representar tanto uma estimativa prévia de x̄ com uma determinada covariância ou uma medida com uma determinada incerteza,
- $\mathbf{W}_{\mathbf{x}} \in \mathbf{W}_{\mathbf{y}}$ são tais que $\mathbf{W}_{\mathbf{x}} + \mathbf{W}_{\mathbf{y}} = \mathbf{I}$.

O valor médio de \hat{z} será dado por (4.8), e a sua matriz de covariância será dada por (4.9).

$$E\left\{\hat{\mathbf{z}}\right\} = \overline{\mathbf{z}} = \mathbf{W}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{W}_{\mathbf{y}} \cdot \overline{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{x}} .$$
(4.8)

$$\overline{\mathbf{P}}_{zz} = \mathbf{W}_{x} \cdot \overline{\mathbf{P}}_{xx} \cdot \mathbf{W}_{x}^{T} + \mathbf{W}_{x} \cdot \overline{\mathbf{P}}_{xy} \cdot \mathbf{W}_{y}^{T} + \mathbf{W}_{y} \cdot \overline{\mathbf{P}}_{yx} \cdot \mathbf{W}_{x}^{T} + \mathbf{W}_{y} \cdot \overline{\mathbf{P}}_{yy} \cdot \mathbf{W}_{y}^{T}.$$
(4.9)

Se a matriz de covariância \overline{P}_{xy} for conhecida, então a estimativa de máxima verosimilhança minimiza o traço de \overline{P}_{zz} [LiPR02]. A elipse de covariância de \overline{P}_{zz} , calculada por este método, está dentro da intersecção das elipse das covariâncias de \overline{P}_{xx} e \overline{P}_{yy} , para todos os valores possíveis de \overline{P}_{xy} (Figura 4.1) [LiPR02]. No entanto, se a matriz de covariância \overline{P}_{xy} não for conhecida, este método não pode ser aplicado.



Figura 4.1 – Representação da matriz $\overline{\mathbf{P}}_{zz}$ com covariância $\overline{\mathbf{P}}_{xy}$ conhecida.

O método de *Covariance Intersection* permite obter uma estimativa (\hat{z}) e uma matriz de covariância (\overline{P}_{zz}) cuja elipse inclui a área de intersecção das elipse que representam as matrizes de

covariâncias de \overline{P}_{xx} e \overline{P}_{yy} (Figura 4.2). A estimativa é consistente (segundo (4.1)) apesar de não se conhecer a matriz \overline{P}_{xy} .

As equações (4.10) e (4.11) definem o algoritmo de *Covariance Intersection* para duas variáveis ([PaCR01], [LiPR02]).

$$\mathbf{P}_{zz}^{-1} = \omega \cdot \mathbf{P}_{xx}^{-1} + (1 - \omega) \mathbf{P}_{yy}^{-1}, \qquad (4.10)$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{P}_{\mathbf{z}\mathbf{z}} \left(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{x} + (1 - \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^{-1} \cdot \mathbf{y} \right),$$
(4.11)

onde:

- $P_{xx} \in P_{yy}$ são matrizes de covariância, tal que $P_{xx} \ge \overline{P}_{xx}$ e $P_{yy} \ge \overline{P}_{yy}$. $\overline{P}_{xx} \in \overline{P}_{yy}$ são as matrizes de covariância de **x** e **y**, respectivamente.
- *ω* é um parâmetro que varia entre 0 e 1. Este parâmetro é escolhido de forma a optimizar a
 estimativa da covariância de acordo com um determinado critério, por exemplo minimizar o
 traço de P_{zz}.



Figura 4.2 – Representação da matriz $\overline{\mathbf{P}}_{zz}$ com covariância $\overline{\mathbf{P}}_{xy}$ desconhecida, para vários valores de $\boldsymbol{\omega}$.

Generalizando o algoritmo de *Covariance Intersection* para N variáveis obtêm-se as equações (4.12) e (4.13).

$$\mathbf{P}_{zz}^{-1} = \sum_{n=1}^{N} \omega_n \cdot \mathbf{P}_n^{-1}, \qquad (4.12)$$

$$\mathbf{P}_{zz}^{-1} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = \sum_{n=1}^{N} \omega_n \cdot \mathbf{P}_n^{-1} \cdot \hat{\boldsymbol{x}}_n , \qquad (4.13)$$

onde:

• ω_n varia entre 0 e 1, e $\sum_{n=1}^{N} \omega_n = 1$. Este parâmetro é escolhido tal como no caso de N=2, ou seja, de forma a optimizar a estimativa da covariância de acordo com um determinado critério, por exemplo minimizar o traço de \mathbf{P}_{zz} .

4.2 Cálculo analítico do valor de ω

Como já foi referido anteriormente, pretende-se calcular $\omega_1 \in \omega_2$ de forma a minimizar a função (4.14).

$$tr\left(\mathbf{P}_{zz}\right) = tr\left(\left(\omega_{1}\cdot\mathbf{P}_{xx}^{-1} + \omega_{2}\cdot\mathbf{P}_{yy}^{-1}\right)^{-1}\right),\tag{4.14}$$

$$\omega_1 + \omega_2 = 1. \tag{4.15}$$

A minimização desta função apresenta elevado custo computacional. Deste modo, desenvolve-se um algoritmo não iterativo (*fast covariance intersection filtering* [Wolf]) de forma a evitar o pesado custo computacional da minimização da função (4.14).

Para introduzir o algoritmo de *fast covariance intersection filtering* é adicionada uma segunda restrição definida por (4.16).

$$tr(\mathbf{P}_1)\omega_1 - tr(\mathbf{P}_2)\omega_2 = 0.$$
(4.16)

A restrição (4.16) foi escolhida de forma a :

•
$$tr(\mathbf{P}_1) = tr(\mathbf{P}_2) \Longrightarrow \omega_1 = \omega_2$$

- $\frac{tr(\mathbf{P}_1)}{tr(\mathbf{P}_2)} \rightarrow 0 \Longrightarrow \omega_2 \rightarrow 0;$
- $\frac{tr(\mathbf{P}_2)}{tr(\mathbf{P}_1)} \rightarrow 0 \Longrightarrow \omega_1 \rightarrow 0.$

As restrições (4.15) e (4.16) definem o sistema linear (4.17).

$$\begin{bmatrix} tr(\mathbf{P}_1) & -tr(\mathbf{P}_2) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
(4.17)

Sempre que $tr(\mathbf{P}_1) + tr(\mathbf{P}_2) > 0$, o sistema (4.17) apresenta uma única solução dada por (4.18).

$$\omega_{1} = \frac{tr(\mathbf{P}_{2})}{tr(\mathbf{P}_{1}) + tr(\mathbf{P}_{2})}, \omega_{2} = \frac{tr(\mathbf{P}_{1})}{tr(\mathbf{P}_{1}) + tr(\mathbf{P}_{2})}.$$
(4.18)

Generalizando para um número de variáveis superior ou igual a dois (N \geq 2) obtêm-se as restrições (4.19) e (4.20) ([Wolf]).

$$\omega_1 + \ldots + \omega_N = 1, \qquad (4.19)$$

$$tr(P_n)\omega_n - tr(P_m)\omega_m = 0, (n = m + 1, m = 2, ..., N).$$
 (4.20)

A partir das restrições (4.19) e (4.20), define-se o sistema (4.21).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{1} & -\varepsilon_{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_{2} & -\varepsilon_{3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_{N-1} & -\varepsilon_{N} \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1} \\ \omega_{2} \\ \dots \\ \omega_{N-1} \\ \omega_{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
(4.21)

onde $\varepsilon_n \triangleq tr(\mathbf{P_n})$.

A partir do sistema (4.21) é possível determinar, para N variáveis (N \geq 2), o valor das incógnitas do sistema, de forma a minimizar a equação definida em (4.22).

$$tr\left(\mathbf{P}_{zz}\right) = tr\left(\left(\omega_{1}\cdot\mathbf{P}_{1}^{-1} + \ldots + \omega_{N}\cdot\mathbf{P}_{N}^{-1}\right)^{-1}\right).$$
(4.22)

(página intencionalmente deixada em branco)

5. Estratégias de estimação da distância entre dois veículos de uma formação

Neste capítulo pretende-se desenvolver e comparar estratégias para determinação da distância entre dois veículos constituintes de uma formação, com recurso a filtragem de Kalman. É também apresentado o modelo de estado utilizado dos veículos e as observações utilizadas no filtro de Kalman.

A determinação da distância entre dois veículos neste capítulo baseia-se em estratégias centralizadas, descentralizada e descentralizada com recurso ao algoritmo *Covariance Intersection*. Nestas estratégias estudadas, cada um dos veículos recebe as pseudo-distâncias existentes e mais alguma informação adicional dependendo da estratégia utilizada. Com base nesta informação é estimado o seu estado e respectiva distância entre veículos recorrendo a filtragem de Kalman.

5.1 Estimação da distância recorrendo à estratégia centralizada

A estratégia de estimação centralizada consiste num centro de processamento, que pode estar incluída num dos veículos ou uma unidade externa que efectua o processamento dos dados. Essa unidade recebe os dados proveniente de todos os veículos, e através de um único filtro de Kalman estima a distância entre os dois veículos constituintes da formação, assim como o estado de cada um dos veículos (Figura 4.1). Esta estratégia possui a vantagem de utilizar toda a informação disponível, tal como as pseudo-distâncias de cada satélite a cada um dos veículos, a correlação entre ruídos que afectam as observações de cada um dos veículos, assim como a correlação dos ruídos entre veículos. Consegue-se, assim, uma melhor estimativa da distância real entre veículos. No entanto, esta estratégia necessita de trocar muita informação entre os veículos e apresenta matrizes de dimensão elevada (tipicamente, vão existir N variáveis de estado por cada veículo) o que aumenta a complexidade computacional.



Figura 5.1 – Representação esquemática da estratégia centralizada.

5.1.1 Filtro de Kalman para estratégia centralizada

O vector de estado da estratégia centralizada, para estimação da distância entre dois veículos constituintes de uma formação, é definido por (5.1):

$$\mathbf{x}_{\mathbf{k}} = \left[\left(\mathbf{x}_{\mathbf{k}} \right)_{\mathbf{l}}^{T} \quad \left(\mathbf{x}_{\mathbf{k}} \right)_{\mathbf{2}}^{T} \right]^{T}, \qquad (5.1)$$

onde $(\mathbf{x}_k)_i$ são variáveis de estado associadas a cada um dos veículos, definidas em (3.16).

Tendo em conta (5.1), pode escrever-se o modelo de estado (5.2).

$$\mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\varphi}\left(\mathbf{x}_{k}, k\right) + \mathbf{G}\boldsymbol{\xi}_{k} \,. \tag{5.2}$$

A matriz de transição $\varphi(\mathbf{x}_k, k)$ e a matriz G do modelo de estado (5.2), são definidas por (5.3) e por (5.4), respectivamente.

$$\boldsymbol{\varphi}\left(\mathbf{x}_{k},k\right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}\left(\left(\mathbf{x}_{k}\right)_{1},k\right) & 0\\ 0 & \boldsymbol{\varphi}\left(\left(\mathbf{x}_{k}\right)_{2},k\right) \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

onde $\varphi((\mathbf{x}_k)_i, k)$ é a matriz de transição definida em (3.17), associada a cada um dos veículos.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{G}\right)_{1}^{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left(\mathbf{G}\right)_{2}^{T} \end{bmatrix}^{T},$$
(5.4)

onde, $\left(G
ight)_{i}$ é a matriz definida em (3.18), associada a cada um dos veículos.

Procedendo à linearização da matriz (5.3), obtêm-se (5.5).

$$\mathbf{J}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_{\mathbf{k}},k) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_{\mathbf{k}},k)}{\partial \mathbf{x}_{\mathbf{k}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}((\mathbf{x}_{\mathbf{k}})_{1},k)}{\partial (\mathbf{x}_{\mathbf{k}})_{1}} & 0\\ 0 & \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}((\mathbf{x}_{\mathbf{k}})_{2},k)}{\partial (\mathbf{x}_{\mathbf{k}})_{2}} \end{bmatrix},$$
(5.5)

onde $\frac{\partial \varphi((\mathbf{x}_k)_i, k)}{\partial (\mathbf{x}_k)_i}$ é o jacobiano associado a cada um dos veículos e é dado por (3.20).

O vector ξ_k do modelo de estado (5.2) é dado por (5.6) e a matriz de covariância associada é dada por (5.7).

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \left(\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{k}}\right)_{1} & 0\\ 0 & \left(\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{k}}\right)_{2} \end{bmatrix},$$
(5.6)

onde $\left(\xi_k\right)_i$ é o vector de ruídos de estado associada a cada um dos veículos e é dada por (3.19).

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}\right)_{1} & 0\\ 0 & \left(\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}\right)_{2} \end{bmatrix},$$
(5.7)

onde $(\mathbf{Q}_k)_i$ é a matriz de covariância associada ao ruído de estado de cada um dos veículos, definida por (3.21).

A matriz que relacionada o vector de estado com as observações, para a estratégia centralizada, é dada por (5.8).

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}_{k},k)}{\partial x_{k}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h((\mathbf{x}_{k})_{1},k)}{\partial x_{k}} & 0\\ 0 & \frac{\partial h((\mathbf{x}_{k})_{2},k)}{\partial x_{k}} \end{bmatrix},$$
(5.8)

onde $\frac{\partial h((\mathbf{x}_k)_i, k)}{\partial x_k}$ é a matriz que relaciona o vector de estado com as observações de cada um dos

veículos, e é dada por (3.23).

A matriz de covariância associada às observações é dada por (5.9).

$$R_{k} = \begin{bmatrix} \left(R_{k}\right)_{1} & \sigma_{c}^{2} \\ \sigma_{c}^{2} & \left(R_{k}\right)_{2} \end{bmatrix},$$
(5.9)

onde $(R_k)_i$ é a matriz de covariâncias, dada por (3.24), associada ao ruído das observações de cada veículo, e σ_c^2 é a variância do ruído branco comum a todas as observações.

5.2 Estimação da distância recorrendo a estratégia descentralizada

A estratégia descentralizada de estimação da distância entre os veículos constituintes da formação consiste em cada veículo estimar, utilizando filtragem de Kalman, o seu estado localmente e, posteriormente calcular a distância entre os veículos (Figura 4.2). São utilizadas como observações do filtro de Kalman as distâncias de cada satélite a cada um dos veículos, também denominado de pseudo-distâncias.

Esta estratégia apresenta a vantagem necessitar de trocar menos informação do que a estratégia centralizada e da complexidade computacional exigida ao centro de cálculo ser inferior à estratégia apresentada anteriormente. Esta estratégia têm como desvantagem apresentar piores resultados do que a estratégia centralizada.



Figura 5.2 – Representação esquemática da estratégia descentralizada.

5.2.1 Filtro de Kalman para estratégia descentralizada

Como já referido anteriormente, na estratégia descentralizada a estimação do estado de cada veículo é feita localmente, ou seja, cada um dos veículo estima o seu estado independentes da informação dos outros veículos. Deste modo, o modelo de estado e observações do filtro de Kalman encontram-se definidos anteriormente nas Secções 4.1 e 4.2, respectivamente, deste documento. No entanto, apresenta-se um pequeno resumo dos dados a considerar.

O modelo de estado a considerar para cada um dos veículos é dado por (3.15) e a matriz de covariância associada ao ruído de estado é dada por (3.21). A linearização da matriz de transição definida por (3.15) é dada por (3.20).

A matriz que relacionada o vector de estado com as observações é dada por (3.23) e a matriz de covariâncias associada ao ruído das observações é dada por (3.24).

5.3 Estimação da distância recorrendo a estratégia descentralizada com recurso a *CI*

A estratégia descentralizada com recurso a *CI* é baseada no mesmo principio da estratégia descentralizada. Deste modo, cada veículo faz a estimação do seu estado localmente, recorrendo a filtragem de Kalman. Uma vez obtida a posição de cada um dos veículos da formação, a distância entre eles é estimada recorrendo ao algoritmo de *Covariance Intersection* (Capítulo 3) e à trajectória nominal do centro geométrico da formação, que é conhecida.

Esta estratégia é vista como uma tentativa de melhoramento de estimação por parte de uma estratégia descentralizada. Uma vez que a estratégia descentralizada assume que o ruído entre veículos é descorrelacionado, implementa-se o algoritmo de CI, uma vez que a covariância dos ruídos é desconhecida à saída do filtro de Kalman.

Esta estratégia necessita de comunicação de um maior número de dados entre veículos do que a estratégia descentralizada, mas um número inferior de dados do que a estratégia centralizada.



Figura 5.3 – Representação esquemática da estratégia descentralizada com recurso a CI.

5.3.1 Filtro de Kalman para estratégia descentralizada com recurso a CI

A estratégia descentralizada com recurso ao algoritmo de *Covariance Intersection* tem como base a estratégia descentralizada. Deste modo, cada veículo faz a estimação local do seu estado. Este facto permite que o filtro de Kalman seja implementado da mesma forma que na estratégia descentralizada, ou seja, tal como descrito no capítulo 5.4.1.

5.3.2 Algoritmo CI para estratégia descentralizada com recurso a CI

O algoritmo de *Covariance Intersection* é implementado segundo o descrito no capítulo 3 deste documento. Deste modo, são fornecidas estimativas das distâncias entre cada veículo constituinte da formação do veículos, calculadas através de (5.10).

$$\mathbf{d_1} = 2\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{d_2} = 2\left(\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right),$$
 (5.10)

onde:

- x_i e y_i, i=1;2, são as posições de cada um dos veículos;
- x_c e y_c são as posições da trajectória central da formação de veículos.

Como matrizes de covariâncias de entrada do algoritmo CI são dadas as entradas das matrizes de covariância, multiplicadas por quatro, resultantes do filtro de Kalman, correspondentes à posição x e y de cada um dos veículos.

$$E\left\{d_{i}.d_{i}^{T}\right\} = 4.E\left\{\begin{bmatrix}x_{i}\\y_{i}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_{i}&y_{i}\end{bmatrix}\right\} = 4P,$$
(5.11)

onde P é a matriz de covariância que contêm as entradas da matriz de covariância resultante do filtro de Kalman, correspondentes à posição do veículo.

5.4 Comparação das diferentes estratégias e conclusões

Para comparação das diversas estratégias são efectuadas simulações computacionais utilizando o software MatLab/Simulink. As simulações são feitas segundo as mesmas condições, para cada uma das estratégias.

Considera-se que a formação de veículos é constituída por dois veículos. Estes descrevem uma trajectória circular com velocidade linear de 3 m/s no referencial do veículo, e com uma velocidade angular de 0.01 rad/s. A posição inicial dos veículos é x = 0 metros e x = 51 metros. Ambos os veículos iniciam o seu movimento em y = 0 metros.

A trajectória dos veículos é simulada durante 1000 segundos, com um intervalo de amostragem h = 0.1 segundos.

Considera-se ainda que os satélites não alteram a sua posição durante o tempo de simulação.

A covariância do ruído de estado é dada por (5.12) para a estratégia descentralizada e descentralizada com recurso ao algoritmo *Covariance Intersection*, e por (5.13) para a estratégia centralizada.

$$Q = E\left\{\xi_{k}\xi_{k}^{T}\right\} = \begin{bmatrix} 10^{-9} & 0\\ 0 & 10^{-9} \end{bmatrix},$$
(5.12)

onde ξ_k é dado por (3.19);

$$Q_{cent} = E\left\{\xi_k \xi_k^T\right\} = \begin{bmatrix} Q & 0\\ 0 & Q \end{bmatrix},$$
(5.13)

onde ξ_k é dado por (5.6) e Q é dado pela matriz (5.12).

As simulações são feitas para diversos valores dos ruído das observações. O desvio padrão do ruído de modo comum varia entre 0 metros e 90 metros, enquanto que o desvio padrão do ruído de modo diferencial das observações varia entre 1 metros e 40 metros. Têm-se, então, que as matrizes de covariância do ruído das observações são dadas por (5.14) para a estratégia descentralizada e para a estratégia descentralizada com recurso a *CI*, e por (5.15) para a estratégia centralizada.

$$R_{ki} = \begin{bmatrix} \sigma_{d1i}^{2} + \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} \\ \sigma_{c}^{2} & \sigma_{d2i}^{2} + \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} \\ \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{d3i}^{2} + \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} \\ \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{d4i}^{2} + \sigma_{c}^{2} \end{bmatrix},$$
(5.14)

onde:

- σ_{dji}^2 é a variância do ruído branco que afecta a distância do satélite j ao veículo i;
- σ_c² é a variância do ruído branco que afecta a medição de todas as distâncias entre satélites e veículos.

$$R_{k_cent} = \begin{bmatrix} R_k & \sigma_c^2 \\ \sigma_c^2 & R_k \end{bmatrix},$$
(5.15)

onde R_k é a matriz de covariância definida na equação (5.14).

A título de exemplo apresentam-se nas Figuras 5.4 e 5.5 as trajectórias reais e estimadas para a estratégia centralizada e estratégia descentralizada, considerando $\sigma_c = 20$ metros e $\sigma_{d_{ij}} = 40$ metros.

Na Figura 5.6 apresenta-se a distância real e estimada entre os veículos constituintes da formação para as estratégias estudadas, nas condições enunciadas acima.



Figura 5.4 – Trajectórias reais e estimadas para estratégia centralizada para uma formação de dois veículos, considerando $\sigma_c = 20$ metros e $\sigma_{d_{ij}} = 40$ metros.



Figura 5.5 – Trajectórias reais e estimadas para estratégia descentralizada para uma formação de dois veículos, considerando $\sigma_c = 20$ metros e $\sigma_{d_{ij}} = 40$ metros.





Figura 5.6 – Distância real e estimada para a estratégia centralizada, estratégia descentralizada e estratégia descentralizada com recurso a CI, considerando $\sigma_c = 20$ metros e $\sigma_{d_{ij}} = 40$ metros.

De modo a tirar conclusões, é feito, para cada par de variâncias do ruído comum e diferencial, a média do desvio quadrático médio entre a distância estimada e a distância real entre os dois veículos constituintes da formação, resultantes de dez simulações. O resultado deste processo encontra-se representado na Figura 5.7, 5.8 e na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Erro quadrático médio obtido em simulação da distância estimada entre veículos
para cada uma das estratégias analisadas. É também apresentado o erro quadrático médio obtido no
cálculo da distância entre veículos quando é utilizado um receptor de GPS dispondo do algoritmo
Iterativo.

Desvio		Estratégia								
padrão dos ruídos		Centralizada		CI		Descentralizada		Receptor		
Rc	Ri	Var x	Var y	Var x	Var y	Var x	Var y	Var x	Var y	
0	1	0.2413	0.7143	0.2422	0.7188	0.2413	0.7143	92.4172	49.0867	
20	1	0.2413	0.7223	0.2683	0.7612	0.2683	0.7612	92.4172	49.0867	
40	1	0.2413	0.7223	0.2683	0.7612	0.2683	0.7612	92.4172	49.0867	
60	1	0.2414	0.7223	0.2683	0.7612	0.2683	0.7612	92.4172	49.0867	
90	1	0.2414	0.7223	0.2683	0.7612	0.2683	0.7612	92.4172	49.0867	
0	5	3.3948	10.8344	3.3981	10.8699	3.3948	10.8344	2.31E+03	1.23E+03	
20	5	3.3940	11.1776	3.7981	11.9539	3.7996	11.9588	2.31E+03	1.23E+03	
40	5	3.3941	11.1800	3.8042	11.9692	3.8058	11.9741	2.31E+03	1.23E+03	
60	5	3.3941	11.1804	3.8054	11.9721	3.8069	11.9770	2.31E+03	1.23E+03	
90	5	3.3941	11.1806	3.8059	11.9734	3.8075	11.9783	2.31E+03	1.23E+03	
0	10	10.3581	34.4721	10.3599	34.5496	10.3581	34.4721	9.24E+03	4.91E+03	
20	10	10.3596	35.9847	11.4916	38.6103	11.4987	38.6336	9.24E+03	4.91E+03	
40	10	10.3599	36.0273	11.5588	38.8412	11.5659	38.8646	9.24E+03	4.91E+03	
60	10	10.3600	36.0354	11.5722	38.8868	11.5793	38.9103	9.24E+03	4.91E+03	
90	10	10.3600	36.0390	11.5783	38.9074	11.5854	38.9308	9.24E+03	4.91E+03	
0	20	31.3105	107.2276	31.3114	107.4086	31.3105	107.2276	3.70E+04	1.96E+04	
20	20	31.3188	112.7730	34.1710	120.0751	34.1878	120.1370	3.70E+04	1.96E+04	
40	20	31.3209	113.3912	34.8129	122.8315	34.8298	122.8943	3.70E+04	1.96E+04	
60	20	31.3215	113.5203	34.9651	123.4782	34.9821	123.5413	3.70E+04	1.96E+04	
90	20	31.3219	113.5789	35.0374	123.7826	35.0543	123.8458	3.70E+04	1.96E+04	
0	30	60.5286	204.6061	60.5382	204.9198	60.5286	204.6061	8.32E+04	4.42E+04	
20	30	60.5656	214.5605	65.0396	225.2959	65.0595	225.3737	8.32E+04	4.42E+04	
40	30	60.5783	216.9501	67.1206	234.4461	67.1411	234.5261	8.32E+04	4.42E+04	
60	30	60.5820	217.5220	67.7376	237.1239	67.7582	237.2046	8.32E+04	4.42E+04	
90	30	60.5840	217.7917	68.0510	238.4737	68.0718	238.5548	8.32E+04	4.42E+04	
0	40	98.3388	319.2206	98.3670	319.6727	98.3388	319.2206	1.48E+05	7.85E+04	
20	40	98.4598	332.4481	104.2612	344.7814	104.2799	344.8680	1.48E+05	7.85E+04	
40	40	98.5202	337.7373	108.5874	362.6677	108.6067	362.7575	1.48E+05	7.85E+04	
60	40	98.5388	339.2149	110.1945	369.2109	110.2141	369.3020	1.48E+05	7.85E+04	
90	40	98.5490	339.9457	111.0843	372.7993	111.1040	372.8912	1.48E+05	7.85E+04	



Figura 5.7 – Representação gráfica dos erros quadráticos médios da coordenada x, apresentados na Tabela 5.1.



Figura 5.8 – Representação gráfica dos erros quadráticos médios da coordenada y, apresentados na Tabela 5.1.

Analisando a Tabela 5.1 e as Figuras 5.7 e 5.8, pode-se concluir que a estratégia centralizada tira partido da maior quantidade de informação utilizada e apresenta a melhor estimativa da distância entre os veículos para as três estratégias analisadas.

A estratégia descentralizada, ao utilizar menor informação sobre os veículos, obtém uma pior estimativa da distância entre os veículos constituintes da formação, ou seja, o erro quadrático médio da distância estimada é maior do que no caso da estratégia centralizada. Ao aplicar-se o algoritmo *CI* à estimativa da estratégia descentralizada, verifica-se que praticamente não se consegue melhorar a estimativa da distância entre veículos relativamente à estratégia descentralizada.

Comparando o erro quadrático médio, apresentado na Tabela 5.1, das estratégias utilizando filtragem de Kalman (estratégia centralizada, descentralizada e descentralizada com recurso a CI)

com um receptor de GPS utilizando um algoritmo básico de posicionamento absoluto, mais precisamente o algoritmo iterativo, verifica-se que quaisquer dos algoritmos recorrendo à filtragem de Kalman obtém estimativas bastante melhores que o algoritmo iterativo. A pior estimativa do algoritmo de GPS deve-se ao facto deste algoritmo utilizar apenas as pseudo-distâncias para estimar as coordenadas dos veículos. Uma vez que as pseudo-distâncias são pouco precisas, a estimativa da distância entre veículos também o vai ser. Os algoritmos recorrendo a filtragem de Kalman possuem a vantagem de utilizar informação sobre a dinâmica do veículo e ruídos a que as medições estão afectas.

(página intencionalmente deixada em branco)

6.Avaliação de desempenho do algoritmo estudado

Uma das dificuldades de avaliar os resultados obtidos na estimação da distância entre veículos é conhecer a solução óptima e saber o quão longe nos encontramos dela. A ferramenta utilizada para obtenção da melhor solução possível para um problema de estimação não linear e discreta no tempo é conhecida como Posterior Cramér-Rao ([Will06][Thom89][Jame79][Stev93]). Este algoritmo permite conhecer o menor erro quadrático médio possível que se pode obter para um problema de estimação não linear. No entanto, não permite conhecer qual o algoritmo que permite obter essa solução. Por outras palavras, este algoritmo permite obter a matriz de covariância **P** tal que respeite (6.1).

$$\mathbf{C} - \mathbf{P} \ge \mathbf{0} \,, \tag{6.1}$$

onde C é a matriz de covariância obtida a partir de um determinado algoritmo de estimação e ≥ 0 é interpretado como uma matriz semi definida positiva.

6.1 Posterior Cramér-Rao

Considere-se o problema de filtragem não linear (6.2).

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = f_k \left(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k \right) \\ \mathbf{z}_k = h_k \left(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k \right) \end{cases}, \tag{6.2}$$

onde:

- **x**_k é o vector (r x 1) de estado do sistema no instante k;
- z_k é o vector das observações do sistema no instante k;
- w_k e v_k são ruído branco independentes que influenciam o estado e observações no instante k, respectivamente;
- *f_k* e *h_k* são funções não lineares que relacionam o estado no instante k e k+1 e as observações com o vector de estado no instante k, respectivamente.

Assume-se que a densidade de probabilidade do estado inicial, $p(\mathbf{x}_0)$, é conhecida. O sistema definido em (6.2), uma vez conhecida a probabilidade do estado inicial, define univocamente a função

densidade de probabilidade conjunta de $\mathbf{X}_k = (\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k)$ e $\mathbf{Z}_k = (\mathbf{z}_0, \dots, \mathbf{z}_k)$ para qualquer instante k:

$$p(\mathbf{X}_{k}, \mathbf{Z}_{k}) = p(\mathbf{x}_{0}) \prod_{j=1}^{k} p(\mathbf{z}_{j} | \mathbf{x}_{j}) \prod_{i=1}^{k} p(\mathbf{x}_{i+1} | \mathbf{x}_{i}), \qquad (6.3)$$

onde $p(\mathbf{z}_{j} | \mathbf{x}_{j})$ e $p(\mathbf{x}_{i+1} | \mathbf{x}_{i})$ são definidos a partir de (6.2).

Seja $\mathbf{J}(\mathbf{X}_k)$ a matriz de informação de \mathbf{X}_k de dimensão (k.r x k.r) derivada da função densidade de probabilidade definida em (6.3). O problema que se tenciona resolver é calcular a sub matriz de informação de \mathbf{x}_k , denotada de \mathbf{J}_k . Esta matriz é dada pela inversa da sub matriz inferior direita de $\left[\mathbf{J}(\mathbf{X}_k)\right]^{-1}$ de dimensão (r x r). A matriz \mathbf{J}_k^{-1} será o menor erro quadrático da estimativa de \mathbf{x}_k .

É possível obter uma solução recursiva para obtenção da matriz \mathbf{J}_k (Apêndice F), sem necessidade de inverter matrizes de grandes dimensões, o que têm um elevado custo computacional. Deste modo, \mathbf{J}_k segue a equação recursiva (6.4).

$$\mathbf{J}_{k+1} = \mathbf{D}_{k}^{22} - \mathbf{D}_{k}^{21} \left(\mathbf{J}_{k} + \mathbf{D}_{n}^{11} \right)^{-1} \mathbf{D}_{k}^{12}, \qquad (6.4)$$

onde:

$$\mathbf{D}_{k}^{11} = E\left\{-\Delta_{\mathbf{x}_{k}}^{\mathbf{x}_{k}}\log p\left(\mathbf{x}_{k+1} \mid \mathbf{x}_{k}\right)\right\} \quad (\mathbf{r} \times \mathbf{r})$$
(6.5)

$$\mathbf{D}_{k}^{12} = E\left\{-\Delta_{\mathbf{x}_{k}}^{\mathbf{x}_{k+1}}\log p\left(\mathbf{x}_{k+1} \mid \mathbf{x}_{k}\right)\right\} \quad (\mathbf{r} \times \mathbf{r})$$
(6.6)

$$\mathbf{D}_{k}^{12} = E\left\{-\Delta_{\mathbf{x}_{k+1}}^{\mathbf{x}_{k}}\log p\left(\mathbf{x}_{k+1} \mid \mathbf{x}_{k}\right)\right\} = \left[\mathbf{D}_{k}^{21}\right]^{T} \quad (\mathbf{r} \times \mathbf{r})$$
(6.7)

$$\mathbf{D}_{k}^{22} = E\left\{-\Delta_{\mathbf{x}_{k+1}}^{\mathbf{x}_{k+1}}\log p\left(\mathbf{x}_{k+1} \mid \mathbf{x}_{k}\right)\right\} + E\left\{-\Delta_{\mathbf{x}_{k+1}}^{\mathbf{x}_{k+1}}\log p\left(\mathbf{z}_{k+1} \mid \mathbf{x}_{k}\right)\right\} \quad (\mathbf{r} \times \mathbf{r})$$
(6.8)

$$\Delta_{a}^{b} = \nabla_{a} \nabla_{b}^{T}, \text{ sendo } \nabla_{a} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial a_{1}} & \dots & \frac{\partial}{\partial a_{r}} \end{bmatrix}^{T}$$
(6.9)

6.1.1 Matriz de covariância de ruído de estado singular

Quando a matriz de covariância do ruído de estado é singular, a função densidade de probabilidade condicional $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)$ não se encontra definida. De modo a lidar com estes casos considera-se que o vector de estado \mathbf{x}_k é escrito como em (6.10).

$$\mathbf{x}_{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k}^{(1)} \\ \mathbf{x}_{k}^{(2)} \end{bmatrix}, \tag{6.10}$$

onde $\mathbf{x}_{k}^{(j)}$ de dimensão r_{j} , com j=1;2 e $r_{1} + r_{2} = r$.

O filtro passa então a ser definido pelas equações (6.11), (6.12), (6.13).

$$\mathbf{x}_{k+1}^{(1)} = f_k\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k\right),\tag{6.11}$$

$$\mathbf{x}_{k+1}^{(2)} = g_k \left(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}^{(1)} \right), \tag{6.12}$$

$$\mathbf{z}_{k} = h_{k} \left(\mathbf{x}_{k}, \mathbf{v}_{k} \right), \tag{6.13}$$

onde f_k , g_k e h_k são funções não lineares, e a função f_k inclui as variáveis de estado que estão sujeitas a incerteza.

A principal ideia para resolução deste problema é adicionar a (6.12) ruído, obtendo-se (6.14).

$$\mathbf{x}_{k+1}^{(2)} = g_k \left(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}^{(1)} \right) + \mathbf{w}_k^{(2)},$$
(6.14)

onde $\mathbf{w}_k^{(2)}$ é ruído branco com média nula e matriz de covariância $\varepsilon \mathbf{I}$, sendo que $\varepsilon \to 0$.

Seja $p_{\varepsilon}(.)$ e E_{ε} a função densidade probabilidade e o valor esperado do sistema perturbado constituído por (6.11), (6.13) e (6.14). Define-se $p_{\varepsilon}(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)$ pela função (6.15).

$$p_{\varepsilon}\left(\mathbf{x}_{k+1} \mid \mathbf{x}_{k}\right) = p\left(\mathbf{x}_{k+1}^{(1)} \mid \mathbf{x}_{k}\right) p_{\varepsilon}\left(\mathbf{x}_{k+1}^{(2)} \mid \mathbf{x}_{k}, \mathbf{x}_{k+1}^{(1)}\right),$$
(6.15)

onde $p(\mathbf{x}_{k+1}^{(1)} | \mathbf{x}_k)$ é a função densidade de probabilidade determinada a partir de (6.11) e $-\log\left(p_{\varepsilon}\left(\mathbf{x}_{k+1}^{(2)} | \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}^{(1)}\right)\right) = c_1 + \frac{1}{2\varepsilon} \left\|\mathbf{x}_{k+1}^{(2)} - g_k\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}^{(1)}\right)\right\|^2$, sendo c_1 uma constante. Para o novo sistema perturbado, é possível aplicar (6.4) considerando (6.16).

$$\mathbf{D}_{\varepsilon,k}^{ij} = \overline{\mathbf{D}}_{\varepsilon,k}^{ij} + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{K}_{\varepsilon,k}^{ij}, \ i, j = 1; 2,$$
(6.16)

onde $\overline{\mathbf{D}}_{\varepsilon,k}^{ij}$ é dado pelo valor esperado da derivada de segunda ordem de $-\log\left(p\left(\mathbf{x}_{k+1}^{(1)} \mid \mathbf{x}_{k}\right)\right)$ tal como definido em (6.5),(6.6),(6.7) e (6.8). Em (6.8) é ainda necessário considerar o valor esperado da segunda derivada de $-\log\left(p\left(\mathbf{z}_{k+1} \mid \mathbf{x}_{k+1}\right)\right)$. As matrizes $\mathbf{K}_{\varepsilon,k}^{ij}$ são calculadas pelas expressões (6.17), (6.18) e (6.19).

$$\mathbf{K}_{\varepsilon,k}^{11} = E_{\varepsilon} \left\{ \left[\nabla_{x_k} g^T \right] \left[\nabla_{x_k} g^T \right]^T \right\},$$
(6.17)

$$\mathbf{K}_{\varepsilon,k}^{12} = \left[E_{\varepsilon} \left\{ \left[\nabla_{x_{k}} g^{T} \right] \left[\nabla_{x_{k+1}^{(1)}} g^{T} \right]^{T} \right\} \quad E_{\varepsilon} \left\{ \nabla_{x_{k}} g^{T} \right\} \right], \tag{6.18}$$

$$\mathbf{K}_{\varepsilon,k}^{22} = \begin{bmatrix} E_{\varepsilon} \left\{ \begin{bmatrix} \nabla_{x_{k+1}^{(1)}} \mathbf{g}^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{x_{k+1}^{(1)}} \mathbf{g}^{T} \end{bmatrix}^{T} \right\} & -E_{\varepsilon} \left\{ \nabla_{x_{k+1}^{(1)}} \mathbf{g}^{T} \right\} \\ -E_{\varepsilon} \left\{ \nabla_{x_{k+1}^{(1)}} \mathbf{g}^{T} \right\}^{T} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$
(6.19)

É possível mostrar, segundo [Will06], que as equações que resultam para o presente caso singular se simplificam resumindo-se a (6.20).

$$\mathbf{J}_{k+1} = \left(\frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}_{k}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}_{k}} + \left(\mathbf{Q}_{k} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{k}}{\partial \mathbf{x}_{k}} \mathbf{J}_{k}^{-1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{k}}{\partial \mathbf{x}_{k}}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{-1}, \qquad (6.20)$$

onde:

• $\left(\frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}_k}\right)$ é a linearização, segundo a trajectória nominal, da matriz que relaciona o vector de

estado com as observações no instante t_{k+1} , definida em (5.8);

- **R**_{k+1} é a matriz de covariância do ruído das observações do filtro de Kalman no instante t_{k+1}, definida em (5.9);
- Q_k é matriz de covariância do ruído de estado no instante t_k, definida em (5.7);
- $\frac{\partial \phi_k}{\partial x_k}$ é a linearização, segundo a trajectória nominal, da matriz de transição do estado no

instante t_k , definida em (5.5).

6.2 Resultados e Conclusões

Implementou-se o algoritmo acima descrito de forma a obter o limite inferior que é possível obter para o erro quadrático médio das variáveis estimadas no capítulo 5.

As simulações realizadas foram efectuadas para as mesmas condições descritas no capítulo 5.4, de forma a se poder comparar os resultados. O desvio quadrático médio resultante da simulação é apresentado na Tabela 6.1, conjuntamente com o desvio quadrático médio obtido para a estratégia centralizada, apresentado na Tabela 5.1.

Tabela 6.1 – Erro Quadrático médio obtido em simulação da distância estimada entre veículos para a estratégia centralizada e erro quadrático mínimo que é possível obter.

Desvio pa ruí	adrão dos dos	Centra	alizada	Cramer rao Lower Bound		
Rc	Ri	Var x	Var y	Var x	Var y	
0	1	0.2413	0.7143	0.2407	0.7126	
20	1	0.2413	0.7223	0.2407	0.7126	
40	1	0.2413	0.7223	0.2407	0.7126	
60	1	0.2414	0.7223	0.2407	0.7126	
90	1	0.2414	0.7223	0.2407	0.7126	
0	5	3.3948	10.8344	3.2122	10.8234	
20	5	3.3940	11.1776	3.2122	10.8234	
40 5		3.3941	11.1800	3.2122	10.8234	
60	60 5		11.1804	3.2122	10.8234	
90	5	3.3941	11.1806	3.2122	10.8234	
0	10	10.3581	34.4721	10.2420	34.4593	
20	10	10.3596	35.9847	10.2420	34.4593	
40	10	10.3599	36.0273	10.2420	34.4593	
60	10	10.3600	36.0354	10.2420	34.4593	
90	10	10.3600	36.0390	10.2420	34.4593	
0	20	31.3105	107.2276	31.2196	107.1148	
20	20	31.3188	112.7730	31.2196	107.1148	
40	20	31.3209	113.3912	31.2196	107.1148	
60	20	31.3215	113.5203	31.2196	107.1148	
90	20	31.3219	113.5789	31.2196	107.1148	
0	30	60.5286	204.6061	60.5053	204.0347	
20	30	60.5656	214.5605	60.5053	204.0347	
40	30	60.5783	216.9501	60.5053	204.0347	
60	30	60.5820	217.5220	60.5053	204.0347	
90	30	60.5840	217.7917	60.5053	204.0347	
0	40	98.3388	319.2206	97.6040	318.7931	
20	40	98.4598	332.4481	97.6040	318.7931	
40	40	98.5202	337.7373	97.6040	318.7931	
60	40	98.5388	339.2149	97.6040	318.7931	
90	40	98.5490	339.9457	97.6040	318.7931	

Analisando a Tabela 6.1 pode-se constatar que o erro quadrático médio obtido pelo método de Cramér-Rao é inferior ao obtido pelo método centralizado apresentado anteriormente, tal como seria de esperar.



Figura 6.1 – Comparação entre o erro quadrático obtido para a estratégia centralizada e o algoritmo de Posterior Cramér-Rao, para a coordenada x. Os resultados apresentados são para 1 m e 5 m de desvio padrão do ruído descorrelacionado (Ri).



Figura 6.2 – Comparação entre o erro quadrático obtido para a estratégia centralizada e o algoritmo de Posterior Cramér-Rao, para a coordenada y. Os resultados apresentados são para 1 m e 5 m de desvio padrão do ruído descorrelacionado (Ri).

O erro quadrático médio obtido pela estratégia centralizada não se afasta muito da solução óptima. No entanto, à medida que o erro de modo comum aumenta, o erro quadrático médio obtido pela estratégia centralizada tende ligeiramente a afastar-se da solução óptima dada pelo método de Cramér-Rao. Verifica-se, também que, o desvio quadrático médio obtido pelo Cramér-Rao não é influenciado pelo erro de modo comum que afectam as medições das pseudo-distâncias. Este facto indica que, no caso óptimo, se consegue eliminar todo o erro de modo comum presente nas medições.

Da análise da Tabela 6.1 e das Figuras 6.1 e 6.2, pode-se concluir que o desvio quadrático médio da estimação da distância entre veículos é altamente influenciado pela variância do ruído diferencial que afecta as pseudo-distâncias. No entanto, à medida que a variância do ruído de modo comum aumenta, o desvio quadrático médio de estimação praticamente não é influenciado.

Na Figura 6.3 apresenta-se a evolução do erro quadrático durante 2000 segundos obtido através do algoritmo Posterior Cramér-Rao. Os resultados apresentados resultam da simulação para σ_c =20 metros e σ_{d_i} =40 metros. Cada um dos veículos constituintes da formação apresentam velocidade linear de 3 m/s e velocidade angular de 0.01 rad/s.



Figura 6.3 – Representação gráfica da evolução do erro quadrático da distância em x entre os veículos (a vermelho) e em y (a verde), obtido através do posterior Cramér-Rao.

A evolução do erro quadrático, tanto na distância em x como em y, apresenta um carácter periódico com a frequência correspondente ao veiculo dar uma volta completa e retornar à sua posição inicial. Este resultado seria de esperar uma vez que, ao se assumir que os satélites não

alteram a sua posição durante o intervalo de simulação, os veículos ao retomarem a posição inicial vão estar sob as mesmas condições e desta forma a melhor estimativa que se consegue obter vai ser a mesma do período anterior.

Durante o primeiro período a evolução do erro quadrático apresenta um transitório que é tanto maior quanto maior for a incerteza do estado inicial ($p(\mathbf{x}_0)$) da formação de veículos.

(página intencionalmente deixada em branco)

7. Conclusões e trabalho futuro

No presente trabalho apresentou-se o estudo da determinação da distância entre veículos actuando em formação, usando como principal ferramenta de trabalho o algoritmo de filtragem de Kalman.

Assume-se que cada veículo constituinte da formação têm disponível um sistema de GPS que lhe fornece as pseudo-distâncias respectivas.

Na parte inicial do trabalho apresentou-se um estudo sobre o sistema de GPS. Foi estudado o seu funcionamento genérico, assim como foram identificados os erros a que as medições realizadas pelos satélites estão afectas. Foi criado um modelo para os erros apresentados.

Desenvolveram-se, estudaram-se e implementaram-se três diferentes estratégias para determinação da distância entre veículos. Cada uma das estratégias apresentadas utiliza filtragem de Kalman para sistemas não lineares.

Foi apresentada uma estratégia denominada Centralizada que considera no modelo utilizado todos os veículos. Verificou-se que esta estratégia apresenta matrizes de dimensão elevada, o que apresenta um custo computacional elevado. Partiu-se, então, para uma estratégia que considera um modelo independente para cada veículo. Esta estratégia foi denominada de Descentralizada, uma vez que, no modelo utilizado, não considera todos os erros presentes nas medições utilizadas. Verificou-se que a estratégia Descentralizada apresentou resultados piores que a estratégia centralizada.

Com vista a melhorar os resultados da estratégia Descentralizada recorreu-se ao algoritmo *Covariance Intersection*, uma vez que se pretende melhorar a estimativa realizada e se desconhece a variância cruzada do erro entre os resultados obtidos pela estratégia Descentralizada. Esta estratégia foi denominada de Descentralizada com recurso a *CI*. Verificou-se, após implementação deste algoritmo, que os resultados não sofreram melhorias significativas em relação à estratégia Descentralizada.

Na última parte deste trabalho analisou-se o desempenho do algoritmo desenvolvido para a estratégia Centralizada. Para esta análise recorreu-se ao algoritmo *Posterior Camér-Rao* que permite conhecer a variância erro de estimação mínimo que é possível obter para um algoritmo de estimação não linear. Verificou-se que a estratégia Centralizada estudada apresenta resultado próximos da solução óptima. No entanto, à medida que a componente de erro de modo comum aumenta, o resultado da estratégia Centralizada tende a afastar-se da solução óptima.
7.1 Trabalho futuro

Numa perspectiva de continuar o trabalho até aqui desenvolvido, seria interessante estudar estratégias em que apenas alguns dos veículos possuam sistema de GPS, sendo que os restantes veículos possuiriam apenas sensores de posição relativa para um ou mais veículos contíguos da formação. Poder-se-á estudar a melhor forma de optimizar a troca de dados entre os veículos.

Com esta abordagem é possível determinar quer a posição relativa entre veículos, quer a sua posição absoluta.

(página intencionalmente deixada em branco)

Referências

[BrHw97] R.G. Brown, P.Y.C. Hwang. *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. John Wiley & Sons, third edition, 1997.

[Craig89] J. Craig. *Introduction to Robotics, Mechanics and Control*. Addison-Wesley, New York, second edition, 1989.

[Papo84] A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, second edition, 1984.

[Morg06] M. Morgado. Sistema de Navegação Inercial com ajuda USBL. Trabalho Final de Curso, Universidade Técnica de Lisboa – Instituto Superior Técnico, 2006.

[CaVa03] J. Calvário, J. Vasconcelos. Estratégia de Fusão Sensorial para Sistemas de Navegação com Aplicação a Helicópteros Autónomos. Trabalho Final de Curso, Universidade Técnica de Lisboa, 2003.

[GoMe06] A. Gomes, R. Mendes. Técnicas Avançadas para Posicionamento Global Baseadas em GPS. Trabalho Final de Curso, Universidade Técnica de Lisboa, 2006.

[Alv04] P. Alves. Seguimento e Predição de Trajectória de Alvos Móveis em Duas Dimensões.. Tese de Mestrado, Universidade Técnica de Lisboa, 2004.

[Bati05] P. Batista. Controlo de Veículos Autónomos Baseados na Informação Directa de Sensores Acústicos. Trabalho Final de Curso, Universidade Técnica de Lisboa, 2005.

[Wolf] Wolfgang Niehsen. Information Fusion based on Fast Covariance Intersection Filtering.

[PaCR01] Pablo O. Arambel, Constantino Rago, Raman K. Mehra. *Covariance Intersection Algorithm for Distributed Spacecraft State Estimation*. Proceedings of the American Control Conference, Arlington, VA June 25-27, 2001.

[LiPR02] Lingji Chen, Pablo O. Arambel, Raman K. Mehra. *Estimation Under Unknown Correlation: Covariance Intersection Revisited*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 47, NO.11, November 2002. [Will06] William F. Leven. Approximate Crámer-Rao Bounds for Multiple Target Tracking. May 2006

[Jame79] James H. Taylor. *The Crámer-Rao Estimation Error Lower Bound Computation for Deterministic Nonlinear Systems*. IEEE Transaction on Automatic Control, Vol 24, NO. 2, April 1979

[Thom89] Thomas H. Kerr. *Status of CR-Like Lower Bounds for Nonlinear Filtering*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol 25, NO.5, September 1989

[PeCA98] Petr Tichavský, Carlos H. Muravchik, Arye Nehorai. *Posterior Cramér-Rao Bounds for Discrete-Time Nonlinear Filtering*. IEEE Transactions on Signal Processing, Vol 46, NO. 5, May 1998.

[Stev93] Steven M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory.* Prentice Hall, 1993.

[LuMa01] Luís T. Magalhães. Álgebra Linear como Introdução à Matemática Aplicada. 9ª Edição. Texto Editora. 2001

[Stei76] Stein, V., Determination of the ionospheric electron density distribution from time delay measurements of VHF-satellite tracking data, European Space Agency, Paris, France, December 1976.

[Banc85] Bancroft, S., "An algebraic solution of the GPS equations", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics System*, 1985, 21(7), 56-59.

[Jong96] Jonge, P.J., Tiberius, C.C.J.M., "*The LAMBDA method for integer ambiguity estimation: implementation aspects*", in LGR-Series publications of the Delft Geodetic Computing Center, No. 12, 1996.

[BaTs00] Bao, J., Tsui, Y., *Fundamentals of Global Positioning System Receivers*. John Wiley &Sons, Inc., 2000.

[Atki89] K. Atkinson. An Introduction to Numerical Analysis. Wiley & Sons, 1989, 2nd. Edition

(página intencionalmente deixada em branco)

Apêndice A – Propriedades da variância

A variância, também denominada de segundo momento central ou erro quadrático médio ([Papo84]), de uma variável aleatória é definida por (A.1).

$$Var(X) = E\left\{\left(X-\mu\right)^{2}\right\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} p(x)\left[\left(x-\mu\right)\right]^{2},$$
(A.1)

onde:

- p(x) é a função densidade de probabilidade da variável aleatória X;
- μ é o valor esperado da variável aleatória X: $\mu = E\{X\}$.

Identificam-se as seguintes propriedades da variância:

$$Var(X) = E\{(X-\mu)^2\} = E\{X^2 - 2X\mu + \mu^2\} = E\{X^2\} - E\{X\}^2,$$
(A.2)

$$Var(aX+b) = a^{2}Var(X), \qquad (A.3)$$

$$Var(aX+bY) = a^{2}Var(X) + b^{2}Var(Y) + 2abCov(X,Y),$$
(A.4)

$$Var(aX - bY) = a^{2}Var(X) + b^{2}Var(Y) - 2abCov(X,Y), \qquad (A.5)$$

onde:

- X e Y são variáveis aleatórias;
- *a* e *b* são constantes reais;
- Cov(X,Y) representa a covariância entre as variáveis aleatórias X e Y, e é definida por (A.6).

$$Cov(X,Y) = E\left\{ (X - \mu_x)(Y - \mu_y) \right\}$$
(A.6)

Apêndice B – Filtro de Kalman Discreto

B.1 Filtro de Kalman Discreto

O filtro de Kalman consiste num método recursivo para projectar um observador com o intuito de minimizar o erro quadrático médio de estimação [BrHw97].

Considere-se sistema (B.1) em tempo discreto constituído por uma modelação do sistema a estimar e a relação entre a observação e o vector de estado no instante t_k .

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\varphi}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{cases}, \tag{B.1}$$

onde:

- $\mathbf{X}_{\mathbf{k}}$ é o vector (n x 1) das variáveis de estado no instante $t_{\mathbf{k}}$
- φ_k é a matriz de transição (n x n) que relaciona o vector de estado no instante t_k com o vector de estado no instante t_{k+1}
- w_k é o vector (n x 1) de ruído branco, com covariância conhecida, que afecta o vector de estado no instante t_k
- Z_k é o vector (m x 1) de observações no instante t_k
- \mathbf{H}_{k} é a matriz (m x n) que relaciona as observações com o vector de estado no instante t_{k}
- v_k é o vector (m x 1) de ruído branco, com covariância conhecida e descorrelacionada de
 w_k, que afecta as observações no instante t_k

As matrizes de covariância de $\mathbf{w}_{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{v}_{\mathbf{k}}$ de são dadas por (B.2) e (B.3), respectivamente.

$$E\left[\mathbf{w}_{\mathbf{k}}\mathbf{w}_{\mathbf{i}}^{T}\right] = \begin{cases} \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}, & i = k\\ \mathbf{0}, & i \neq k \end{cases}$$
(B.2)

$$E\left[\mathbf{v}_{\mathbf{k}}\mathbf{v}_{\mathbf{i}}^{T}\right] = \begin{cases} \mathbf{R}_{\mathbf{k}}, & i = k\\ \mathbf{0}, & i \neq k \end{cases}$$
(B.3)

$$E\left[\mathbf{w}_{\mathbf{k}}\mathbf{v}_{\mathbf{i}}^{T}\right] = 0 \qquad \forall k, i$$
(B.4)

Assume-se que se tem uma estimativa inicial do processo, no instante t_k , com base em informação anterior ao instante t_k . Esta estimativa denota-se como \hat{x}_k^- e é dada pela relação (A.5).

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^{-} = \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{k}-1} \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}-1} \tag{B.5}$$

Com base em \hat{x}_k^{-} e com a observação z_k^{-} utiliza-se uma relação linear para obter uma melhor estimativa do vector de estado:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^{-} + \mathbf{K}_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{z}_{\mathbf{k}} - \mathbf{H}_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^{-} \right), \tag{B.6}$$

onde $\,K_{\,k}\,$ é o vector de ganhos a calcular.

O erro de estimação é dado por (B.7):

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}} = \mathbf{X}_{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{X}}_{\mathbf{k}} \,, \tag{B.7}$$

e a covariância do erro de estimação é dada por (B.8).

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = E\left[\mathbf{e}_{\mathbf{k}}\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{T}\right] = E\left[\left(\mathbf{x}_{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}\right)\left(\mathbf{x}_{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}\right)^{T}\right].$$
(B.8)

Substituindo (B.1) e (B.6) em (B.8) obtêm-se (B.9).

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = E\left\{ \left[\left(\mathbf{x}_{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}} \right) - \mathbf{K}_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{H}_{\mathbf{k}} \mathbf{x}_{\mathbf{k}} + \mathbf{v}_{\mathbf{k}} - \mathbf{H}_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^{\mathsf{-}} \right) \right] \\ \left[\left(\mathbf{x}_{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}} \right) - \mathbf{K}_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{H}_{\mathbf{k}} \mathbf{x}_{\mathbf{k}} + \mathbf{v}_{\mathbf{k}} - \mathbf{H}_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^{\mathsf{-}} \right) \right]^{T} \right\}^{\mathsf{-}}$$
(B.9)

Rescrevendo (B.9), obtêm-se uma expressão geral válida para quaisquer ganhos

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{\mathbf{k}} \mathbf{H}_{\mathbf{k}}\right) \mathbf{P}_{\mathbf{k}}^{-} \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{\mathbf{k}} \mathbf{H}_{\mathbf{k}}\right)^{T} + \mathbf{K}_{\mathbf{k}} \mathbf{R}_{\mathbf{k}} \mathbf{K}_{\mathbf{k}}^{T}, \qquad (B.10)$$

onde P_k^- é a covariância do erro de estimação à priori definida por (B.11):

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = E\left[\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{T}\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{T}\right] = E\left[\left(\mathbf{x}_{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}\right)\left(\mathbf{x}_{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^{T}\right)^{T}\right].$$
(B.11)

Os ganhos óptimos K_k , que minimizam o erro de estimação, são dados pelo vector que minimiza a soma dos elementos da diagonal (traço) de P_k . Deste modo têm-se que

$$\frac{d(trace\mathbf{P}_{\mathbf{k}})}{d\mathbf{K}_{\mathbf{k}}} = -2(\mathbf{H}_{\mathbf{K}}\mathbf{P}_{\mathbf{k}})^{T} + 2\mathbf{K}_{\mathbf{k}}(\mathbf{H}_{\mathbf{k}}\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^{-}\mathbf{H}_{\mathbf{k}}^{T} + \mathbf{R}_{\mathbf{k}}).$$
(B.12)

Igualando a equação (B.12) a zero e calculando em ordem K_k obtêm-se o vector de ganhos óptimos, também denominado por *Kalman Gain*:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{k}} = \mathbf{P}_{\mathbf{k}}^{-} \mathbf{H}_{\mathbf{k}}^{T} \left(\mathbf{H}_{\mathbf{k}} \mathbf{P}_{\mathbf{k}}^{-} \mathbf{H}_{\mathbf{k}}^{T} + \mathbf{R}_{\mathbf{k}} \right)^{-1}.$$
 (B.13)

Substituindo (B.13) em (B.11) obtêm-se a expressão (B.14) da matriz de covariância válida apenas para ganhos óptimos:

$$\mathbf{P}_{k} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k}\mathbf{H}_{k}\right)\mathbf{P}_{k}^{-}.$$
(B.14)

A matriz de covariância do erro de estimação calculada a priori é definida por (B.15):

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}+1}^{-} = E\left[\mathbf{e}_{\mathbf{k}+1}^{-}\mathbf{e}_{\mathbf{k}+1}^{T}\right] = E\left[\left(\mathbf{\phi}_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^{-}\right)+\mathbf{w}_{\mathbf{k}}\right)\left(\mathbf{\phi}_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^{-}\right)+\mathbf{w}_{\mathbf{k}}\right)^{T}\right] = = \mathbf{\phi}_{\mathbf{k}}\mathbf{P}_{\mathbf{k}}\mathbf{\phi}_{\mathbf{k}}^{T}+\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$$
(B.15)

As equações (B.6), (B.5), (B.13), (B.14) e (B.15) permitem implementar o filtro de Kalman recursivo não estacionário.

Para um sistema invariante no tempo é possível obter uma solução estacionária para os ganhos de Kalman. Deste modo considerando que a matriz de covariância do erro de estimação é independente do instante de tempo considerado:

$$\mathbf{P}_{k+1}^{-} \approx \mathbf{P}_{k}^{-} = \mathbf{P}^{-}. \tag{B.16}$$

Partindo da matriz de covariância do erro de estimação calculada a priori (B.15) e das equações (B.13), (B.14) e (B.15), obtêm-se a equação de Riccati discreta (B.17):

$$\mathbf{P}_{k+1}^{-} = \boldsymbol{\varphi}_{k} \mathbf{P}_{k}^{-} \boldsymbol{\varphi}_{k}^{T} - \boldsymbol{\varphi}_{k} \mathbf{P}_{k}^{-} \mathbf{H}_{k}^{T} \left(\mathbf{H}_{k} \mathbf{P}_{k}^{-} \mathbf{H}_{k}^{T} + \mathbf{R}_{k} \right)^{-1} \mathbf{H}_{k} \mathbf{P}_{k}^{-} \boldsymbol{\varphi}_{k}^{T} + \mathbf{Q}_{k} .$$
(B.17)

Considerando (B.16) obtêm-se a equação estacionária de Riccati cuja solução são os ganhos de Kalman estacionários:

$$\mathbf{P}^{-} = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{P}^{-} \boldsymbol{\varphi}^{T} - \boldsymbol{\varphi} \mathbf{P}^{-} \mathbf{H}^{T} \left(\mathbf{H} \mathbf{P}^{-} \mathbf{H}^{T} + \mathbf{R} \right)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}^{-} \boldsymbol{\varphi}^{T} + \mathbf{Q} .$$
(B.18)

B.2 Filtro de Kalman Estendido

Quando o sistema apresenta uma dinâmica não linear e/ou uma relação não linear com as observações torna-se necessário linearizar o sistema para se utilizar as técnicas usuais para sistemas lineares [BrHw97]. Considere-se então sistema não linear (B.19):

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_{k}, \mathbf{u}_{k}, k) + \mathbf{w}_{k} \\ \mathbf{z}_{k} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k}, k) + \mathbf{v}_{k} \end{cases},$$
(B.19)

onde:

- x_k é o vector (n x 1) das variáveis de estado no instante t_k
- φ(x_k, u_k, k) é a matriz de transição (n x n) não linear que relaciona o vector de estado no instante tk com o vector de estado no instante tk+1
- W_k é o vector (n x 1) de ruído branco, com covariância conhecida, que afecta o vector de estado no instante t_k
- Z_k é o vector (m x 1) de observações no instante t_k
- h(x_k,k) é a matriz (m x n) não linear que relaciona as observações com o vector de estado no instante t_k
- v_k é o vector (m x 1) de ruído branco, com covariância conhecida e descorrelacionada de w_k, que afecta as observações no instante t_k

As matrizes de covariância de w_k e v_k são as representadas por (B.2) e (B.3).

O filtro de Kalman estendido opera sobre uma trajectória estimada pelo filtro. Deste modo definese o erro de trajectória como a diferença entre a trajectória real e a estimada pelo filtro:

$$\Delta \mathbf{x}_{\mathbf{k}} = \mathbf{x}_{\mathbf{k}} - \mathbf{x}_{\mathbf{k}}^{*}. \tag{B.20}$$

Substituindo (B.20) em (B.19) obtêm-se (B.21):

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^{*} + \Delta \mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\varphi} \left(\mathbf{x}_{k}^{*} + \Delta \mathbf{x}_{k}, \mathbf{u}_{k}, k \right) + \mathbf{w}_{k} \\ \mathbf{z}_{k} = \mathbf{h} \left(\mathbf{x}_{k}^{*} + \Delta \mathbf{x}_{k}, k \right) + \mathbf{v}_{k} \end{cases}$$
(B.21)

Assumindo que o erro Δx_k é pequeno, pode-se aproximar as funções ϕ e h pelos termos de primeira ordem das respectivas séries de Taylor:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^{*} + \Delta \mathbf{x}_{k+1} \approx \mathbf{\varphi} \left(\mathbf{x}_{k}^{*}, \mathbf{u}_{k}, k \right) + \left[\frac{\partial \mathbf{\varphi}}{\partial \mathbf{x}_{k}} \right]_{\mathbf{x}_{k} = \mathbf{x}^{*}} \Delta \mathbf{x}_{k} + \mathbf{w}_{k} \\ \mathbf{z}_{k} \approx \mathbf{h} \left(\mathbf{x}_{k}^{*}, k \right) + \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_{k}} \right]_{\mathbf{x}_{k} = \mathbf{x}^{*}} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{v}_{k} \end{cases}$$
(B.22)

Verificando-se a relação (B.23):

$$\mathbf{x}_{k+1}^{*} = \boldsymbol{\varphi}\left(\mathbf{x}_{k}^{*}, \mathbf{u}_{k}, k\right), \tag{B.23}$$

obtêm-se:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\varphi}_k \Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k - \mathbf{h} \left(\mathbf{x}_k^*, k \right) = \mathbf{H}_k \Delta \mathbf{x} + \mathbf{v}_k \end{cases}$$
 (B.24)

onde φ_k e \mathbf{H}_k representam os jacobianos de $\varphi(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k)$ e $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k, k)$, (B.25) e (B.26) respectivamente:

$$\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{k}} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}, \mathbf{u}_{\mathbf{k}}, k)}{\partial \mathbf{x}_{\mathbf{k}}}\right]_{\mathbf{x}_{\mathbf{k}} = \mathbf{x}^{*}}$$
(B.25)

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}} = \left[\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}, k)}{\partial \mathbf{x}_{\mathbf{k}}}\right]_{\mathbf{x}_{\mathbf{k}} = \mathbf{x}^{*}}.$$
(B.26)

Se as entradas dos jacobianos forem obtidas através da trajectória estimada pelo filtro nomea-se de Kalman Estendido. Se o jacobiano for avaliado ao longo de uma trajectória pré-definida, chama-se ao filtro Kalman Linearizado.

As equações que implementam o filtro de Kalman Estendido podem ser obtidas a partir do filtro de Kalman convencional, utilizando o modelo linearizado do sistema. Deste modo, a estimativa do erro de posição é actualizada através de (B.27):

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}} = \Delta \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^{-} + \mathbf{K}_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{z}_{\text{incremental}} - \mathbf{H}_{\mathbf{k}} \Delta \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^{-} \right).$$
(B.27)

onde $\Delta \hat{x}_{k}^{-}$ (estimativa à priori) e $z_{incremental}$ são dados por (B.28) e (B.29), respectivamente

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^{-} = \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{k}-1} \Delta \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}-1}, \qquad (B.28)$$

$$\mathbf{z}_{\text{incremental}} = \mathbf{z}_{k} - \mathbf{h} \left(\mathbf{x}_{k}^{*}, k \right). \tag{B.29}$$

As expressões para os ganhos, pseudo-covariância do erro e propagação da covariância do erro de estimação à priori são análogos a (B.13), (B.14), (B.15), respectivamente, considerando as matrizes linearizadas ϕ_k e H_k .

O filtro de Kalman pode ser modificado de forma a trabalhar nas variáveis totais, em vez de trabalhar no espaço de erros de trajectória. Deste modo, partindo de (B.27) e expandindo $z_{incremental}$ obtêm-se

$$\begin{split} \Delta \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}} &= \Delta \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^{-} + \mathbf{K}_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{z}_{\text{incremental}} - \mathbf{H}_{\mathbf{k}} \Delta \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^{-} \right) \\ \Delta \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}} &= \Delta \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^{-} + \mathbf{K}_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{z}_{\mathbf{k}} - \left(\mathbf{h} \left(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}^{*}, \mathbf{k} \right) + \mathbf{H}_{\mathbf{k}} \Delta \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^{-} \right) \right) \\ \Delta \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}} &= \Delta \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^{-} + \mathbf{K}_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{z}_{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{k}}^{-} \right). \end{split}$$
(B.30)

Adicionando x_k^* a ambos os lados da equação (B.30) obtêm-se (B.31).

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^{*} + \Delta \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^{*} + \Delta \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^{-} + \mathbf{K}_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{z}_{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{k}}^{-} \right),$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^{-} + \mathbf{K}_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{z}_{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{k}}^{-} \right). \tag{B.31}$$

A projecção do filtro e a estimativa das observações são então dada por (B.32) e (B.33), respectivamente.

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{-} = \boldsymbol{\varphi}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k}, k\right) \tag{B.32}$$

$$\hat{\boldsymbol{z}}_{k+1} = \boldsymbol{h}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}\right) \tag{B.33}$$

Obtêm-se assim um conjunto de equações que permite implementar o filtro de Kalman estendido discreto, recursivo e não estacionário que opera nas variáveis totais de estimação, em vez das variáveis de erro de estimação.

Apêndice C – Método dos Mínimos Quadrados

O Método dos Mínimos Quadrados [Atki89] para sistemas lineares é uma técnica que permite determinar um sistema de equações lineares que melhor se ajusta a um conjunto de dados fornecidos. Neste tipo de problemas, normalmente existem mais equações (m equações) do que incógnitas (n incógnitas), ou seja, n > m.

Dado o sistema linear (C.1) pretende-se determinar $\hat{\mathbf{x}}$ que melhor se ajusta à equação, ou seja, que minimiza o funcional dado por (C.2), que escrito em forma matricial se obtêm (C.3).

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} , \qquad (C.1)$$

$$S = \sum_{i} \left(b_i - \sum_{j} \left(A_{ij} \hat{x}_j \right) \right)^2, \tag{C.2}$$

$$\left\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\right\|^2, \tag{C.3}$$

onde,

- A é uma matriz (*m x n*) (com *n>m*) conhecida;
- **b** é um vector (*nx1*) conhecido;
- **x** é um vector (*nx1*) desconhecido e que se pretende determinar.

Partindo de (C.3) e através de manipulação algébrica obtêm-se (C.4).

$$\left\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\right\|^{2} = \left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\right)^{T} \left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\right) = \left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\right)^{T} \left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\right) - \mathbf{b}^{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\right)^{T}\mathbf{b} + \mathbf{b}^{T}\mathbf{b}.$$
 (C.4)

Derivando (C.4) em ordem a x, obtêm-se o mínimo de x para a funcional, dado por (C.5).

$$2\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - 2\mathbf{A}^{T}\mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}^{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{T}\mathbf{b}.$$
 (C.5)

Resolvendo (C.5) em ordem a \hat{x} , obtém-se a solução para o problema proposto.

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} .$$
 (C.6)

A matriz $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ é usualmente designada por pseudo inversa de \mathbf{A} .

Apêndice D – Representação gráfica de covariâncias

A representação gráfica de matrizes de covariâncias é uma ferramenta útil que permite observar graficamente a gama de variação de uma grandeza no plano xOy.

A representação gráfica de matrizes de covariâncias de dimensão 2 x 2 traduz-se por elipses no plano xOy. De modo a poder obter os pontos pertencentes à elipse é necessário proceder à diagonalização da matriz de covariância.

D.1 Diagonalização de matrizes

Um escalar λ é valor próprio de uma matriz **A**, se existir um vector **x** tal que **Ax** = λ **x** . A **x** dáse o nome de vector próprio [LuMa01]. Os valores próprios de uma matriz são calculados recorrendo à expressão (D.1).

$$det\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\right) = 0, \qquad (D.1)$$

onde,

- A é uma matriz (n x n) da qual se pretende determinar os valores próprios;
- λ é o valor próprio a calcular;
- I é a matriz identidade de dimensão igual à matriz A

Uma matriz tem representação diagonal se existirem n valores próprios distintos. Deste modo, para uma matriz de dimensão n com n valores próprios distintos têm-se que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^{-1}, \qquad (D.2)$$

onde,

- Λ é a matriz diagonal, cujas entradas da diagonal principal são os valores próprios de A;
- P é a matriz cujas colunas são definidas pelos vectores próprios, de norma unitária, associados aos vectores próprios calculados.

A matriz diagonal pode ser obtida através da função eig do MatLab. Esta função recebe como argumentos a matriz a diagonalizar (A), retornando a matriz diagonal (Λ) e a matriz diagonalizante (P). A função traduz-se então pela equação (D.3).

$$[\mathbf{P}, \mathbf{\Lambda}] = eig(\mathbf{A}). \tag{D.3}$$

D.2 Calculo dos pontos da elipse de covariância

Para n igual a 2, as entradas da diagonal principal da matriz diagonal Λ definem o quadrado do raio maior e menor da elipse. Pode-se assim proceder à construção da elipse recorrendo à sua expressão, representada por (D.4).

$$\frac{(x)^2}{\Lambda(1,1)} + \frac{(y)^2}{\Lambda(2,2)} = 1.$$
 (D.4)

Obtidos os pontos da elipse procede-se à transformação de coordenadas para sistema original através da expressão (D.5).

$$\begin{bmatrix} x'\\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} x\\ y \end{bmatrix}, \tag{D.5}$$

onde,

- P é a matriz transformação, de dimensão 2 x 2, cujas colunas são definidas pelos vectores próprios, de norma unitária, associados aos valores próprios calculados;

D.3 Código MatLab para representação gráfica da elipse de covariância

De seguida apresenta-se uma possível solução para a representação gráfica da matriz de covariâncias de dimensão 2 x 2.

```
function [[xxt(1,:) xxt2(1,:)], [xxt(2,:) xxt2(2,:)]] = rep_cov(Pa)
[Va,Da]=eig(Pa);
```

```
%Calculo dos pontos pertencentes à elipse que representa a matriz de covariância %diagonal contador=1;
```

```
for a=-sqrt(Da(1,1)):0.001:sqrt(Da(1,1))
    xx(contador) = a;
    y1 (contador) = sqrt((Da(2,2))*(1-a^2/(Da(1,1))));
    y3(contador) = - sqrt((Da(2,2))*(1-a^2/(Da(1,1))));
    contador=contador+1;
end
f=1;
for a=contador-1:-1:1
    y2(f) = y3(a);
    xx2(f) = xx(a);
    f=f+1;
end
%Transformação de coordenadas
for a=1:1:length(xx)
    xxt(1:2,a)=Va*[xx(a) ; y1(a)];
    xxt2(1:2,a)=Va*[xx2(a) ; y2(a)];
end
plot([xxt(1,:) xxt2(1,:)], [xxt(2,:) xxt2(2,:)])
```

Apêndice E – Cálculo da matriz de covariâncias das observações

Seja η_i os ruídos que afectam as pseudo-distâncias dos satélites para um determinado veiculo.

$$\eta_i = \begin{bmatrix} (\eta_c + \eta_{d1i}) & (\eta_c + \eta_{d2i}) & (\eta_c + \eta_{d3i}) & (\eta_c + \eta_{d4i}) \end{bmatrix}^T,$$
(E.1)

onde,

- η_c é o ruído de modo comum entre os satélites;
- η_{dji} é o ruído de modo diferencial entre os satélites, sendo o número do satélite representado por j∈ [1;4], e i representa o veículo.

A matriz de covariâncias é dada por (E.2).

$$\begin{split} R_{ki} &= E\left\{\eta_{i}\eta_{i}^{T}\right\} = \\ &= \begin{bmatrix} E\left\{(\eta_{c} + \eta_{d1i})(\eta_{c} + \eta_{d1i})\right\} & E\left\{(\eta_{c} + \eta_{d1i})(\eta_{c} + \eta_{d2i})\right\} & E\left\{(\eta_{c} + \eta_{d1i})(\eta_{c} + \eta_{d3i})\right\} & E\left\{(\eta_{c} + \eta_{d1i})(\eta_{c} + \eta_{d4i})\right\} \\ E\left\{(\eta_{c} + \eta_{d2i})(\eta_{c} + \eta_{d1i})\right\} & E\left\{(\eta_{c} + \eta_{d2i})(\eta_{c} + \eta_{d2i})\right\} & E\left\{(\eta_{c} + \eta_{d2i})(\eta_{c} + \eta_{d3i})\right\} & E\left\{(\eta_{c} + \eta_{d2i})(\eta_{c} + \eta_{d4i})\right\} \\ E\left\{(\eta_{c} + \eta_{d4i})(\eta_{c} + \eta_{d1i})\right\} & E\left\{(\eta_{c} + \eta_{d4i})(\eta_{c} + \eta_{d2i})\right\} & E\left\{(\eta_{c} + \eta_{d3i})(\eta_{c} + \eta_{d3i})\right\} & E\left\{(\eta_{c} + \eta_{d4i})(\eta_{c} + \eta_{d4i})\right\} \\ E\left\{(\eta_{c} + \eta_{d4i})(\eta_{c} + \eta_{d1i})\right\} & E\left\{(\eta_{c} + \eta_{d4i})(\eta_{c} + \eta_{d2i})\right\} & E\left\{(\eta_{c} + \eta_{d4i})(\eta_{c} + \eta_{d3i})\right\} & E\left\{(\eta_{c} + \eta_{d4i})(\eta_{c} + \eta_{d4i})\right\} \\ E\left\{(\eta_{c} + \eta_{d4i})(\eta_{c} + \eta_{d2i})\right\} & E\left\{(\eta_{c} + \eta_{d2i})\right\} & E\left\{(\eta_{c} + \eta_{d4i})(\eta_{c} + \eta_{d3i})\right\} & E\left\{(\eta_{c} + \eta_{d4i})(\eta_{c} + \eta_{d4i})\right\} \\ &= \begin{bmatrix} E\left\{\eta_{d1i}^{2}\right\} + E\left\{\eta_{c}^{2}\right\} & E\left\{\eta_{c}^{2}\right\} & E\left\{\eta_{c}^{2}\right\} & E\left\{\eta_{c}^{2}\right\} \\ & E\left\{\eta_{c}^{2}\right\} & E\left\{\eta_{c}^{2}\right\} & E\left\{\eta_{c}^{2}\right\} & E\left\{\eta_{c}^{2}\right\} \\ & E\left\{\eta_{c}^{2}\right\} & E\left\{\eta_{c}^{2}\right\} & E\left\{\eta_{d2i}^{2}\right\} + E\left\{\eta_{c}^{2}\right\} & E\left\{\eta_{d2i}^{2}\right\} + E\left\{\eta_{c}^{2}\right\} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{d1i}^{2} + \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} \\ & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} \\ & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} \\ & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} \\ & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} \\ & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} \\ & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} \\ & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} \\ & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} \\ & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} \\ & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} \\ & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} \\ & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} \\ & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} \\ & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} &$$

Na existência de um segundo veículo o vector dos ruído é definido por (E.3).

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 & \boldsymbol{\eta}_2 \end{bmatrix}^T, \tag{E.3}$$

onde η_i , com i \in [1;2], é dado por (E.1).

A matriz de covariâncias para o caso da existência de dois veículo é calculada da mesma forma apresentada anteriormente, e é dada por (E.4).

$$R_{k} = E\left\{\eta\eta^{T}\right\} = \begin{bmatrix} R_{k1} & \sigma_{c}^{2} \\ \sigma_{c}^{2} & R_{k2} \end{bmatrix},$$
(E.4)

onde R_{ki} , com i \in [1; 2], é dado por (E.2).

Generalizando para n veículo a estrutura dos ruídos é dada por (E.5) e a matriz de covariâncias é dada por (E.6).

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{bmatrix}^T, \tag{E.5}$$

$$R_{k} = \begin{bmatrix} R_{k1} & \sigma_{c}^{2} & \cdots & \sigma_{c}^{2} \\ \sigma_{c}^{2} & R_{k2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} \\ \vdots & \sigma_{c}^{2} & \ddots & \sigma_{c}^{2} \\ \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & \sigma_{c}^{2} & R_{kn} \end{bmatrix},$$
(E.6)

onde,

- η_i , com i \in [1; 2; ...; n] é dado por (E.1);
- R_{ki} , com i \in [1; 2; ...; n], é dado por (E.2).

Apêndice F – Método iterativo para cálculo da matriz de informação

Decompondo \mathbf{X}_{k} em $\mathbf{X}_{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{k-1}^{T} & x_{k}^{T} \end{bmatrix}^{T}$, e definindo a matriz (k.r x k.r) de informação de \mathbf{X}_{k} como (F.1).

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}_{k}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k} & \mathbf{B}_{k} \\ \mathbf{B}_{k}^{T} & \mathbf{C}_{k} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} E\left\{-\Delta_{X_{k-1}}^{X_{k-1}}\log p_{k}\right\} & E\left\{-\Delta_{X_{k-1}}^{x_{k}}\log p_{k}\right\} \\ E\left\{-\Delta_{x_{k}}^{X_{k-1}}\log p_{k}\right\} & E\left\{-\Delta_{x_{k}}^{x_{k}}\log p_{k}\right\} \end{bmatrix}.$$
 (F.1)

O valor mínimo para a matriz de covariância possível para o instante t_k é determinada pela sub matriz (r x r) direita inferior de $[\mathbf{J}(\mathbf{X}_k)]^{-1}$, denominada de \mathbf{J}_k^{-1} . A matriz de informação para x_k é dada pela inversa da matriz referida anteriormente, ou seja, \mathbf{J}_k , e é determinada por (F.2).

$$\mathbf{J}_{k} = \mathbf{C}_{k} - \mathbf{B}_{k}^{T} \mathbf{A}_{k}^{-1} \mathbf{B}_{k} \,. \tag{F.2}$$

O cálculo de J_k envolve o cálculo de inversas de matrizes de grandes dimensões ([PeCA98]), o que tem um elevado custo computacional.

Definindo a função densidade de probabilidade conjunta de X_{k+1} e Z_{k+1} , como (F.3).

$$p_{k+1} \triangleq p(\mathbf{X}_{k+1}, \mathbf{Z}_{k+1}) = p(\mathbf{X}_{k}, \mathbf{Z}_{k}) \cdot p(x_{k+1} | \mathbf{X}_{k}, \mathbf{Z}_{k}) \cdot p(z_{k+1} | x_{k+1}, X_{k}, Z_{k}) =$$

= $p_{k} \cdot p(x_{k+1} | x_{k}) \cdot p(z_{k+1} | x_{k+1})$ (F.3)

Usando (F.3), (6.5), (6.6), (6.7), (6.8) e a notação de (F.1), a matriz de informação de \mathbf{X}_{k+1} pode ser escrita como (F.4)

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}_{k+1}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k & \mathbf{B}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_k^T & \mathbf{C}_k + \mathbf{D}_k^{11} & \mathbf{D}_k^{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_k^{21} & \mathbf{D}_k^{22} \end{bmatrix}.$$
 (F.4)

A partir de (F.4) é possível obter a matriz de informação através de (F.5).

$$\mathbf{J}_{k+1} = \mathbf{D}_{k}^{22} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{k}^{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k} & \mathbf{B}_{k} \\ \mathbf{B}_{k}^{T} & \mathbf{C}_{k} + \mathbf{D}_{k}^{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{k}^{12} \end{bmatrix} = .$$

$$= \mathbf{D}_{k}^{22} - \mathbf{D}_{k}^{21} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{k} + \mathbf{D}_{k}^{11} - \mathbf{B}_{k}^{T} \mathbf{A}_{k}^{-1} \mathbf{B}_{k} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{D}_{k}^{12}$$
(F.5)

Substituindo (F.2) em (F.5), obtém-se (F.6).

$$\mathbf{J}_{k+1} = \mathbf{D}_{k}^{22} - \mathbf{D}_{k}^{21} \left(\mathbf{J}_{k} + \mathbf{D}_{n}^{11} \right)^{-1} \mathbf{D}_{k}^{12}$$
(F.6)