

## Sistema de Seguimento de Veículo Submarino por Fusão INS/USBL

**PEDRO MANUEL DOS SANTOS VALVERDE**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
**ENG. ELECTROTÉCNICA E DE COMPUTADORES**

### **Júri**

Presidente: Prof. Francisco Miguel Prazeres Garcia  
Orientador: Doutor Paulo Jorge Coelho Ramalho Oliveira  
Co-Orientador: Doutor Carlos Jorge Ferreira Silvestre  
Vogais: Prof. José Manuel Bioucas Dias

**Setembro de 2007**

*“Teoricamente, não há diferença entre a teoria e a prática. Mas na prática há.”*

**Yogi Berra, Treinador de Basebol**

**Página em branco**

## **Agradecimentos**

Antes de mais gostaria de agradecer o desafio proposto pelo Professor Paulo Oliveira e Carlos Silvestre e a confiança que depositaram em mim. Estou muito grato por terem acreditado nas minhas capacidades! Gostaria, também, de dirigir outra palavra de agradecimento às mesmas pessoas pela actividade de docência que desempenham com grado e motivação. O conhecimento que partilharam comigo é dum valor incalculável.

A motivação, os momentos de discussão e lazer que partilhei com os meus colegas é algo que prezo muito e que nunca conseguirei retribuir. A essas pessoas um agradecimento profundo. Destaco Ivo Sousa, Filipe Tocha, Nuno Valverde, Rui Andrês, João Lopes, Ana Carvalho e Daniel Queluz, com os quais partilhei cinco anos de estudos, sofrimento e muito convívio!

À minha namorada posso finalmente retribuir todo o tempo que dispensou para que pudesse dar alguma atenção à minha segunda namorada – Instituto Superior Técnico. Agradeço muito a sua compreensão e a coragem que me deu para que este sonho se tornasse realidade.

Ao meu irmão pouco tenho a dizer, ele sabe o quanto lhe agradeço o tempo que dispensou comigo. *Perhaps my Best Friend!*

Finalmente, não poderia deixar de agradecer aos meus Pais, por acreditarem sempre em mim e por estarem sempre presentes nos momentos mais difíceis. Estou-vos muito grato por tudo.

**Página em branco**

## Resumo

Este relatório aborda o estudo de vários modelos dinâmicos utilizados no seguimento de veículos. Pretende-se, com este trabalho, desenvolver um sistema de navegação/seguimento de alvos para fornecer estimativas de posição e atitude de um veículo robótico submarino e analisar o desempenho dos algoritmos de estimação.

A solução utilizada baseia-se na aquisição dos dados fornecidos pelo sensor (distância e direcção do alvo ao sensor) e através de um filtro de Kalman estendido estima-se a posição do veículo. São implementadas duas soluções com dois modelos distintos e analisados os resultados comparativamente para várias perturbações da medidas, com o objectivo de discutir qual o algoritmo que fornece a melhor estimativa.

Com o objectivo de determinar quão longe se encontram os resultados obtidos, pelos métodos propostos, da solução óptima é feita uma análise baseada no método de limite de desempenho de Cramér-Rao (CRLB) e limite de desempenho de Cramér-Rao à posteriori (PCRB), onde se determina o erro quadrático médio atingível na estimação das variáveis de estado no caso óptimo.

Apresentam-se também resultados preliminares da estimação multi-modelo baseada no algoritmo *Multiple-Model Adaptive Estimation* (MMAE). Estuda-se o desempenho deste algoritmo no seguimento de trajectórias com diferentes velocidades angulares, o comportamento para velocidades angulares diferentes das quais o algoritmo MMAE desenhado e o comportamento do algoritmo em regime dinâmico, ou seja, quando o veículo altera a sua trajectória durante o período de simulação.

**Palavras-chave:** Seguimento de Alvos, Filtragem de Kalman, Limite de desempenho de Cramér-Rao, Limite de desempenho de Cramér-Rao à posteriori, Estimação Multi-modelo

## Abstract

The focus of this report is the study of several dynamical state models for target tracking. The main objective of this work is the development of a tracking system that is able to estimate the position and the behavior of a submarine vehicle. This work also focuses the estimation algorithm performance.

The vehicle's position estimation is based on an extended Kalman filter with the help of sensor measures (distance from the sensor to the vehicle and the bearing angle). Two different models are implemented and their estimation square mean error are analyzed in order to discuss which algorithm performs the best vehicle's position estimation.

The algorithms' performance are analyzed performing a Cramér Rao Lower Bound and a Posterior Cramér-Rao Bound study, in order to evaluate the optimal estimation square mean error.

Some preliminary studies about multi-model estimation based on Multiple-Model Adaptive Estimation (MMAE) algorithm are also performed in this report. It is analyzed the performance of this algorithm when tracking paths with different angular velocities. It is also analyzed the algorithm's behavior for an angular velocity different from those that the MMAE algorithm was drawn. The dynamic behavior of the MMAE algorithm is also studied when the vehicle changes its path during the simulation period.

**Keywords:** Target Tracking, Kalman Filtering, Cramér-Rao *Lower Bound*, *Posterior* Cramér-Rao *Bound*, Multiple-Model Estimation

# Índice

<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>1. Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2. Sensores</b>	<b>3</b>
2.1. Radar e sensor acústico .....	4
2.2. Medidas fornecidas pelo sensor .....	5
2.2.1. Transformação de coordenadas .....	5
2.2.2. Caracterização estatística das medidas dos sensores .....	5
2.2.3. Linearização da transformação de coordenadas .....	7
2.3. Conclusões.....	8
<b>3. Modelos de seguimento de alvos</b>	<b>9</b>
3.1. Modelo para movimento ao longo de circunferências .....	9
3.1.1. Modelo de estado e filtragem de Kalman .....	12
3.1.2. Linearização do modelo.....	13
3.1.3. Trajectórias circulares com velocidade angular conhecida .....	14
3.1.4. Trajectórias em linha recta.....	16
3.2. <i>Constant Turn model with known turn rate</i> .....	17
3.3. Análise de observabilidade.....	21
3.3.1. Observabilidade dos modelos .....	25
3.4. Simulação e análise dos resultados .....	28
<b>4. Limites de desempenho dos algoritmos de estimação</b>	<b>33</b>
4.1. Limite de desempenho de Cramér Rao .....	33
4.1.1. CRLB para sinais perturbados com ruído branco .....	34
4.1.2. CRLB geral para sinais perturbados por ruído branco .....	35

4.2. CRLB para sistemas não lineares .....	36
4.2.1. CRLB para seguimento de veículos .....	36
4.2.2. Limite de desempenho Cramér Rao à posteriori (PCRB) .....	39
4.3. Implementação e análise dos resultados .....	41
4.3.1. Desempenho dos algoritmos de seguimento sem ruído de estado .....	42
4.3.2. Desempenho dos algoritmos de seguimento com ruído de estado .....	46
<b>5. Estimação multi-modelo</b> .....	<b>54</b>
5.1. Algoritmo <i>Multiple-Model Adaptive Estimation</i> (MMAE) .....	54
5.1.1. Algoritmo MMAE em regime dinâmico .....	58
5.2. Implementação e análise dos resultados .....	58
5.2.1. Desempenho do algoritmo MMAE .....	59
5.2.2. Comportamento do algoritmo MMAE para trajectórias não consideradas nos modelos .....	62
5.2.3. Comportamento em regime dinâmico .....	64
<b>6. Conclusões</b> .....	<b>67</b>
6.1. Trabalho futuro .....	68
<b>A. Cálculo do limite</b> .....	<b>69</b>
<b>B. Filtros de Kalman discretos</b> .....	<b>71</b>
B.1. Filtro de Kalman discreto .....	71
B.2. Filtro de Kalman Estendido .....	75
<b>C. Discretização de modelos de estado</b> .....	<b>79</b>
<b>D. Matriz covariância de ruído de estado</b> .....	<b>82</b>
<b>E. Dedução da equação para cálculo do Cramér-Rao <i>Lower Bound</i> através do método de Taylor</b> .....	<b>84</b>
<b>Referências</b> .....	<b>87</b>

# Lista de Figuras

Figura 2.1 - Posição do sensor, do veículo e respectivas medições fornecidas pelo sensor. ....	3
Figura 2.2 - Representação da função densidade probabilidade em coordenadas polares para um alvo a uma distância de 7m do sensor e a um ângulo de $\pi/4$ , com uma incerteza de 2 m na distância e 0.5 rad no ângulo [6]. .....	6
Figura 2.3 - Função densidade probabilidade em coordenadas cartesianas para a mesma situação descrita na figura 2.2 [6]. .....	7
Figura 2.4 - Função densidade probabilidade em coordenadas cartesianas, para a mesma situação descrita na figura 2.2, da transformação linearizada em torno do ponto de funcionamento [6]. .....	8
Figura 3.1 - Evolução da função $m(\omega\Delta t)$ . .....	26
Figura 3.2 - Representação da trajectória de teste no plano $(x, y)$ e evolução ao longo do tempo $(x, y, t)$ .....	29
Figura 3.3 - Simulação da trajectória descrita pelo veículo usando o modelo para movimento ao longo de circunferências. ....	30
Figura 3.4 - Erro de estimação das variáveis de estado usando o modelo para movimento ao longo de circunferências. ....	30
Figura 3.5 - Simulação da trajectória descrita pelo veículo usando o <i>Constant model with known Turn Rate</i> . ....	30
Figura 3.6 - Erro de estimação das variáveis de estado usando o <i>Constant model with known Turn Rate</i> . ....	31
Figura 4.1 - Erro quadrático médio na estimação da posição em $x$ para o modelo para movimento ao longo de circunferências e <i>Constant model with known Turn Rate</i> para as várias situações de ruído. ....	43
Figura 4.2 - Erro quadrático médio na estimação da posição em $y$ para o modelo para movimento ao longo de circunferências e <i>Constant model with known Turn Rate</i> para as várias situações de ruído. ....	44
Figura 4.3 - Evolução do valor do CRLB ao longo do tempo para a posição no eixo dos $x$ e no eixo dos $y$ , do modelo para movimento ao longo de circunferências. ....	45

Figura 4.4 - Evolução do valor do CRLB ao longo do tempo para a posição no eixo dos $x$ e no eixo dos $y$ , do modelo <i>Constant model with known Turn Rate</i> .	45
Figura 4.5 - Erro quadrático médio na estimação da posição em $x$ para o modelo para movimento ao longo de circunferências e <i>Constant model with known Turn Rate</i> para as várias situações de ruído.	47
Figura 4.6 - Erro quadrático médio na estimação da posição em $y$ para o modelo para movimento ao longo de circunferências e <i>Constant model with known Turn Rate</i> para as várias situações de ruído.	48
Figura 4.7 - Evolução do erro quadrático médio ao longo do tempo para a posição no eixo dos $x$ e no eixo dos $y$ , do modelo para movimento ao longo de circunferências.	48
Figura 4.8 - Evolução do erro quadrático médio ao longo do tempo para a posição no eixo dos $x$ e no eixo dos $y$ , do modelo <i>Constant model with known Turn Rate</i> .	49
Figura 4.9 - Evolução do erro quadrático médio e da posição na coordenada $x$ do referencial utilizado do modelo para movimento ao longo de circunferências, normalizados pelo respectivo máximo.	50
Figura 4.10 - Evolução do erro quadrático médio e da posição na coordenada $y$ do referencial utilizado do modelo para movimento ao longo de circunferências, normalizados pelo respectivo máximo.	50
Figura 4.11 - Evolução do erro quadrático médio e da posição na coordenada $x$ do referencial utilizado do modelo <i>Constant model with known Turn Rate</i> , normalizados pelo respectivo máximo.	51
Figura 4.12 - Evolução do erro quadrático médio e da posição na coordenada $y$ do referencial utilizado do modelo <i>Constant model with known Turn Rate</i> , normalizados pelo respectivo máximo.	51
Figura 4.13 - Representação da trajectória de teste no plano $(x, y)$ e respectivos pontos onde se verifica a maior incerteza na estimação da posição.	52
Figura 5.1 - Estrutura geral do algoritmo <i>Multiple-Model Adaptive Estimation</i> (MMAE).	56
Figura 5.2 - Evolução da probabilidade do modelo ser o correcto.	60
Figura 5.3 - Representação da trajectória real descrita pelo veículo e a trajectória estimada no plano $(x, y)$ e evolução ao longo do tempo $(x, y, t)$ .	61
Figura 5.4 - Evolução da probabilidade do modelo ser o correcto para a situação em que a velocidade angular do veículo era diferente das velocidades angulares consideradas nos modelos.	63
Figura 5.5 - Representação da trajectória real descrita pelo veículo e a trajectória estimada no plano $(x, y)$ e evolução ao longo do tempo $(x, y, t)$ .	64
Figura 5.6 - Evolução da velocidade angular real do veículo considerada na simulação.	65

Figura 5.7 - Evolução da probabilidade do modelo ser o correcto para a situação em que a velocidade angular do veículo se alterou durante o período de simulação. .... 65

Figura 5.8 - Representação da trajectória real descrita pelo veículo e a trajectória estimada no plano  $(x, y)$  e evolução ao longo do tempo  $(x, y, t)$  ..... 66

## Lista de Tabelas

Tabela 3.1 - Análise de observabilidade para o modelo para movimento ao longo de trajetórias circulares.....	27
Tabela 3.2 - Análise de observabilidade para o modelo <i>Constant model with known Turn Rate</i> . .....	28
Tabela 3.3 - Valores da variância do ruído que afecta os sensores, considerada nas várias simulações. ....	29
Tabela 3.4 - Raiz quadrada do erro quadrático médio na estimativa das variáveis de estado de posição para os dois modelos testados. ....	31
Tabela 4.1 - Erro quadrático médio obtido na simulação do modelo para movimento ao longo de circunferências e do modelo <i>Constant model with known Turn Rate</i> e respectiva melhor estimativa possível (Cramér Rao Lower Bound). ....	43
Tabela 4.3 - Erro quadrático médio obtido na simulação do modelo para movimento ao longo de circunferências e do modelo <i>Constant model with known Turn Rate</i> e respectiva melhor estimativa possível através do método <i>Posterior Cramér Rao Bound</i> . ....	46
Tabela 5.1 - Velocidades angulares do veículo consideradas no vários modelos. ....	59
Tabela 5.2 - Variâncias do ruído que perturba as observações consideradas no modelo. ....	59
Tabela 5.3 – Erro quadrático médio da estimativa da posição dada pelo algoritmo MMAE para as várias velocidades angulares consideradas nos modelos. ....	61
Tabela 5.4 - Erro quadrático médio obtido pela estimativa dada pelo algoritmo MMAE e pelo modelo <i>Constant model with known Turn Rate</i> do capítulo 2. ....	62
Tabela 5.5 - Velocidades angulares do veículo consideradas nos vários modelos. ....	62

# Capítulo 1

## Introdução

Actualmente os Veículos Submarinos Autónomos (AUV, *Autonomous Underwater Vehicles*) e os Veículos Operados Remotamente (ROV, *Remotely Operated Vehicles*) desempenham um papel muito importante na sociedade. O seu papel estende-se desde meras operações de rotina até às mais sofisticadas aplicações científicas e industriais, sem deixar de focar as aplicações em que a vida humana correria risco como é o caso de operações no espaço ou no mar a grande profundidade. Prevê-se que cada vez mais no futuro este tipo de veículos tenha um papel mais relevante nas necessidades e curiosidade do Homem.

Surge assim a necessidade de evoluir e tornar cada vez mais robusto os sistemas de controlo destes veículos. Os sistemas de localização e posicionamento aparecem como um dos sistemas mais importantes nos Veículos Submarinos Autónomos, sendo que a sua falha pode levar ao fracasso da missão, ou mesmo ter consequências mais graves. Este trabalho propõe-se então a estudar vários modelos de seguimento de veículos e analisar o seu desempenho comparativo. É analisado o desempenho do estimador proposto baseado em filtragem de Kalman face ao estimador óptimo. É ainda abordada a estimação multi-modelo baseada no algoritmo *Multiple-Model Adaptive Estimation* (MMAE) com o objectivo de analisar o seu desempenho e comportamento em situações de regime dinâmico.

Este relatório encontra-se estruturado da seguinte forma:

- No Capítulo 2 são apresentados os sensores e caracterizadas as medidas fornecidas pelos mesmos;
- No Capítulo 3 são apresentados os modelos de seguimento utilizados ao longo de todo o trabalho, é feita uma análise de observabilidade dos modelos e compara-se o desempenho dos mesmos após simulação;

- No Capítulo 4 é analisado o desempenho dos modelos face à situação de estimação óptima.
- No Capítulo 5 é abordada a estimação multi-modelo com base no algoritmo *Multiple-Model Adaptive Estimation* (MMAE) e analisado o seu desempenho para várias trajectórias com diferentes velocidades angulares, é analisado o comportamento do algoritmo para velocidades angulares não consideradas e para situações de regime dinâmico em que a velocidade do veículo se altera durante o período de simulação
- No Capítulo 6 são apresentadas as principais conclusões retiradas durante o presente trabalho e enumeram-se alguns pontos sobre trabalho futuro a efectuar.

## Capítulo 2

### Sensores

Durante este trabalho considera-se que o sistema de estimação de posição utilizado tira partido das medições de um sensor. Este sensor fornece ao sistema a distância e a direcção ao veículo relativamente a uma posição e direcção de referência. Na figura 2.1 representa-se esquematicamente as medições do sensor, a distância e a direcção dados por  $d$  e  $\Theta$ , respectivamente.

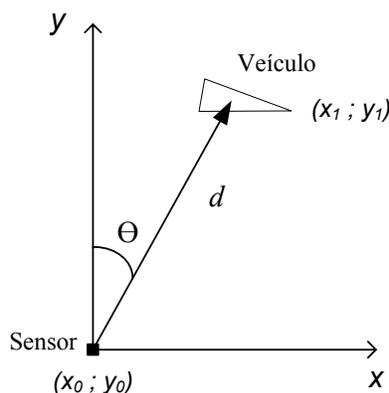


Figura 2.1 - Posição do sensor e do veículo e respectivas medições fornecidas pelo sensor.

O princípio de funcionamento do sensor consiste em enviar um impulso de energia através de um sector circular centrado no mesmo. Quando o impulso de energia atinge o alvo, parte desta energia é reflectida e uma fracção da energia reflectida propaga-se de volta ao sensor. Este recebe a energia reflectida e determina a distância e direcção a que o alvo se encontra com base numa estratégia de processamento de sinal adequada. O sistema de processamento pode funcionar de duas formas distintas. Na primeira, o sistema de aquisição determina, para cada direcção, o tempo que demora até receber o primeiro eco que é passado

ao sistema de processamento. Com base nesse tempo é calculada a distância do alvo. A segunda estratégia o sistema de aquisição recebe todos os ecos dentro de um determinado intervalo de tempo, e com base no sinal recebido fazer um mapa em que para cada valor de direcção se representa a potência do sinal recebido. O sensor é capaz de detectar a localização do alvo para o volume de espaço no qual erradia energia.

## 2.1. Radar e sensor acústico

As características do meio ambiente circundante do veículo e do sensor terão de ser consideradas na escolha do sensor a utilizar. Assim podem-se considerar dois meios envolventes, o ar e a água. No caso em que o ambiente circundante é o ar, o sensor utilizado é um RADAR (*Radio Detection And Ranging*). O RADAR é um método que utiliza ondas electromagnéticas para detectar a posição e velocidade de um alvo e identificar as suas características. Isto é conseguido, emitindo num volume de espaço, energia electromagnética e detectando a energia reflectida pelos objectos presentes nesse espaço. O RADAR utiliza normalmente energia na banda das micro-ondas ( de 0,5 GHz até 100 GHz). Este sensor é utilizado em diversas situações, descrevendo-se algumas a título de exemplo:

- Detecção de navios e da linha da costa de forma a evitar colisões de embarcações;
- Navegação de aviões e navios com más condições atmosféricas;
- Detecção, localização e identificação de aviões para controlo do tráfego aéreo;
- Medição de altitude para navegação de aviões ou mísseis;
- Mapeamento da terra e mar a partir de aviões, navios ou satélites;
- Medição da posição e velocidade de objectos no espaço.

Nas situações em que o meio circundante é a água, uma das soluções a considerar serão os sensores acústicos, uma vez que as ondas electromagnéticas sofrem forte atenuação no meio aquático. Outra solução a considerar poderiam ser sensores ópticos, mas em condições de fraca visibilidade a sua utilização também seria limitada. Desde modo, os sensores acústicos baseados numa topologia USBL (*Ultra-Short Base Line*) serão a solução mais indicada. Um sensor acústico USBL é um método de posicionamento submarino e consiste num conjunto de receptores acústicos situados no veículo submarino e um emissor situado num veículo à superfície do mar, p.e. Com base nas diferenças de tempo de recepção nos

diferentes receptores e, eventualmente, nos tempos de propagação da onda entre o emissor e os receptores, é estimada a direcção em que o emissor se encontra ou a posição exacta do emissor relativamente ao veículo em que se encontra instalado o sensor USBL.

## 2.2. Medidas fornecidas pelo sensor

Como referido anteriormente e representado na figura 2.1, o sensor fornece a distância e a direcção que o alvo se encontra, representados por  $d$  e  $\Theta$  respectivamente. No entanto, no âmbito na representação de alvos não se tem interesse em trabalhar em coordenadas polares, mas antes em coordenadas cartesianas. Assim surge a necessidade de fazer uma transformação de coordenadas.

### 2.2.1. Transformação de coordenadas

Uma vez que se pretende trabalhar em coordenadas cartesianas, é necessário aplicar uma transformação de coordenadas. A matriz de transformação, denominada por  $g(x, y)$ , converte coordenadas polares em coordenadas cartesianas. Assim, tem-se

$$\begin{bmatrix} d \\ \theta \end{bmatrix} = g(x, y) = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan^{-1}(y/x) \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

cuja inversa,  $g^{-1}(d, \theta)$ , existe e é definida em todos os pontos excepto para distância nula, dada pela função

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = g^{-1}(d, \theta) = \begin{bmatrix} d \cdot \cos(\theta) \\ d \cdot \sin(\theta) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

### 2.2.2. Caracterização estatística das medidas dos sensores

As observações obtidas por qualquer sensor de posição apenas permitem determinar o valor da posição do alvo com alguma incerteza adicionada. Assim, as amostras obtidas estão situadas em torno do valor real da grandeza, dentro de um intervalo de valores cuja dimensão depende da incerteza associada ao sensor.

A função densidade de probabilidade da medição dada pelo sensor de um alvo situado a uma distância  $d_1$  e numa direcção  $\Theta_1$ , considerando que o sensor tem uma incerteza que se pode aproximar por uma distribuição gaussiana com o valor médio no valor real da grandeza medida e variância dada por  $\sigma_d$  e  $\sigma_\theta$ , respectivamente para a distância  $d$  e para a direcção  $\Theta$ , respectivamente, assume a forma dada por (2.3).

$$p(d, \theta | x, y) = \frac{1}{(2\pi|\mathbf{R}|)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-\mathbf{g}(x, y))^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{z}-\mathbf{g}(x, y))\right\}, \quad (2.3)$$

onde  $\mathbf{R}$  é a matriz de covariância do ruído de observação dada por  $\text{diag}(\sigma_d, \sigma_\theta)$  e  $\mathbf{z} = [d, \theta]^T$ .

A representação gráfica da função densidade probabilidade para um alvo que se situa a uma distância de 7 m do sensor e a um ângulo de  $\pi/4$  e com uma incerteza de 2 m na distância e na direcção  $0.5 \text{ rad}$  apresenta-se na figura 2.2.

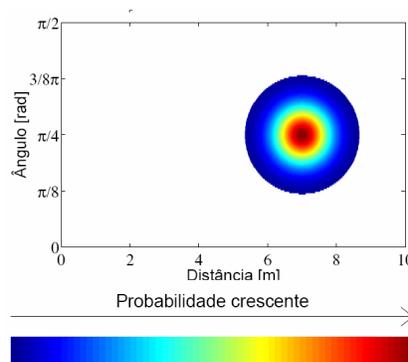


Figura 2.2 - Representação da função densidade probabilidade em coordenadas polares para um alvo a uma distância de 7m do sensor e a um ângulo de  $\pi/4$ , com uma incerteza de 2 m na distância e  $0.5 \text{ rad}$  no ângulo [6].

Aplicando a transformação de coordenadas descrita na secção 2.2.1, a distribuição obtida não se mantém gaussiana, como se pode verificar pela figura 2.3.

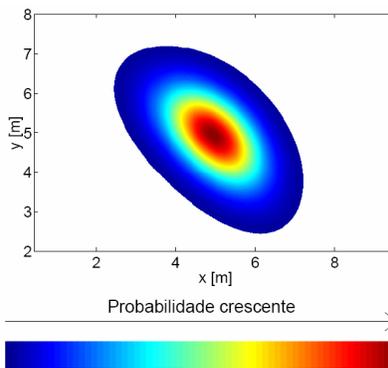


Figura 2.3 - Função densidade probabilidade em coordenadas cartesianas para a mesma situação descrita na figura 2.2 [6].

### 2.2.3. Linearização da transformação de coordenadas

É possível linearizar a função  $g(x, y)$  em torno do ponto de funcionamento. Calculando o Jacobiano de (2.1), resulta em

$$J_g(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

que se pode escrever em função de  $d$  e  $\theta$ , de onde resulta

$$J_g(g^{-1}(d, \theta)) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{\sin(\theta)}{d} & \frac{\cos(\theta)}{d} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Através da linearização apresentada em (2.4) ou (2.5) e considerando a aproximação do ruído de observação por uma distribuição gaussiana, obtém-se a função densidade probabilidade representada na figura 2.4. A distribuição apresentada na figura 2.4 apresenta uma forma característica duma distribuição gaussiana.

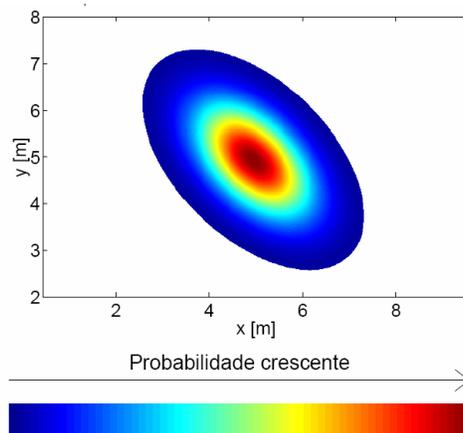


Figura 2.4 - Função densidade probabilidade em coordenadas cartesianas, para a mesma situação descrita na figura 2.2, da transformação linearizada em torno do ponto de funcionamento [6].

### 2.3. Conclusões

Neste capítulo abordaram-se os vários tipos de sensores aplicáveis ao caso em estudo e os seus princípios de funcionamento. Não se procedeu a uma caracterização exaustiva dos mesmos. Mesmo assim, verificou-se que em situações em que o meio envolvente é o ar, o sensor mais adequado é o radar, enquanto que se o meio envolvente for a água, o sensor aconselhado é um sensor acústico, neste caso baseado numa topologia USBL.

Procedeu-se a uma caracterização das medidas fornecidas pelo sensor. Considerou-se que o sensor utilizado fornecia a distância e o ângulo do alvo (coordenadas polares), pelo que se apresentou a respectiva transformação de coordenadas para transformar as medidas em coordenadas cartesianas. Caracterizou-se, ainda, a perturbação que os sensores sofrem nas medidas. Nesta situação aproximou-se o ruído que perturba as medições dos sensores como ruído gaussiano, o que, no entanto, nem sempre se verifica ser uma aproximação razoável. O facto de se estar a considerar uma transformação não linear torna a caracterização do ruído uma tarefa difícil.

## Capítulo 3

### Modelos de seguimento de alvos

Neste capítulo são apresentados vários modelos dinâmicos distintos utilizados no seguimento de veículos. É analisada a atitude do veículo e o desempenho da estimativa de posição fornecida por cada um dos modelos quando o alvo descreve uma trajectória circular, calculando o erro quadrático médio da posição estimada relativamente à posição real do veículo. Apresentam-se algumas vantagens e desvantagens na utilização dos modelos estudados.

O uso do modelo mais adequado, neste tipo de aplicações, surge da necessidade de estimar o estado do alvo com base nas observações da distância e da direcção do alvo corrompidas por ruído. Um bom modelo permite retirar das observações (por vezes limitadas) a maior quantidade de informação possível.

Os modelos são testados nas mesmas condições de ruído e para a mesma trajectória de modo a poder comparar o seu desempenho. A trajectória de teste escolhida foi uma circunferência, uma vez que as trajectórias típicas dos veículos podem ser aproximadas por segmentos de recta e arcos de circunferência, sendo os segmentos de recta um caso particular dos arcos de circunferência.

Os modelos foram implementados utilizando filtros de Kalman de modo a poder obter a melhor estimativa possível com base nas observações.

#### 3.1. Modelo para movimento ao longo de circunferências

O modelo para seguimento de alvos descrito nesta secção é baseado no modelo apresentado em [6] utilizado para situações em que o veículo se desloca em arcos de circunferência com velocidades angular e linear constantes. A dinâmica que descreve a trajectória do veículo é descrita por [4]

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \omega \\ \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}(\psi) \cdot \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $\psi$  é o ângulo da velocidade do veículo relativamente a uma direcção de referência,  $\omega$  é a velocidade angular do veículo,  $\mathbf{p} = [p_x \ p_y]^T$  é a posição do veículo em  $\mathbb{R}^2$ ,

$\mathbf{R}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix}$  é a matriz de rotação e  $v$  é a velocidade linear do veículo.

Para o modelo descrito pela equação (3.1), é possível determinar a sua evolução de forma analítica uma vez que as velocidade angular e linear são constantes.

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \omega_0, \\ v(t) &= v_0. \end{aligned}$$

Assim, é possível determinar a evolução do ângulo que descreve a evolução da direcção do veículo,

$$\psi(t) = \psi_0 + \omega_0 \cdot (t - t_0), \quad (3.2)$$

e as velocidades do veículo segundo a direcção dos eixos de referência,

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= v_0 \cos(\psi_0 + \omega_0 \cdot (t - t_0)) \\ \dot{p}_y &= v_0 \sin(\psi_0 + \omega_0 \cdot (t - t_0)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

É possível reescrever (3.3), utilizando a matriz de rotação definida em cima,

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}(\omega_0 \cdot (t - t_0)) \mathbf{R}(\psi_0) \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

A equação (3.4) resolve-se facilmente integrando o segundo membro,

$$\mathbf{p} = \int_{t_0}^t \mathbf{R}(\omega_0 \cdot (t - t_0)) \mathbf{R}(\psi_0) \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \end{bmatrix} dt, \quad (3.5)$$

que se simplifica para

$$\mathbf{p} = \int_{t_0}^t \mathbf{R}(\omega_0 \cdot (t - t_0)) dt \cdot \mathbf{R}(\psi_0) \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Resolvendo o integral resulta na expressão (3.7), que corresponde a uma circunferência de raio  $v_0/\omega_0$  com centro em  $\mathbf{p}_0 = [p_{x0} \quad p_{y0}]$ .

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{R}(\psi_0) \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{R}(\omega_0 \cdot (t - t_0))] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_0/\omega_0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

O estado no instante  $t$  pode ser determinado a partir de

$$\begin{bmatrix} \psi(t) \\ p_x(t) \\ p_y(t) \\ \omega(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_0 \\ p_{x0} \\ p_{y0} \\ \omega_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_0(t - t_0) \\ \mathbf{I} - \mathbf{R}(\omega_0 \cdot (t - t_0)) \\ \omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

O modelo não linear (3.8), resultante da manipulação algébrica de (3.1), torna as variáveis de estado dependentes, de uma forma explícita, da velocidade angular,  $\omega_0$ .

O modelo apresentado em (3.1) pode ser generalizado de forma a permitir variações nas variáveis de estado que caracterizam a trajetória, considerando que existe um conjunto de acelerações de carácter estocástico a actuar no sistema. Definindo  $\eta_\omega$  a entrada aleatória que determina a variação da velocidade angular e  $\eta_v$  a entrada aleatória que caracteriza a variação da velocidade linear, é possível reescrever (3.1)

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \omega \\ \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}(\psi) \cdot \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \\ \dot{\omega} = \eta_\omega \\ \dot{v} = \eta_v \end{cases} \quad (3.9)$$

Concentrando a actuação das entradas aleatórias no instante  $t$ , assumindo que estas apresentam um impulso de *Dirac* de valor aleatório no instante de tempo  $t$ , obtido proporcionalmente à distribuição de  $\eta_\omega$  e  $\eta_v$ . Como as variáveis aleatórias são integradas

directamente em variáveis de estado, então a dimensão do impulso deve ser proporcional a  $\sqrt{t-t_0}$  de forma a que a variância aumente linearmente com a dimensão do intervalo de tempo [6]. Esta aproximação permite reescrever (3.8)

$$\begin{bmatrix} \psi(t) \\ p_x(t) \\ p_y(t) \\ \omega(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_0 \\ p_{x0} \\ p_{y0} \\ \omega_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_0(t-t_0) \\ \mathbf{I} - \mathbf{R}(\omega_0 \cdot (t-t_0)) \\ \omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \sqrt{t-t_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_\omega \\ \eta_v \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

### 3.1.1. Modelo de estado e filtragem de Kalman

Com base no modelo obtido na secção 3.1, pretende-se escrever (3.10) na forma (Apêndice B)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi(\mathbf{x}_k, k) + \mathbf{w}_k. \quad (3.11)$$

Definindo cinco variáveis de estado, uma para o ângulo da velocidade do veículo relativamente a uma direcção de referência, duas para a posição do veículo nas coordenadas  $(x, y)$ , uma para a velocidade angular e a última para a velocidade linear, o vector de estados,  $\mathbf{x}$ , é dado por

$$\mathbf{x} = [\psi \quad p_x \quad p_y \quad \omega \quad v]^T. \quad (3.12)$$

A partir de (3.10) obtém-se a matriz de transição de estado do equivalente discreto no instante  $t_k$ .

$$\phi(\mathbf{x}_k, k) = \begin{bmatrix} \psi_k \\ p_{xk} \\ p_{yk} \\ \omega_k \\ v_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_k \Delta t \\ \mathbf{I} - \mathbf{R}(\omega_k \Delta t) \\ \omega_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_k \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

onde  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$  é o tempo de amostragem do filtro.

A matriz  $\mathbf{w}_k$  de (3.11) é dada por

$$\mathbf{w}_k = \sqrt{\Delta t} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_\omega \\ \eta_v \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

onde o elementos  $\eta_\omega$  e  $\eta_v$  representam ruído branco gaussiano e independente com a variância dada, respectivamente, por  $\sigma_\omega^2$  e  $\sigma_v^2$ .

A matriz de covariância do ruído de estado é dada por

$$\mathbf{Q}_k = \text{blkdiag} \left( \mathbf{0}_{3 \times 3}, \Delta t \begin{bmatrix} \sigma_\omega^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{bmatrix} \right), \quad (3.15)$$

onde *blkdiag* representa uma matriz diagonal por blocos.

### 3.1.2. Linearização do modelo

Como se pode facilmente verificar, o modelo a que se chegou é não linear. Contudo, é possível obter uma aproximação linear de  $\phi(\mathbf{x}_k, k)$  em torno do ponto de funcionamento através da expansão em série de Taylor de primeira ordem. A linearização do modelo é feita em torno do valor de estado estimado pelo modelo.

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}_k, k)}{\partial \mathbf{x}_k} = [\mathbf{J}_1 \mid \mathbf{J}_2 \mid \mathbf{J}_3], \quad (3.16)$$

onde as matrizes  $\mathbf{J}_1$ ,  $\mathbf{J}_2$  e  $\mathbf{J}_3$  são dadas por (3.17).

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{R}(\psi) \cdot \frac{\mathbf{I} - \mathbf{R}(\omega \Delta t)}{\omega} \cdot \begin{bmatrix} -v \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix};$$



Reescrevendo novamente o sistema na forma definida em (3.11), as novas variáveis de estado conduzem à matriz de transição dada por

$$\phi(\mathbf{x}_k, \mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \Psi_k \\ p_{xk} \\ p_{yk} \\ v_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_0 \Delta t \\ \mathbf{I} - \mathbf{R}(\omega_0 \Delta t) \\ \omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_k \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

A matriz de transição definida em (3.20) distingue-se da matriz definida em (3.13), na medida em que a velocidade angular é conhecida.

A matriz  $\mathbf{w}_k$  define-se, à semelhança de (3.14), como

$$\mathbf{w}_k = \eta_v \sqrt{\Delta t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Apesar das simplificações efectuadas no modelo do sistema, o modelo continua a ser não linear, pelo que a estimativa do estado terá de ser feita recorrendo a um filtro de Kalman estendido. Este facto obriga à linearização do sistema em torno do ponto de funcionamento utilizando os termos de primeira ordem da expansão de Taylor. O Jacobiano da matriz de transição resulta na matriz dada por (3.16), onde as matrizes  $\mathbf{J}_1$ ,  $\mathbf{J}_2$  e  $\mathbf{J}_3$  são dadas por

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{R}(\psi) \cdot \frac{\mathbf{I} - \mathbf{R}(\omega \Delta t)}{\omega} \cdot \begin{bmatrix} -v \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{0}_{1 \times 1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{R}(\psi) \cdot \frac{\mathbf{I} - \mathbf{R}(\omega \Delta t)}{\omega} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

calculado em torno do valor das variáveis de estado estimadas pelo modelo.

A matriz de covariância do ruído de estado resulta, então, em

$$\mathbf{Q}_k = \text{blkdiag}(0_{3 \times 3}, \Delta t \sigma_v^2). \quad (3.23)$$

### 3.1.4. Trajectórias em linha recta

Analisando os modelos descritos nas secções 3.1.1 e 3.1.3 verifica-se que existe uma singularidade para trajectórias em linha recta, ou seja, para trajectórias com velocidade angular nula ( $\omega = 0$ ). Na segunda equação de (3.8), que se transcreve em seguida por simplificação, verifica-se a existência da singularidade.

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{R}(\psi_0) \cdot \frac{\mathbf{I} - \mathbf{R}(\omega_0 \cdot (t - t_0))}{\omega_0} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

onde  $\mathbf{p} = [p_x \ p_y]^T$  são as posições do veículo no referencial definido e  $\mathbf{p}_0 = [p_{x0} \ p_{y0}]^T$  são as condições iniciais para as posições no mesmo referencial.

Com o objectivo de ultrapassar esta limitação calcula-se o limite de (3.24) para velocidades angulares que tendem para zero (Apêndice A)

$$\mathbf{p} = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \left\{ \mathbf{p}_0 + \mathbf{R}(\psi_0) \cdot \frac{\mathbf{I} - \mathbf{R}(\omega_0 \cdot (t - t_0))}{\omega_0} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\} = \mathbf{p}_0 + v_0 \Delta t \cdot \begin{bmatrix} \cos \psi_0 \\ \sin \psi_0 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Resulta, então que, para velocidades angulares nulas ( $\omega = 0$ ), o modelo descrito por (3.8) é substituído por

$$\begin{bmatrix} \psi(t) \\ p_x(t) \\ p_y(t) \\ \omega(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_0 \\ p_{x0} \\ p_{y0} \\ \omega_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_0(t - t_0) \\ v_0 \Delta t \cdot \begin{bmatrix} \cos \psi_0 \\ \sin \psi_0 \end{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

que é semelhante ao modelo (3.1), do qual se partiu para deduzir os modelos das secções anteriores.

A matriz de transição de estado do equivalente discreto é dada por

$$\phi(\mathbf{x}_k, k) = \begin{bmatrix} \psi_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{xk} & 0 & 0 & v\Delta t \cos \psi_k \\ 0 & 0 & p_{yk} & 0 & v\Delta t \sin \psi_k \\ 0 & 0 & 0 & \omega_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_k \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

que é também não linear. Desta forma continua a ser necessário utilizar o filtro de Kalman estendido para cálculo da estimativa do estado. A expansão em série de Taylor de (3.27) resulta em

$$\frac{d\phi(\mathbf{x}_k, k)}{d\mathbf{x}_k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v\Delta t \sin \psi_k & 1 & 0 & 0 & \Delta t \cos \psi_k \\ v\Delta t \cos \psi_k & 0 & 1 & 0 & \Delta t \sin \psi_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

A matriz  $\mathbf{w}_k$  e a matriz de covariância de ruído de estado  $\mathbf{Q}_k$ , mantêm-se iguais a (3.14) e a (3.15), respectivamente.

### 3.2. Constant Turn model with known turn rate

Nesta secção apresenta-se um modelo alternativo para o seguimento de um veículo que descreva uma trajectória num plano horizontal com velocidade angular conhecida [8]. Reescrevendo (3.1), tem-se

$$\begin{cases} \dot{\psi} = a_n(t)/v(t) \\ \dot{p}_x = v(t) \cos \psi(t) \\ \dot{p}_y = v(t) \sin \psi(t) \\ \dot{v}(t) = a_t(t) \end{cases}, \quad (3.29)$$

onde  $p_x$ ,  $p_y$  são as posições do veículo,  $v$  é a velocidade linear do veículo,  $\psi$  é o ângulo da velocidade do veículo relativamente a uma direcção de referência e  $a_t$  e  $a_n$  são a aceleração tangencial e normal do veículo no plano horizontal, respectivamente.

Podem-se considerar os seguintes casos particulares para o modelo descrito em (3.29):

- Movimento rectilíneo uniforme -  $a_n = 0$ ,  $a_t = 0$ ;
- Movimento rectilíneo uniformemente acelerado -  $a_n = 0$ ,  $a_t = \text{cte} \neq 0$ ;
- Movimento circular uniforme -  $a_n = \text{cte} \neq 0$ ,  $a_t = 0$ .

Uma vez que o veículo descreve uma trajectória circular uniforme, considera-se que a aceleração tangencial é nula ( $a_t = 0$ ) e que a aceleração normal é constante e diferente de zero ( $a_n = a_{n0} = \text{cte}$ ,  $a_n \neq 0$ ). A primeira equação de (3.29) simplifica-se, então, para

$$\dot{\psi} = \omega, \quad (3.30)$$

onde  $\omega$  é a velocidade angular do veículo.

Como  $\omega$  e  $v$  são conhecidos, resulta no vector de estado

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p_x & \dot{p}_x & p_y & \dot{p}_y \end{bmatrix}^T \quad (3.31)$$

De (3.29) resulta que o modelo de estado pode ser descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ -\omega \dot{y}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \omega \dot{x}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{G}\mathbf{w}(t), \quad (3.32)$$

onde  $\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} w_x & w_y \end{bmatrix}^T$  é ruído branco gaussiano.

Reescrevendo (3.32) na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\omega)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{w}(t), \quad (3.33)$$

resulta que as matrizes  $\mathbf{F}(\omega)$  e  $\mathbf{G}$  são dadas por

$$\mathbf{F}(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

O equivalente discreto do modelo descrito é dado por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k. \quad (3.36)$$

A matriz de transição do equivalente, em tempo discreto, é obtida através da exponencial da matriz  $\mathbf{F}$  [2]

$$\phi_k = e^{\mathbf{F}\Delta t} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin \omega \Delta t}{\omega} & 0 & -\frac{1 - \cos \omega \Delta t}{\omega} \\ 0 & \cos \omega \Delta t & 0 & -\sin \omega \Delta t \\ 0 & \frac{1 - \cos \omega \Delta t}{\omega} & 1 & \frac{\sin \omega \Delta t}{\omega} \\ 0 & \sin \omega \Delta t & 0 & \cos \omega \Delta t \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

O vector de ruído  $\mathbf{w}_k$ , que representa um conjunto de acelerações de valor desconhecido a actuar no sistema, é dado, no seu equivalente discreto, por

$$\mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} \frac{\sin \omega \Delta t}{\omega} & -\frac{1 - \cos \omega \Delta t}{\omega} \\ \cos \omega \Delta t & -\sin \omega \Delta t \\ \frac{1 - \cos \omega \Delta t}{\omega} & \frac{\sin \omega \Delta t}{\omega} \\ \sin \omega \Delta t & \cos \omega \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

O equivalente da matriz de covariância do ruído de estado é dada por [2]

$$\mathbf{Q}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(t_{k+1}, \xi) \mathbf{G}(\xi) E[\mathbf{w}(\xi) \mathbf{w}^T(\tau)] \mathbf{G}^T(\tau) \phi^T(t_{k+1}, \tau) d\xi d\tau, \quad (3.39)$$

que resulta em (apêndice D)

$$\mathbf{Q}_k = [\mathbf{Q}_k^1 \quad \mathbf{Q}_k^2 \quad \mathbf{Q}_k^3 \quad \mathbf{Q}_k^4]^T, \quad (3.40)$$

onde  $\mathbf{Q}_k^j, j=1, 2, 3, 4$  é dado por

$$\mathbf{Q}_k^1 = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x^2(-1/4.\sin(2\omega\Delta t) + \omega\Delta t/2)}{\omega^3} + \frac{\sigma_y^2(\sin(2\omega\Delta t)/4 + 3/2.\Delta t\omega - 2\sin(\omega\Delta t))}{\omega^3} \\ \frac{\sigma_x^2 \sin(2\omega\Delta t)^2}{2\omega^2} + \frac{\sigma_y^2(\cos(\omega\Delta t)^2/2 - \cos(\omega\Delta t))}{\omega^2} \\ \frac{\sigma_x^2(\cos(\omega\Delta t)^2/2 - \cos(\omega\Delta t))}{\omega^3} - \frac{\sigma_y^2(\cos(\omega\Delta t)^2/2 - \cos(\omega\Delta t))}{\omega^3} \\ \frac{\sigma_x^2(-1/4.\sin(2\omega\Delta t) + \omega\Delta t/2)}{\omega^2} + \frac{\sigma_y^2(\sin(2\omega\Delta t)/4 + 1/2.\Delta t\omega - \sin(\omega\Delta t))}{\omega^2} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{Q}_k^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k^1(2) \\ \frac{\sigma_x^2(1/4.\sin(2\omega\Delta t) + \omega\Delta t/2)}{\omega} + \frac{\sigma_y^2(-1/4.\sin(2\omega\Delta t) + \omega\Delta t/2)}{\omega} \\ \frac{\sigma_x^2(-\sin(2\omega\Delta t)^2/4 - \omega\Delta t/2 + \sin(\omega\Delta t))}{\omega^2} - \frac{\sigma_y^2(-1/4.\sin(2\omega\Delta t) + \omega\Delta t/2)}{\omega^2} \\ \frac{\sigma_x^2 1/2.\sin(2\omega\Delta t)^2}{\omega} - \frac{\sigma_y^2 \sin(2\omega\Delta t)^2}{2\omega} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{Q}_k^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k^1(3) \\ \mathbf{Q}_k^2(3) \\ \frac{\sigma_x^2(\sin(2\omega\Delta t)/4 + 3/2.\Delta t\omega - 2\sin(\omega\Delta t))}{\omega^3} + \frac{\sigma_y^2(-1/4.\sin(2\omega\Delta t) + \omega\Delta t/2)}{\omega^3} \\ \frac{\sigma_x^2(\cos(\omega\Delta t)^2/2 - \cos(\omega\Delta t))}{\omega^2} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_y^2 \sin(\omega\Delta t)^2}{\omega^2} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{Q}_k^4 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k^1(4) \\ \mathbf{Q}_k^2(4) \\ \mathbf{Q}_k^3(4) \\ \frac{\sigma_x^2(-1/4.\sin(2\omega\Delta t) + \omega\Delta t/2)}{\omega} + \frac{\sigma_y^2(\sin(2\omega\Delta t)^2/4 + \omega\Delta t/2)}{\omega} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

onde  $\mathbf{Q}_k^j(n), j, n=1, 2, 3, 4$  representa a posição  $n$  da matriz  $\mathbf{Q}_k^j$ .

### 3.3. Análise de observabilidade

O desempenho de um filtro não-linear está dependente de vários factores dos quais se destacam o valor do estado do sistema, o ruído de estado e de observação. No entanto, só se pode garantir o correcto funcionamento do filtro se o sistema for completamente observável. Caso contrário não é possível garantir a existência e unicidade de estimativas correctas do vector de estado.

O conceito de observabilidade está directamente ligado à capacidade de se determinar o valor do estado do sistema com base na solução da equação correspondente ao sistema.

O sistema linear discreto descrito por

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \phi(\mathbf{x}_k, k) \mathbf{x}_k, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \phi \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{cases}, \quad (3.45)$$

diz-se observável no intervalo  $[k_0, k_f]$ ,  $k_f > k_0$ , se qualquer estado inicial  $\mathbf{x}_{k_0} = \mathbf{x}_0$  for univocamente determinado pela solução da equação homogénea correspondente  $\mathbf{z}_k$  no intervalo  $[k_0, k_f - 1]$ .

Esta característica do sistema pode ser interpretada matematicamente de várias formas, baseadas na característica da matriz de observabilidade ou no Gramiano de observabilidade [9]. Enquanto a característica da matriz de observabilidade permite apenas concluir sobre a observabilidade do sistema, o Gramiano de observabilidade permite tirar conclusões mais profundas sobre a observabilidade do sistema.

A solução da equação homogénea no intervalo  $[k_0, k_f]$  é dada por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_{k_0} \\ \mathbf{z}_{k_0+1} \\ \dots \\ \mathbf{z}_{k_f-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{k_0} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{H}_{k_0+1} \phi(k_0+1, k_0) \mathbf{x}_0 \\ \dots \\ \mathbf{H}_{k_f-1} \phi(k_f-1, k_0) \mathbf{x}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}(k_0, k_f) \mathbf{x}_0, \quad (3.46)$$

onde se define a matriz de observabilidade  $\mathbf{O}(k_0, k_f) \in \mathbb{R}^{m(k_f - k_0) \times n}$

$$\mathbf{O}(k_0, k_f) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{k_0} \\ \mathbf{H}_{k_0+1}\phi(k_0+1, k_0) \\ \dots \\ \mathbf{H}_{k_f-1}\phi(k_f-1, k_0) \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

O sistema linear discreto dado por (3.45) diz-se observável no intervalo  $[k_0, k_f]$  se e só se

$$\text{rank } \mathbf{O}(k_0, k_f) = n \quad (3.48)$$

onde *rank* representa a característica da matriz e  $n$  a dimensão do vector de estados  $\mathbf{x}$ . A característica da matriz de observabilidade dada por (3.48) indica o número de variáveis de estado observáveis no sistema.

Outra forma de analisar a observabilidade do sistema consiste no cálculo do Gramiano de observabilidade. O sistema linear dado por (3.45) diz-se observável no intervalo  $[k_0, k_f]$  se e só se o Gramiano de observabilidade

$$\mathbf{M}(k_0, k_f) = \sum_{j=k_0}^{k_f-1} \phi(j, k_0)^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \phi(j, k_0), \quad \mathbf{M}(k_0, k_f) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.49)$$

for invertível, onde  $\phi(j, k_0) = \prod_{k=k_0}^{j-1} \phi(k+1, k)$ .

Definindo a matriz de observabilidade como

$$\mathbf{O}(k_0, k_f)^T = \left[ \mathbf{H}_{k_0}^T \quad \phi(k_0+1, k_0)^T \mathbf{H}_{k_0+1}^T \quad \dots \quad \phi(k_f-1, k_0)^T \mathbf{H}_{k_f-1}^T \right], \quad (3.50)$$

o Gramiano de observabilidade também pode ser calculado através de

$$\mathbf{M}(k_0, k_f) = \mathbf{O}(k_0, k_f)^T \mathbf{O}(k_0, k_f). \quad (3.51)$$

A observabilidade do sistema é determinada com base nas sensibilidades para variação das observações segundo várias direcções. Estas sensibilidades são calculadas através do quociente dos valores próprios do Gramiano de observabilidade. Se o quociente entre o menor e o maior valor próprio for próximo da unidade, o sistema é observável em todas as direcções. Caso o quociente seja próximo de zero, existem direcções do espaço menos observáveis do que outras, em particular, as observações correspondentes ao menor valor próprio sofrem pequenas variações apesar do estado ter grandes variações.

De modo a evitar o cálculo dos valores próprios do Gramiano de observabilidade e uma vez que esta matriz é definida positiva, o quociente entre o menor e o maior valores próprios é feito com base no determinante e no traço do Gramiano.

O determinante de uma matriz é calculado através do produto dos seus valores próprios enquanto que o traço é calculado através da soma dos valores próprios. Se um dos valores próprios for nulo significa que o determinante também é nulo, enquanto que se nenhum dos determinantes se anular, o traço da matriz também não se anula, caso a matriz seja definida positiva.

Para que o quociente entre o menor e o maior valores próprios seja próximo de zero é necessário que o menor valor próprio também seja próximo de zero. Quando o menor valor próprio se anula, o determinante também se anula. Como o Gramiano de observabilidade é uma matriz definida positiva, se o maior valor próprio não se anular, então o traço também não se anula. Como conclusão é possível afirmar que o sistema terá direcções não observáveis se o determinante do Gramiano de observabilidade se anular, mesmo com um traço diferente de zero. Se o sistema for observável em todas as direcções, todos os valores próprios são da mesma ordem de grandeza e não nulos.

Resumindo, um sistema diz-se não observável no intervalo  $[k_0, k_f]$  se

$$\det \mathbf{M}(k_0, k_f) = 0 \wedge \text{tr} \mathbf{M}(k_0, k_f) \neq 0 \quad (3.52)$$

e observável no mesmo intervalo se

$$\det \mathbf{M}(k_0, k_f) \neq 0 \wedge \text{tr} \mathbf{M}(k_0, k_f) \neq 0. \quad (3.53)$$

É possível chegar a uma análise semelhante para sistemas não lineares. Assumindo que o sistema é modelado por

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \phi(\mathbf{x}_k, \mathbf{k}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \phi \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{cases}, \quad (3.54)$$

e que as observações nos vários instantes de tempo se relacionam com o estado do sistema no instante inicial da forma

$$\begin{cases} \mathbf{z}_0 = \mathbf{H}\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{z}_1 = \mathbf{H}\phi(\mathbf{x}_0, 1) \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k_f} = \mathbf{H}\phi(\mathbf{x}_0, k_f) \end{cases}, \quad (3.55)$$

é possível analisar a sensibilidade da solução de (3.55) às variações dos valores das observações através da expansão em série de Taylor de primeira ordem,

$$\begin{cases} \mathbf{z}_0 + \varepsilon_{z_0} \approx \mathbf{H}\mathbf{x}_0 + \mathbf{H}\varepsilon_{x_0} \\ \mathbf{z}_1 + \varepsilon_{z_1} \approx \mathbf{H}\phi(\mathbf{x}_0, 1) + \mathbf{H} \frac{d\phi(\mathbf{x}_0, 1)}{d\mathbf{x}_k} \varepsilon_{x_1} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k_f} + \varepsilon_{z_{k_f}} \approx \mathbf{H}\phi(\mathbf{x}_0, k_f) + \mathbf{H} \frac{d\phi(\mathbf{x}_0, k_f)}{d\mathbf{x}_k} \varepsilon_{x_{k_f}} \end{cases}, \quad (3.56)$$

que se simplifica para (3.57), uma vez que  $\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k$ .

$$\begin{cases} \varepsilon_{z_0} \approx \mathbf{H}\varepsilon_{x_0} \\ \varepsilon_{z_1} \approx \mathbf{H} \frac{d\phi(\mathbf{x}_0, 1)}{d\mathbf{x}_k} \varepsilon_{x_1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{z_{k_f}} \approx \mathbf{H} \frac{d\phi(\mathbf{x}_0, k_f)}{d\mathbf{x}_k} \varepsilon_{x_{k_f}} \end{cases}. \quad (3.57)$$

A matriz de observabilidade define-se, então, como

$$\mathbf{O}(\mathbf{x}_k, k_f) = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H} \frac{d\phi(\mathbf{x}_0, 1)}{d\mathbf{x}_k} \\ \vdots \\ \mathbf{H} \frac{d\phi(\mathbf{x}_0, k_f)}{d\mathbf{x}_k} \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

O Gramiano de observabilidade é obtido através da expressão (3.51), de onde resulta

$$\mathbf{M}(k_0, k_f) = \mathbf{O}(k_0, k_f)^T \mathbf{O}(k_0, k_f). \quad (3.59)$$

A análise desta matriz permite tirar conclusões, de uma forma aproximada, sobre a observabilidade do sistema. Se a variação do estado inicial originar variações nas observações, então o sistema é observável. Se a variação do estado inicial segundo determinadas direcções não origina variações nas observações então o sistema é não observável.

### 3.3.1. Observabilidade dos modelos

A análise de observabilidade dos modelos apresentados nas secções 3.1.1 e 3.1.3 foi feita tendo como base a teoria apresentada no capítulo anterior. Para o modelo que descreve o movimento ao longo de trajectórias circulares foi deduzida uma expressão para o Gramiano de observabilidade e determinadas as condições para garantir a observabilidade do sistema. As conclusões retiradas do Gramiano foram validadas por simulação do sistema através do método da característica da matriz. Para o modelo *Constant model with known Turn Rate* apenas foi analisado a perda de observabilidade através da característica da matriz de observabilidade.

Considerando o modelo para movimento ao longo de trajectórias circulares descrito por (3.13) é calculado o Gramiano de observabilidade e a matriz de observabilidade para um conjunto de três amostras, assumindo que o sensor utilizado permite obter a posição do sistema,

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k, \quad (3.60)$$

onde  $\mathbf{x}_k$  e  $\mathbf{z}_k$  são, respectivamente, o valor de estado e as observações no instante  $k$ . A observabilidade do sistema é analisada com base no cálculo do determinante e do traço do Gramiano de observabilidade do sistema linearizado, do qual resulta [6]

$$\det \mathbf{M}(\mathbf{x}_k, k_0 + 2\Delta t) = 6v^4 \Delta t^8 m(\omega \Delta t) \quad (3.61)$$

$$\text{tr} \mathbf{M}(\mathbf{x}_k, k_0 + 2\Delta t) = 6 + f(\omega, v, \Delta t) \quad (3.62)$$

onde  $f(\omega, v, \Delta t)$  é uma função não negativa e  $m(\omega \Delta t)$  é uma função com a evolução representada na figura 3.1.

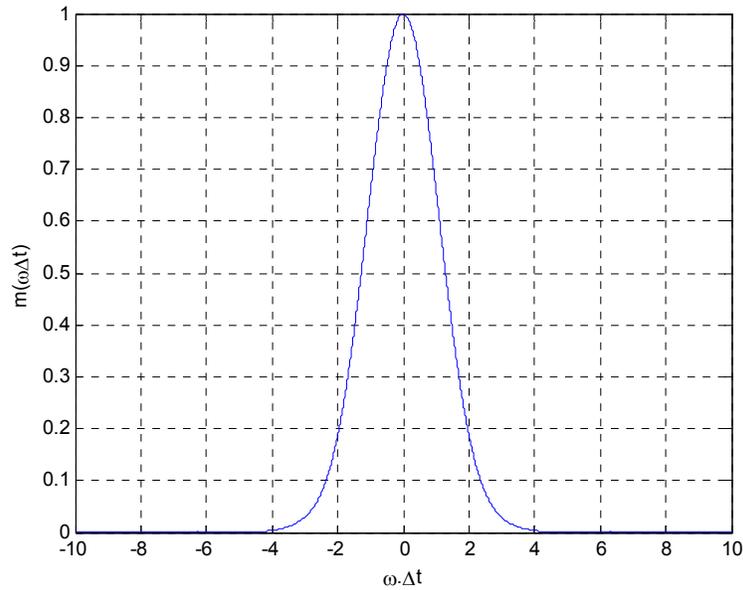


Figura 3.1 - Evolução da função  $m(\omega\Delta t)$ .

Analisando as equações (3.61) e (3.62) é possível concluir que existem direcções do espaço em que o sistema perde observabilidade. Verifica-se através de (3.62) que o traço do sistema é sempre positivo e maior ou igual a seis, pelo que o Gramiano de observabilidade não tem nenhum valor próprio nulo. Conclui-se assim que o sistema tem direcções do espaço observáveis. Analisando o determinante do Gramiano de observabilidade verifica-se que o sistema perde observabilidade quando a velocidade linear se anula. A observabilidade do sistema também é perdida quando a velocidade angular é algumas ordens de grandeza superior à velocidade linear, uma vez que a função  $m(\omega\Delta t)$  tende a anular-se.

O sistema também perde observabilidade para períodos de amostragem que se aproximem de zero, uma vez que (3.61) tende para zero nessas situações.

Na tabela 3.1 apresenta-se o número de variáveis de estado observáveis para cada uma das situações referidas anteriormente obtidas pela característica da matriz de observabilidade. Para que o sistema seja observável, a característica da matriz terá de ser cinco, ou seja, o número de variáveis de estado do sistema. Estas conclusões estão resumidas na tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Análise de observabilidade para o modelo para movimento ao longo de trajectórias circulares.

Condições de teste	$rank \mathbf{O}(k_0, k_f)$ Modelo para movimento ao longo de circunferências
$v=0 \text{ m.s}^{-1}$	3
$\omega=0,1 \text{ rad.s}^{-1} \quad v=0,01 \text{ m.s}^{-1}$	4
$\Delta t = 1 \times 10^{-3} \text{ s}$	4
$v=5 \text{ m.s}^{-1}, \omega=0,07 \text{ rad.s}^{-1}$ $\Delta t = 1 \text{ s}$	5

Através da análise dos resultados obtidos e apresentados na tabela 3.1 verifica-se que o sistema perde observabilidade nas mesmas situações determinadas através do Gramiano de observabilidade. Quando a velocidade linear do veículo é nula apenas são observáveis três variáveis de estado. As variáveis observáveis são as relacionadas com a posição do veículo e velocidade linear, enquanto que a velocidade angular e a direcção do veículo não provocam qualquer alteração nas observações independentemente da variação do seu estado. Este fenómeno é justificado fisicamente através do facto de o veículo poder estar a rodar em torno de si mesmo, não sendo possível obter informação sobre o estado do sistema com base nas medições dos sensores. Para a situação em que a velocidade angular é poucas ordens de grandezas superior à velocidade linear, apenas são observáveis quatro variáveis de estado. O fenómeno verificado é semelhante à situação em que a velocidade linear é nula, uma vez que o veículo pode estar a rodar sobre si mesmo.

Para intervalos de amostragem que se aproximam de zero apenas são observáveis quatro variáveis de estado, pelo que se conclui que o sistema também é não observável. Contribui para esta situação o facto de que, quando o período de amostragem tende para zero, a informação sobre a evolução do sistema é reduzida.

Os resultados da análise de observabilidade para o modelo *Constant model with known Turn Rate* apresentam-se na tabela 3.2

Tabela 3.2 - Análise de observabilidade para o modelo *Constant model with known Turn Rate*.

Condições de teste	$rank \mathbf{O}(k_0, k_f)$ <i>Constant model with known turn rate</i>
$v=0 \text{ m.s}^{-1}$	4
$\omega=0,1 \text{ rad.s}^{-1} \quad v=0,0001 \text{ m.s}^{-1}$	4
$\Delta t = 1 \times 10^{-15} \text{ s}$	2
$v=5 \text{ m.s}^{-1}, \omega=0,07 \text{ rad.s}^{-1} \quad \Delta t = 1 \text{ s}$	4

Analisando a tabela 3.2 verifica-se que o modelo *Constant model with known Turn Rate* é observável nas situações em que a velocidade linear é nula e quando a velocidade angular é superior à velocidade linear. Este facto deve-se às variáveis de estado a estimar neste modelo serem apenas a posição e a velocidade. A observabilidade apenas é perdida nas situações em que o período de amostragem tende para zero devido às razões enunciadas anteriormente.

### 3.4. Simulação e análise dos resultados

Foi analisado o desempenho dos dois modelos estudados ao longo de uma trajectória circular, face a vários valores da variância do ruído nas medições dos sensores. Os modelos para movimento ao longo de circunferências e *Constant model with known Turn Rate* foram implementados utilizando um filtro de Kalman estendido e um filtro de Kalman discreto, respectivamente. As medições são afectadas por ser ruído branco de média nula e com a variância apresentada na tabela 3.3.

As simulações foram efectuadas nas mesmas condições para ambos os modelos. A trajectória efectuada pelo veículo teve como velocidade angular  $0,07 \text{ rad.s}^{-1}$  e velocidade linear  $5 \text{ m.s}^{-1}$ . A posição inicial do veículo foi a uma distância de 10 m do sensor tanto segundo  $x$  como  $y$ . O período de amostragem considerado foi de 1 s. A trajectória de teste encontra-se representada na figura 3.2.

Tabela 3.3 - Valores da variância do ruído que afecta os sensores, considerada nas várias simulações.

Medida do sensor	Variância					
	Situação 1	Situação 2	Situação 3	Situação 4	Situação 5	Situação 6
distância [ $m^2$ ]	$0,01^2$	$0,05^2$	$0,1^2$	$1^2$	$3^2$	$4^2$
ângulo [ $(^\circ)^2$ ]	$0,01^2$	$0,05^2$	$1^2$	$2^2$	$2^2$	$3^2$

Medida do sensor	Variância				
	Situação 7	Situação 8	Situação 9	Situação 10	Situação 11
distância [ $m^2$ ]	$4^2$	$5^2$	$5^2$	$5^2$	$6^2$
ângulo [ $(^\circ)^2$ ]	$4^2$	$4^2$	$5^2$	$6^2$	$6^2$

A título de exemplo representa-se nas figuras 3.3 e 3.5 a trajectória real descrita pelo veículo e a estimada por cada um dos modelos. Nas figuras 3.4 e 3.6 representa-se, para ambos os modelos, o erro de estimação das variáveis de estado obtido para a situação 4 indicada na tabela 3.3.

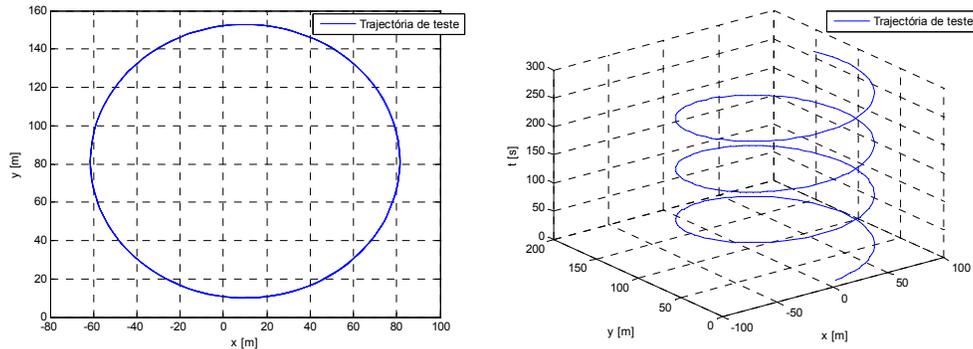


Figura 3.2 - Representação da trajectória de teste no plano  $(x, y)$  e evolução ao longo do tempo  $(x, y, t)$ .

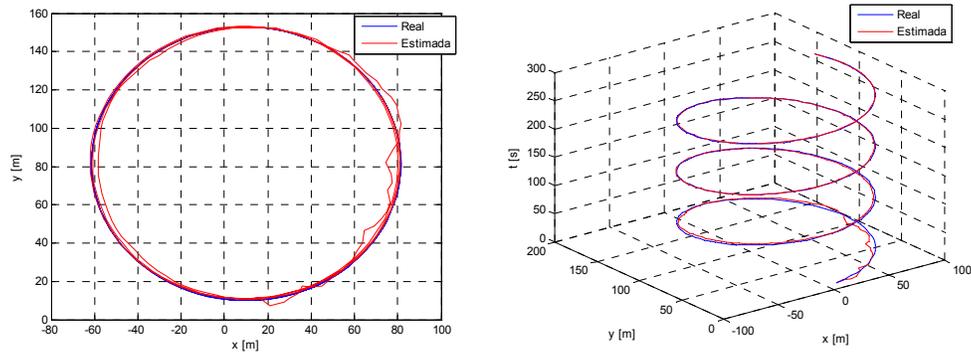


Figura 3.3 - Simulação da trajetória descrita pelo veículo usando o modelo para movimento ao longo de circunferências.

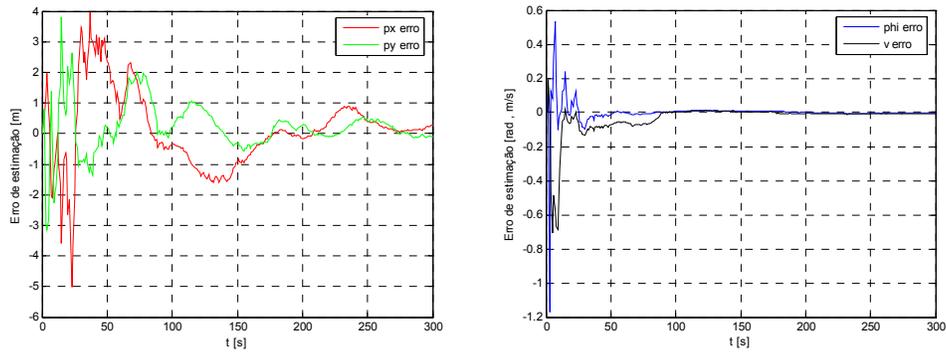


Figura 3.4 - Erro de estimação das variáveis de estado usando o modelo para movimento ao longo de circunferências.

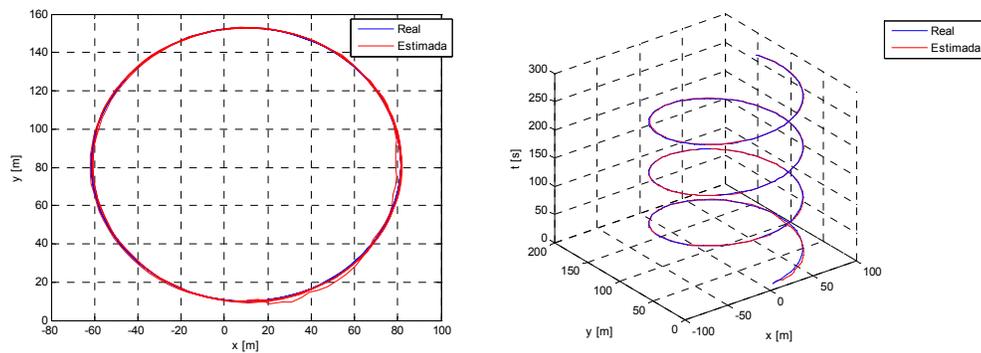


Figura 3.5 - Simulação da trajetória descrita pelo veículo usando o *Constant model with known Turn Rate*.

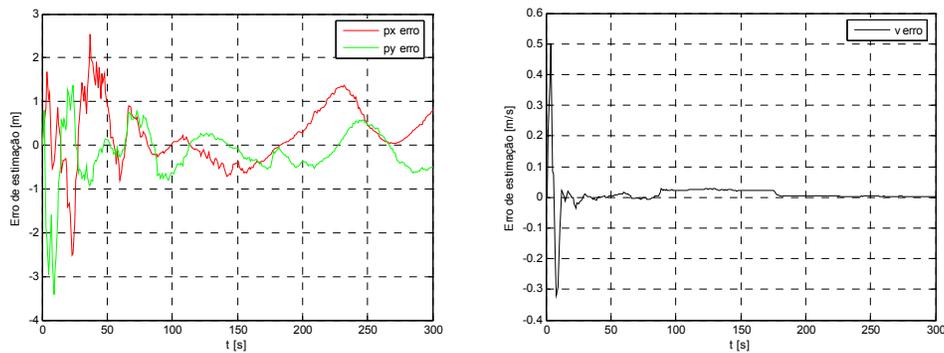


Figura 3.6 - Erro de estimação das variáveis de estado usando o *Constant model with known Turn Rate*.

Para simulação e comparação dos modelos efectuaram-se simulações de Monte-Carlo com 30 experiências para cada combinação de parâmetros considerada e utilizando ruído independente nas várias simulações. Calculou-se o erro quadrático médio para cada uma das situações de ruído resumidas na tabela 3.3. Os resultados obtidos apresentam-se na tabela 3.4.

Tabela 3.4 - Raiz quadrada do erro quadrático médio na estimativa das variáveis de estado de posição para os dois modelos testados.

Variância do ruído		Modelo para movimento ao longo de circunferências		<i>Constant model with known Turn Rate</i>	
		Erro quadrático médio		Erro quadrático médio	
distância [m <sup>2</sup> ]	ângulo [(°) <sup>2</sup> ]	px erro	py erro	px erro	py erro
0,01 <sup>2</sup>	0,01 <sup>2</sup>	5,275E-03	4,102E-03	8,059E-02	6,366E-02
0,05 <sup>2</sup>	0,05 <sup>2</sup>	1,518E-02	1,345E-02	1,865E-01	1,420E-01
0,1 <sup>2</sup>	1 <sup>2</sup>	9,813E-02	6,894E-02	4,033E-01	3,196E-01
1 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup>	2,242E-01	1,727E-01	6,084E-01	5,563E-01
3 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup>	3,621E-01	4,414E-01	6,643E-01	6,233E-01
4 <sup>2</sup>	3 <sup>2</sup>	4,929E-01	5,273E-01	7,388E-01	6,774E-01
4 <sup>2</sup>	4 <sup>2</sup>	5,665E-01	5,280E-01	7,921E-01	7,049E-01
5 <sup>2</sup>	4 <sup>2</sup>	6,704E-01	6,435E-01	8,098E-01	7,275E-01
5 <sup>2</sup>	5 <sup>2</sup>	7,595E-01	6,721E-01	8,761E-01	7,656E-01
5 <sup>2</sup>	6 <sup>2</sup>	9,977E-01	8,526E-01	9,458E-01	8,065E-01
6 <sup>2</sup>	6 <sup>2</sup>	9,320E-01	8,383E-01	9,673E-01	8,337E-01

Através da análise dos resultados obtidos verifica-se que o modelo para movimento ao longo de circunferências apresenta o erro quadrático médio inferior ao modelo *Constant model with known Turn Rate* para todas as situações de ruído testadas. Este facto permite concluir que o desempenho do modelo para movimento ao longo de circunferências é superior face ao outro modelo analisado, nas condições testadas. É de notar que o desempenho da estimação se degrada com o aumento da perturbação nas observações e que o erro quadrático médio do modelo para movimento ao longo de circunferências se aproxima do erro quadrático médio do modelo *Constant model with known Turn Rate*.

## Capítulo 4

# Limites de desempenho dos algoritmos de estimação

A necessidade de determinar o melhor estimador de parâmetros desconhecidos e determinísticos que, em média assume o verdadeiro valor do parâmetro (estimador centrado ou não enviesado) e que produz o menor erro quadrático médio, levou a que fossem desenvolvidas ferramentas matemáticas potentes. É nesta base que se formula o estudo dos limites de desempenho denominados na literatura anglo-saxónica Cramér Rao *Lower Bound* (CRLB). No entanto, esta ferramenta não permite determinar qual o estimador óptimo em geral. Apenas se consegue determinar a variância mínima que se pode obter com um estimador não enviesado. O facto de se poder determinar a variância mínima possível para um estimador, permite, na melhor das hipóteses, verificar se o estimador utilizado é o óptimo, ou verificar o quão longe este se encontra do estimador óptimo.

Neste capítulo aborda-se, numa fase inicial, a parte teórica necessária para compreender a ferramenta matemática utilizada para o cálculo do limite do desempenho dos estimadores (Cramér-Rao *Lower Bound* e *Posterior* Cramér-Rao *Bound*) e numa fase posterior determina-se o melhor desempenho possível de obter para cada um dos modelos considerados. Os resultados obtidos são comparados com os obtidos no capítulo 3.

### 4.1. Limite de desempenho de Cramér Rao

Considera-se que  $x$  é um parâmetro escalar determinístico e desconhecido que se pretende estimar com base nas observações representadas por  $z$ . Assumindo que o sistema é definido pela função densidade probabilidade dada por  $p(z; x)$  e que satisfaz a condição de regularidade

$$E \left[ \frac{\partial \ln p(\mathbf{z}; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] = 0, \quad \forall \mathbf{x}, \quad (4.1)$$

então a variância de qualquer estimador centrado satisfaz a desigualdade dada por

$$\text{var}(\hat{\mathbf{x}}) \geq \frac{1}{-E \left[ \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{z}; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \right]}, \quad (4.2)$$

onde o denominador é definido como a matriz de *Fisher*

$$J(\mathbf{x}) = -E \left[ \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{z}; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \right] \quad (4.3)$$

e é calculado através de

$$E \left[ \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{z}; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \right] = \int \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{z}; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} p(\mathbf{z}; \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (4.4)$$

Um estimador centrado satisfaz a igualdade expressa por (4.2) se e só se for possível encontrar uma função  $g(\mathbf{x})$  tal que se possa escrever

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{z}; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = J(\mathbf{x}) \cdot (g(\mathbf{z}) - \mathbf{x}), \quad (4.5)$$

onde o estimador de mínima variância é dado por  $\hat{\mathbf{x}} = g(\mathbf{z})$ , sendo a respectiva variância  $\text{var}(\hat{\mathbf{x}}) = 1/J(\mathbf{x})$ .

#### 4.1.1. CRLB para sinais perturbados com ruído branco

Uma vez que é usual considerar-se que o sinal observado é perturbado com ruído branco, é de extrema utilidade deduzir uma expressão genérica para o cálculo do CRLB. Considera-se, então, que o sinal observado é da forma

$$f(n) = s(n; \mathbf{x}) + w(n), \quad n=0, 1, \dots, N-1, \quad (4.6)$$

onde  $w(n)$  representa ruído branco e o índice  $n$  é referente às várias observações do mesmo sinal.

A função de máxima verosimilhança que caracteriza o parâmetro desconhecido é dada por [7]

$$p(\mathbf{z}; \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (f(n) - s(n; \mathbf{x}))^2\right\}. \quad (4.7)$$

A segunda derivada do logaritmo de (4.7) em ordem ao parâmetro desconhecido conduz a

$$\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{z}; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ (f(n) - s(n; \mathbf{x})) \frac{\partial^2 s(n; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} - \left( \frac{\partial s(n; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 \right\}. \quad (4.8)$$

Tomando o valor esperado de (4.8), chega-se a

$$E\left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{z}; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2}\right] = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{\partial s(n; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^2, \quad (4.9)$$

que se pode traduzir em

$$\text{var}(\hat{\mathbf{x}}) \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{\partial s(n; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^2}. \quad (4.10)$$

A partir de (4.10) é possível verificar a importância do parâmetro desconhecido  $\mathbf{x}$ , no valor da variância do mesmo. Verifica-se que se um sinal variar rapidamente com a variação do parâmetro desconhecido, resulta em estimadores mais exactos.

#### 4.1.2. CRLB geral para sinais perturbados por ruído branco

Generalizando o cálculo do CRLB apresentado na secção 4.1.1 para a situação em que as observações assumem a forma

$$\mathbf{z} \sim N(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}), \mathbf{C}(\mathbf{x})) \quad (4.11)$$

onde tanto a média,  $\boldsymbol{\mu}$ , como a covariância,  $\mathbf{C}$ , dependem do parâmetro desconhecido.

Segundo estas condições a matriz de *Fisher* é dada por

$$J(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial \mu(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}) \left[ \frac{\partial \mu(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \left( \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 \right], \quad (4.12)$$

onde

$$\frac{\partial \mu(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial [\mu(\mathbf{x})]_1}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial [\mu(\mathbf{x})]_N}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial [\mathbf{C}(\mathbf{x})]_{11}}{\partial \mathbf{x}} & \dots & \frac{\partial [\mathbf{C}(\mathbf{x})]_{1N}}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial [\mathbf{C}(\mathbf{x})]_{N1}}{\partial \mathbf{x}} & \dots & \frac{\partial [\mathbf{C}(\mathbf{x})]_{NN}}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}. \quad (D.14)$$

O CRLB é, então dado por (4.2) e (4.3), onde a matriz de *Fisher* dada por (4.3) é igual a (4.12) [7].

## 4.2. CRLB para sistemas não lineares

Os métodos de cálculo descritos na secção 4.1 são métodos relativamente genéricos para determinar o CRLB nas condições apresentadas. No entanto, existem outros métodos, referidos em [10], [11], [12] e [13], relativamente expeditos para cálculo da melhor estimativa possível para sistemas não lineares.

### 4.2.1. CRLB para seguimento de veículos

O método mais simples de abordar esta problemática é o método sugerido por Taylor, [10], [11] e [13]. Este método constata que a inversa da matriz de *Fisher*, definida como  $J$ , de um sistema dinâmico não linear e variante no tempo com observações não lineares e

variantes no tempo perturbadas com ruído branco, evoluem da mesma forma que as equações da matriz de covariância do filtro de Kalman linearizado (em torno da verdadeira trajectória).

Considera-se o modelo de estado dado por

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\phi}_k(\mathbf{x}_k, k) \\ \mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k, k) + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (4.15)$$

onde

- $\mathbf{x}_k$  é o vector de variáveis de estado no instante  $t_k$ ;
- $\boldsymbol{\phi}_k$  é a matriz que relaciona  $\mathbf{x}_k$  com  $\mathbf{x}_{k+1}$ , também denominada por matriz de transição;
- $\mathbf{z}_k$  é o vector das observações no instante  $t_k$ ;
- $h$  é a matriz que relaciona as variáveis de estado com as observações no instante  $t_k$ ;
- $\mathbf{v}_k$  é o vector cujos elementos são ruído branco gaussiano e afectam as observações no instante  $t_k$ ,  $\mathbf{v}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k)$ .

Para determinar a matriz de *Fisher*, dada por (4.3), é necessário definir a função densidade probabilidade  $p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k)$ , sendo

$$\mathbf{Z}_k = \{\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_K\}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{X}_k = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K\}. \quad (4.17)$$

A partir de (4.15), e considerando que a condição inicial do vector de estados é conhecida na forma  $\hat{\mathbf{x}}_0 \sim N(\mathbf{x}_0, \mathbf{S}_0)$ , a função densidade probabilidade vem

$$p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{S}_0|^{1/2}} \exp\left\{-1/2(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T \mathbf{S}_0^{-1} (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)\right\} \cdot \prod_{k=1}^K \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |\mathbf{R}_k|^{1/2}} \exp\left\{-1/2(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k))^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k))\right\} \quad (4.18)$$

A derivada do logaritmo de (4.18), em ordem aos elementos que se pretendem estimar, resulta em

$$-\ln p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k) = cte + \frac{1}{2}(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T \mathbf{S}_0^{-1}(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K (\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k))^T \mathbf{R}_k^{-1}(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k)). \quad (4.19)$$

Considerando o valor esperado da segunda derivada em ordem às mesmas variáveis, a matriz de *Fisher* é dada por

$$\mathbf{J}_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{x}_K} \end{pmatrix}^T \mathbf{S}_0^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{x}_K} \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^K \begin{pmatrix} \frac{\partial h_k}{\partial \mathbf{x}_K} \end{pmatrix}^T \mathbf{R}_k^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial h_k}{\partial \mathbf{x}_K} \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

onde se omitiu alguma notação para simplificação.

Definindo

$$\mathbf{H}_k \triangleq \left. \frac{\partial h(\mathbf{x}_k, k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k} \quad (4.21)$$

como sendo a derivada da matriz de ligação em ordem às variáveis de estado, resulta então

$$\mathbf{J}_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{x}_K} \end{pmatrix}^T \mathbf{S}_0^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{x}_K} \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^K \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{x}_K} \end{pmatrix}^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{x}_K} \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Tendo em conta que

$$\frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{x}_K} = \frac{\partial \phi_k}{\partial \mathbf{x}}, \quad (4.23)$$

é possível reescrever (4.22) de forma recursiva,

$$\mathbf{J}_k = \left( \left. \frac{\partial \phi_k}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_k} \right)^{-T} \mathbf{J}_{k-1} \left( \left. \frac{\partial \phi_k}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_k} \right)^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k, \quad (4.24)$$

ou, em termos da matriz de covariância de ruído de estado,

$$\left( \mathbf{P}_k^* \right)^{-1} = \left( \left( \left. \frac{\partial \phi_k}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_k} \right) \mathbf{P}_{k-1}^* \left( \left. \frac{\partial \phi_k}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_k} \right)^T \right)^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k. \quad (4.25)$$

Considerando, novamente, a teoria do CRLB conclui-se que a variância de qualquer estimador centrado satisfaz a seguinte desigualdade<sup>1</sup>

$$\mathbf{P}_{\text{estimador},k} \geq \mathbf{P}_k^*. \quad (4.26)$$

<sup>1</sup> A desigualdade  $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$  significa que  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  é definida não negativa.

É de notar que, como se afirmou anteriormente, a equação (4.25) é idêntica à inversa da expressão de propagação da matriz de covariância do filtro de Kalman estendido, apenas com a diferença que a linearização se efectua em torno da trajectória real do veículo. De facto, a melhor estimativa possível de obter está dependente da trajectória considerada.

A aplicação deste método está dependente de duas restrições. Assumiu-se que as observações são perturbadas por ruído branco e que não existe ruído de estado a perturbar o sistema. Posto isto as variáveis de estado são variáveis determinísticas invés de variáveis aleatórias. Contudo, estas condições tornam este método de cálculo relativamente limitado, uma vez que os veículos raramente seguem uma trajectória determinística.

#### 4.2.2. Limite de desempenho Cramér Rao à posteriori (PCRB)

As restrições do algoritmo de Taylor para o cálculo do CRLB apenas permitem a sua aplicação em situações muito específicas. Com vista a ultrapassar estas limitações Van Tree desenvolveu um novo método de cálculo denominado por *Posterior Cramér Rao Bound* [10], [12] e [13].

O método de cálculo, é então, desenvolvido com base na função densidade probabilidade de  $p(\mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k)$ , onde a matriz de *Fisher* é dada por

$$J = E \left[ \left( \frac{\partial \ln p(\mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k)}{\partial \mathbf{x}} \right) \left( \frac{\partial \ln p(\mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right] \quad (4.27)$$

que se pode simplificar para

$$J = -E \left[ \nabla_{\mathbf{x}} \left\{ \left( \nabla_{\mathbf{x}} \ln p(\mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k) \right)^T \right\} \right], \quad \nabla_{\mathbf{x}} = \left[ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right], \quad (4.28)$$

sendo  $\mathbf{Z}_k$  e  $\mathbf{X}_k$  dados, respectivamente, por (4.16) e (4.17). O valor esperado em (4.27) e em (4.28) é tomado em ordem a  $\mathbf{Z}_k$  e  $\mathbf{X}_k$ , ao contrário do que acontece no método de Taylor, onde o valor esperado é só tomando em ordem a  $\mathbf{Z}_k$ , visto  $\mathbf{X}_k$  ser determinístico.

Substituindo as equações de (4.15) por

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \phi_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k, \mathbf{k}) \\ \mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{k}) \end{cases}, \quad (4.29)$$

onde  $\mathbf{w}_k$  representa o ruído de estado no instante  $t_k$ ; a função densidade probabilidade conjunta de  $\mathbf{X}_k$  e  $\mathbf{Z}_k$  pode ser escrita como

$$p(\mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k) = p(\mathbf{x}_0) \prod_{i=1}^k p(\mathbf{z}_i | \mathbf{x}_i) \prod_{j=1}^k p(\mathbf{x}_j | \mathbf{x}_{j-1}). \quad (4.30)$$

Em [12] mostra-se ser possível determinar a evolução da matriz de *Fisher* de forma recursiva, o que nos leva a

$$J_{k+1} = D_k^{22} - D_k^{21} (J_k + D_k^{11})^{-1} D_k^{12}, \quad (4.31)$$

sendo

$$D_k^{11} = E \left[ -\nabla_{\mathbf{x}_k} \nabla_{\mathbf{x}_k}^T \ln p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) \right], \quad (4.32)$$

$$D_k^{12} = E \left[ -\nabla_{\mathbf{x}_k} \nabla_{\mathbf{x}_{k+1}}^T \ln p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) \right], \quad (4.33)$$

$$D_k^{21} = [D_k^{12}]^T, \quad (4.34)$$

$$D_k^{22} = E \left[ -\nabla_{\mathbf{x}_{k+1}} \nabla_{\mathbf{x}_{k+1}}^T \ln p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) \right] + E \left[ -\nabla_{\mathbf{x}_{k+1}} \nabla_{\mathbf{x}_{k+1}}^T \ln p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}) \right]. \quad (4.35)$$

Considerando a aproximação de ruído branco em (4.29), conduz a

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \phi_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{k}) + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{k}) + \mathbf{v}_k \end{cases}, \quad (4.36)$$

pelo que o ruído se caracteriza da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k &\sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k) \\ \mathbf{v}_k &\sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k) \end{aligned}. \quad (4.37)$$

Desta aproximação resulta que as funções densidade probabilidade definidas em (4.32)-(4.35), assumem a forma

$$-\ln p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) = cte_1 + \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{k+1} - \phi_k(\mathbf{x}_k))^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{x}_{k+1} - \phi_k(\mathbf{x}_k)) \quad (4.38)$$

$$-\ln p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}) = cte_2 + \frac{1}{2}(\mathbf{z}_{k+1} - h(\mathbf{x}_{k+1}))^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} (\mathbf{z}_{k+1} - h(\mathbf{x}_{k+1})). \quad (4.39)$$

De (4.38) e (4.39) resulta que (4.32)-(4.35) se simplificam para

$$D_k^{11} = [\nabla_{\mathbf{x}_k} \phi_k(\mathbf{x}_k)]^T \mathbf{Q}_k^{-1} [\nabla_{\mathbf{x}_k} \phi_k(\mathbf{x}_k)], \quad (4.40)$$

$$D_k^{12} = -[\nabla_{\mathbf{x}_k} \phi_k(\mathbf{x}_k)]^T \mathbf{Q}_k^{-1} = [D_k^{21}]^T, \quad (4.41)$$

$$D_k^{22} = \mathbf{Q}_k^{-1} + [\nabla_{\mathbf{x}_{k+1}} h(\mathbf{x}_{k+1})]^T \mathbf{R}_k^{-1} [\nabla_{\mathbf{x}_{k+1}} h(\mathbf{x}_{k+1})], \quad (4.42)$$

Substituindo (4.40)-(4.42) em (4.31) resulta em

$$J_{k+1} = \left( [\nabla_{\mathbf{x}_k} \phi_k(\mathbf{x}_k)] J_k^{-1} [\nabla_{\mathbf{x}_k} \phi_k(\mathbf{x}_k)]^T + \mathbf{Q}_k \right)^{-1} + [\nabla_{\mathbf{x}_{k+1}} h(\mathbf{x}_{k+1})]^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} [\nabla_{\mathbf{x}_{k+1}} h(\mathbf{x}_{k+1})]. \quad (4.43)$$

Comparando os resultados obtidos tanto pelo método de Taylor (4.24), como pelo método *Posterior Cramér Rao Bound* (4.43) verifica-se que ambos são semelhantes. Através destes resultado é possível chegar à interessante conclusão que o resultado obtido pelo PCRB, apenas é necessário somar a matriz de covariância de ruído de estado ao resultado obtido pelo método de Taylor.

### 4.3. Implementação e análise dos resultados

Foram simulados e analisados os resultados para os dois modelos apresentados no capítulo 2. Numa primeira fase considerou-se que os modelos não eram perturbados com ruído de estado. Esta condição levou a que se utilizasse o algoritmo de Taylor no cálculo do CRLB. Numa segunda fase optou-se por se introduzir perturbação de estado no modelo, o que obrigou a utilizar-se o algoritmo *Posterior Cramér Rao Bound*.

Os resultados foram analisados com o objectivo de determinar qual o melhor algoritmo no seguimento de veículos e quão longe se encontram do melhor estimador, em termos de desempenho.

### 4.3.1. Desempenho dos algoritmos de seguimento sem ruído de estado

As condições em que as simulações irão ser realizadas são semelhantes às condições testadas no capítulo 3 de forma a que os resultados possam ser comparáveis. Utilizou-se a mesma trajectória de teste, a mesma estrutura de ruído e os mesmos valores para as variâncias dos ruídos descritos, respectivamente na figura 3.2 e na tabela 3.3. Nesta secção não se considerou ruído de estado, ao contrário do que se tinha assumido no capítulo 3.

Assim, e com base na teoria apresentada na secção 4.2.1, mais especificamente a expressão (4.24) ou (4.25), chegou-se aos resultados apresentados na tabela 4.1.

Analisando os resultados obtidos verifica-se que ambos os algoritmos têm um desempenho semelhante para os ruídos mais baixos considerados na tabela. Para ruídos mais elevados, o modelo *Constant model with known Turn Rate* apresenta gradualmente melhor desempenho que o modelo para movimento ao longo de circunferências. O desempenho da estimativa degrada-se progressivamente com o aumento da variância do ruído, tanto para ambos os algoritmos de seguimento como para a melhor estimativa obtida através do CRLB. Estas conclusões são claramente visíveis nas figuras 4.1 e 4.2, onde se representa graficamente o erro quadrático médio da estimação da posição do veículo de ambos os modelos.

Verificou-se, através dos resultados da simulação, que a melhor estimativa dada pelo algoritmo de Taylor variam consoante o modelo utilizado. Este facto leva a prever que o valor da melhor estimativa está dependente tanto da dinâmica considerada no modelo, como das observações e da respectiva perturbação.

Tabela 4.1 - Erro quadrático médio obtido na simulação do modelo para movimento ao longo de circunferências e do modelo *Constant model with known Turn Rate* e respectiva melhor estimativa possível (Cramér Rao Lower Bound).

Variância do ruído		Modelo para movimento ao longo de circunferências				<i>Constant model with known Turn Rate</i>			
distância [m <sup>2</sup> ]	ângulo [(°) <sup>2</sup> ]	Erro quadrático médio		Crámer-Rao Lower Bound		Erro quadrático médio		Crámer-Rao Lower Bound	
		P <sub>x</sub> erro	P <sub>y</sub> erro	P <sub>x</sub> erro	P <sub>y</sub> erro	P <sub>x</sub> erro	P <sub>y</sub> erro	P <sub>x</sub> erro	P <sub>y</sub> erro
0,01 <sup>2</sup>	0,01 <sup>2</sup>	1,177E-03	9,366E-04	3,979E-04	2,927E-04	1,177E-03	9,366E-04	8,897E-04	6,546E-04
0,05 <sup>2</sup>	0,05 <sup>2</sup>	5,886E-03	4,684E-03	1,989E-03	1,464E-03	5,887E-03	4,684E-03	4,448E-03	3,273E-03
0,1 <sup>2</sup>	1 <sup>2</sup>	9,224E-02	6,181E-02	3,668E-02	1,731E-02	9,298E-02	6,201E-02	8,196E-02	3,868E-02
1 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup>	2,175E-01	1,647E-01	7,623E-02	4,393E-02	2,142E-01	1,593E-01	1,700E-01	9,800E-02
3 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup>	3,557E-01	4,352E-01	8,170E-02	7,185E-02	2,566E-01	2,192E-01	1,822E-01	1,604E-01
4 <sup>2</sup>	3 <sup>2</sup>	4,859E-01	5,206E-01	1,205E-01	9,895E-02	3,784E-01	3,131E-01	2,680E-01	2,205E-01
4 <sup>2</sup>	4 <sup>2</sup>	5,590E-01	5,202E-01	1,564E-01	1,120E-01	4,686E-01	3,697E-01	3,460E-01	2,487E-01
5 <sup>2</sup>	4 <sup>2</sup>	6,630E-01	6,361E-01	1,592E-01	1,259E-01	4,902E-01	4,025E-01	3,524E-01	2,797E-01
5 <sup>2</sup>	5 <sup>2</sup>	7,520E-01	6,645E-01	1,950E-01	1,391E-01	5,871E-01	4,663E-01	4,290E-01	3,076E-01
5 <sup>2</sup>	6 <sup>2</sup>	9,956E-01	8,498E-01	2,309E-01	1,534E-01	6,837E-01	5,306E-01	5,041E-01	3,370E-01
6 <sup>2</sup>	6 <sup>2</sup>	9,272E-01	8,335E-01	2,336E-01	1,661E-01	7,074E-01	5,654E-01	5,102E-01	3,658E-01

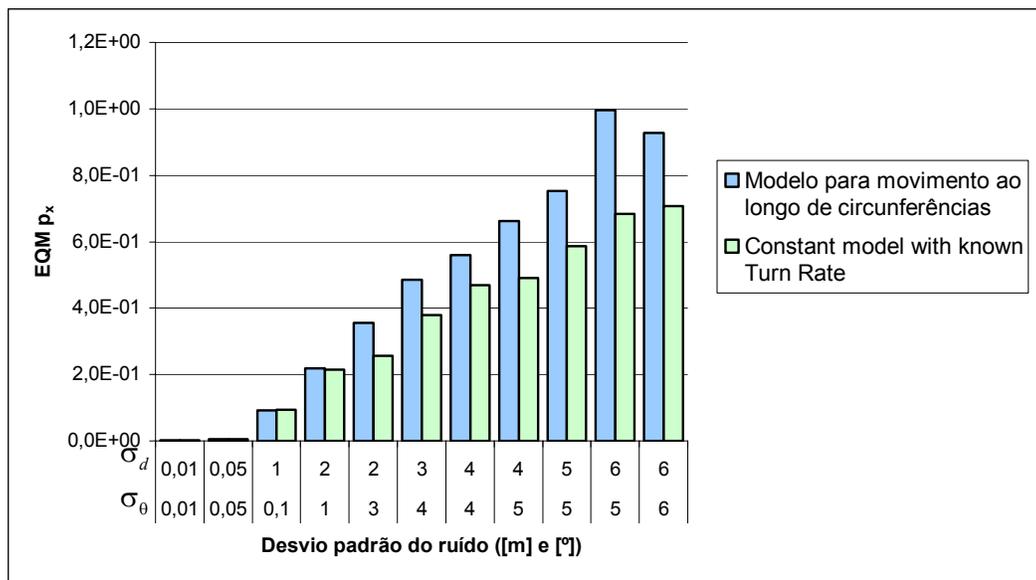


Figura 4.1 - Erro quadrático médio na estimação da posição em  $x$  para o modelo para movimento ao longo de circunferências e *Constant model with known Turn Rate* para as várias situações de ruído.

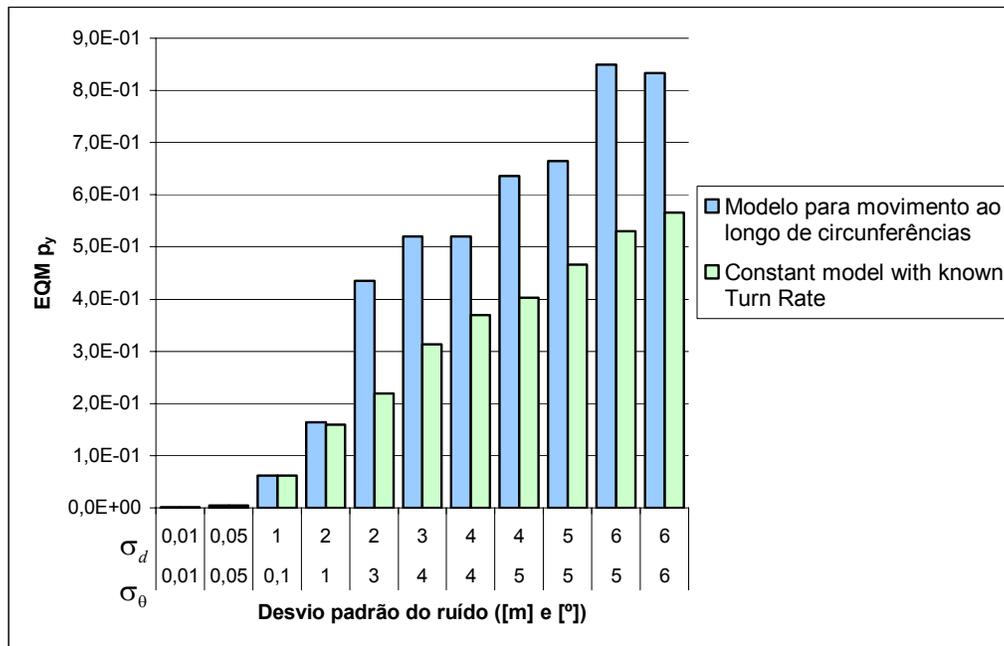


Figura 4.2 - Erro quadrático médio na estimação da posição em  $y$  para o modelo para movimento ao longo de circunferências e *Constant model with known Turn Rate* para as várias situações de ruído.

Analisando a evolução do erro quadrático médio representadas nas figuras 4.3 e 4.4, verifica-se que o valor do erro assume uma evolução periódica mas a sua amplitude vai diminuindo ao longo do tempo. A evolução periódica deve-se ao facto de o veículo estar a descrever uma trajectória circular, pelo que as observações assumem, também, um carácter periódico. Como não foi considerado ruído de estado, a estimativa das variáveis de estado são pouco influenciadas pelas observações, uma vez que o algoritmo atribui maior peso à estimativa resultante do modelo do que às observações. Esta estratégia pode ser favorável em situações em que a trajectória descrita não sofra alterações relativamente à inicialmente descrita. No caso de existirem alterações na trajectória, a estimativa do estado do veículo pode demorar a convergir para o valor real e assim degradar a performance do estimador.

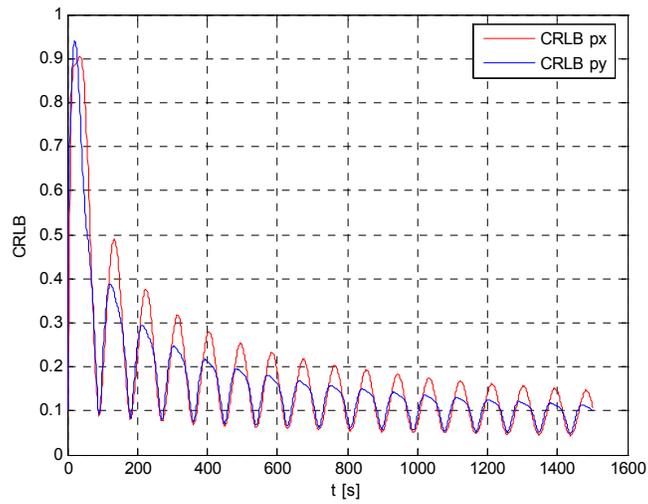


Figura 4.3 - Evolução do valor do CRLB ao longo do tempo para a posição no eixo dos  $x$  e no eixo dos  $y$ , do modelo para movimento ao longo de circunferências.

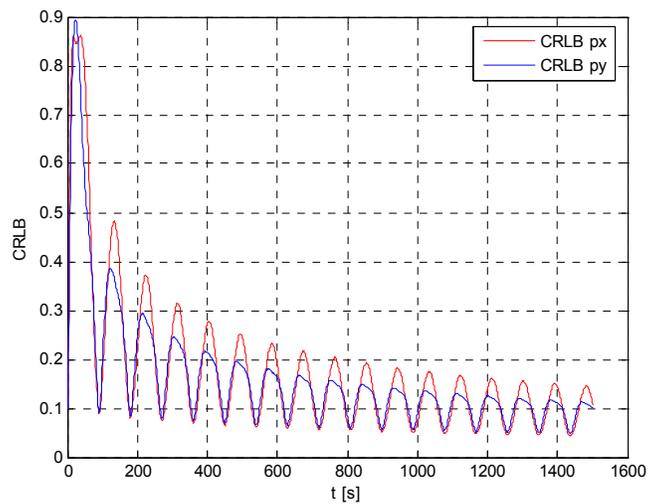


Figura 4.4 - Evolução do valor do CRLB ao longo do tempo para a posição no eixo dos  $x$  e no eixo dos  $y$ , do modelo *Constant model with known Turn Rate*.

### 4.3.2. Desempenho dos algoritmos de seguimento com ruído de estado

À semelhança da secção anterior, nesta secção consideraram-se os modelos descritos no capítulo 2. Os valores da variância do ruído foram, igualmente, os indicados na tabela 3.3 e a trajectória de teste, descrita na da figura 3.2. Contudo, nas simulações consideradas nesta secção, utilizou-se ruído de estado para verificar a influência na estimativa e no desempenho do modelo.

A inclusão de ruído de estado no modelo invalida a aplicação do método de Taylor para cálculo do melhor desempenho possível do algoritmo. Surge, então, a necessidade de aplicar o *Posterior Cramér-Rao Bound* apresentado na secção 4.2.2.

Através dos resultados da simulação, utilizando o método de Monte-Carlo com 30 experiências independentes para o mesmo valor de variância de ruído, obtiveram-se os resultados apresentados na tabela 4.3.

Tabela 4.3 - Erro quadrático médio obtido na simulação do modelo para movimento ao longo de circunferências e do modelo *Constant model with known Turn Rate* e respectiva melhor estimativa possível através do método *Posterior Cramér Rao Bound*.

Variância do ruído		Modelo para movimento ao longo de circunferências				<i>Constant model with known Turn Rate</i>			
		Erro quadrático médio		<i>Posterior Crámer- Rao Bound</i>		Erro quadrático médio		<i>Posterior Crámer- Rao Bound</i>	
distância [m <sup>2</sup> ]	ângulo [(°) <sup>2</sup> ]	P <sub>x</sub> erro	P <sub>y</sub> erro	P <sub>x</sub> erro	P <sub>y</sub> erro	P <sub>x</sub> erro	P <sub>y</sub> erro	P <sub>x</sub> erro	P <sub>y</sub> erro
0,01 <sup>2</sup>	0,01 <sup>2</sup>	5,275E-03	4,102E-03	3,297E-04	3,482E-04	8,059E-02	6,366E-02	1,312E-02	9,592E-03
0,05 <sup>2</sup>	0,05 <sup>2</sup>	1,518E-02	1,345E-02	1,649E-03	1,741E-03	1,865E-01	1,420E-01	3,939E-02	2,908E-02
0,1 <sup>2</sup>	1 <sup>2</sup>	9,813E-02	6,894E-02	6,556E-03	5,180E-03	4,033E-01	3,196E-01	1,899E-01	1,070E-01
1 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup>	2,242E-01	1,727E-01	4,989E-02	4,538E-02	6,084E-01	5,563E-01	2,743E-01	2,042E-01
3 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup>	3,621E-01	4,414E-01	7,093E-02	8,029E-02	6,643E-01	6,233E-01	2,941E-01	2,765E-01
4 <sup>2</sup>	3 <sup>2</sup>	4,929E-01	5,273E-01	1,043E-01	1,159E-01	7,388E-01	6,774E-01	3,628E-01	3,301E-01
4 <sup>2</sup>	4 <sup>2</sup>	5,665E-01	5,280E-01	1,308E-01	1,380E-01	7,921E-01	7,049E-01	4,255E-01	3,571E-01
5 <sup>2</sup>	4 <sup>2</sup>	6,704E-01	6,435E-01	1,370E-01	1,505E-01	8,098E-01	7,275E-01	4,321E-01	3,827E-01
5 <sup>2</sup>	5 <sup>2</sup>	7,595E-01	6,721E-01	1,630E-01	1,678E-01	8,761E-01	7,656E-01	4,966E-01	4,104E-01
5 <sup>2</sup>	6 <sup>2</sup>	9,977E-01	8,526E-01	1,846E-01	1,874E-01	9,458E-01	8,065E-01	5,622E-01	4,390E-01
6 <sup>2</sup>	6 <sup>2</sup>	9,320E-01	8,383E-01	1,941E-01	2,045E-01	9,673E-01	8,337E-01	5,681E-01	4,636E-01

Na tabela 4.3 apresenta-se o erro quadrático médio para cada um dos algoritmos simulados e a respectiva fronteira correspondente à melhor estimativa possível de obter. Verifica-se que o modelo para movimento ao longo de circunferências apresenta um melhor

desempenho face ao modelo *Constant model with known Turn Rate*. Verifica-se, também, que o desempenho dos algoritmos se vai degradando com o aumento do ruído das observações e que os erros das estimativas dos dois modelos se vão aproximando gradualmente. A estimativa das variáveis de estado do modelo para movimento ao longo de circunferências degrada-se mais rapidamente com o aumento do ruído do que o modelo *Constant model with known Turn Rate*, como se pode observar nas figuras 4.5 e 4.6. Na situação óptima, segundo os resultados obtidos pelo *Posterior Cramér Rao Bound*, o modelo para movimento ao longo de circunferências continuava a ser aquele que obteria melhor desempenho.

A evolução do erro quadrático médio ao longo do tempo encontra-se representada nas figuras 4.7 e 4.8 respectivamente para os modelos para movimento ao longo de circunferências e *Constant model with known Turn Rate*.

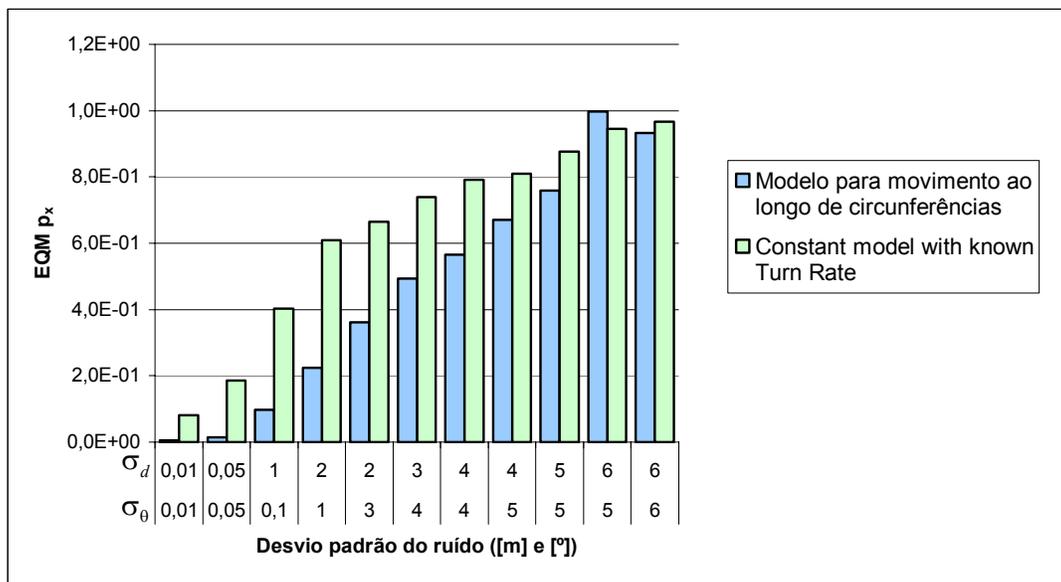


Figura 4.5 - Erro quadrático médio na estimação da posição em  $x$  para o modelo para movimento ao longo de circunferências e *Constant model with known Turn Rate* para as várias situações de ruído.

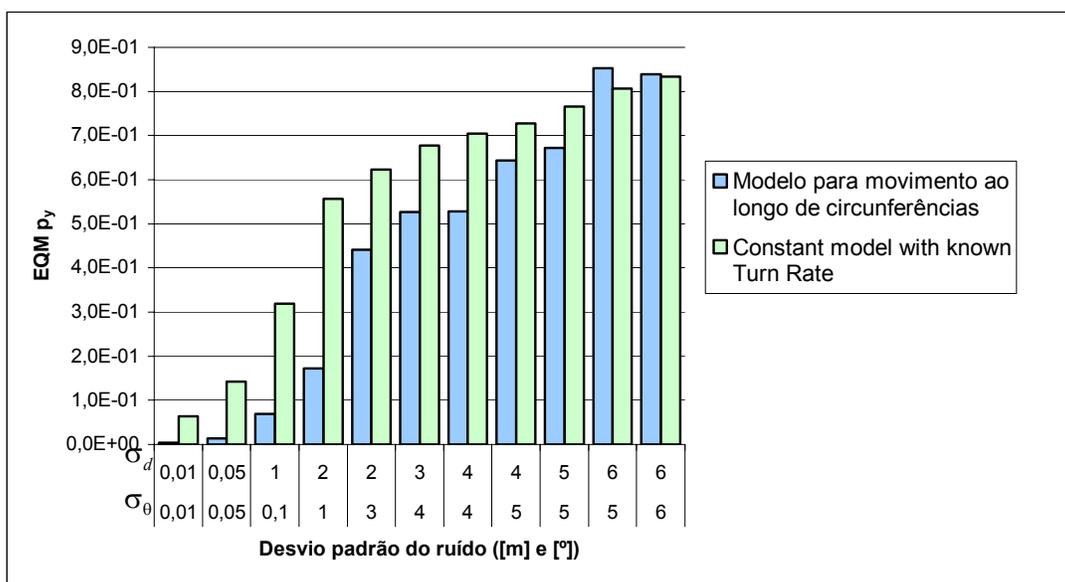


Figura 4.6 - Erro quadrático médio na estimação da posição em y para o modelo para movimento ao longo de circunferências e *Constant model with known Turn Rate* para as várias situações de ruído.

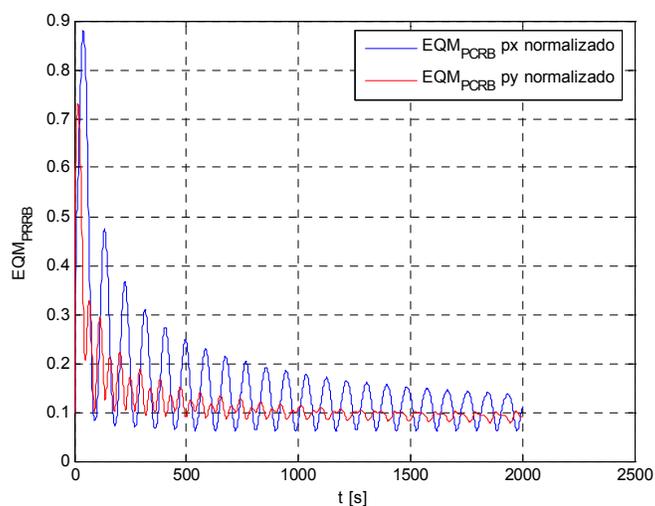


Figura 4.7 - Evolução do erro quadrático médio ao longo do tempo para a posição no eixo dos x e no eixo dos y, do modelo para movimento ao longo de circunferências.

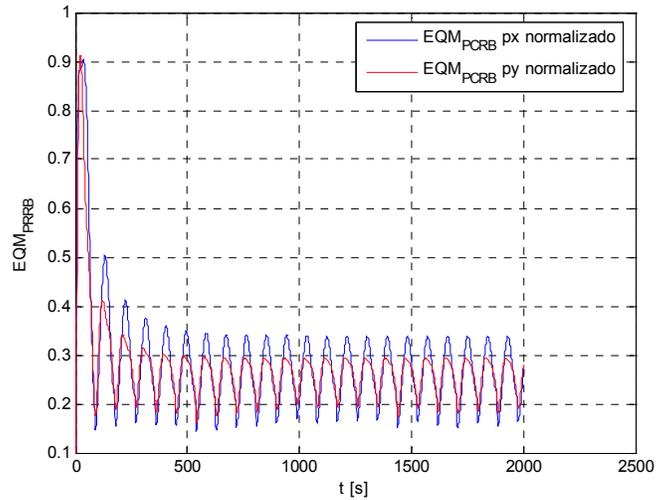


Figura 4.8 - Evolução do erro quadrático médio ao longo do tempo para a posição no eixo dos  $x$  e no eixo dos  $y$ , do modelo *Constant model with known Turn Rate*.

É de notar que a evolução do erro quadrático médio, à semelhança da situação descrita na secção 4.3.1, assume um carácter periódico devido à trajectória que o veículo descreve. A amplitude da evolução do erro quadrático médio diminui com o tempo, no entanto, devido a ter-se considerado ruído de estado no modelo, os modelos são mais sensíveis às observações e à respectiva perturbação que as afecta. Este facto, por si só não é prejudicial na estimação do estado do veículo, pois permite o seguimento da trajectória do veículo no caso de ocorrer alteração na trajectória que o veículo inicialmente descrevia.

O carácter periódico do erro quadrático médio faz-se sentir, como referido anteriormente, devido à trajectória descrita pelo veículo. Contudo, existem posições na trajectória descrita em que o erro na determinação da posição do veículo é maior. Com o intuito de determinar esses pontos representa-se nas figuras 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12 a evolução do erro quadrático médio e da posição nas respectivas coordenadas consideradas ( $x$  e  $y$ ) para ambos os modelos.

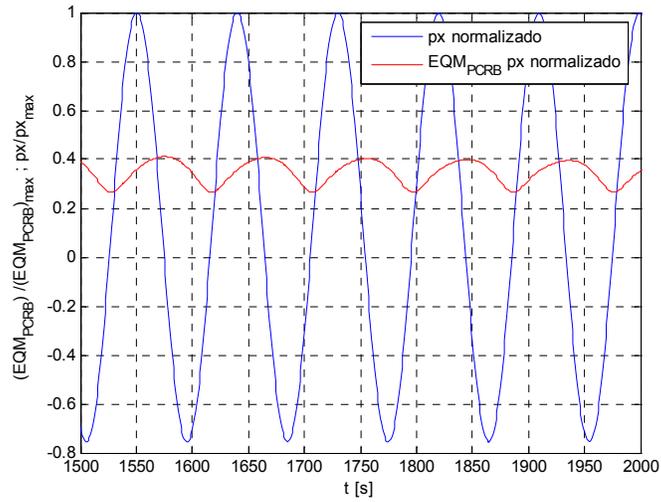


Figura 4.9 - Evolução do erro quadrático médio e da posição na coordenada  $x$  do referencial utilizado do modelo para movimento ao longo de circunferências, normalizados pelo respectivo máximo.

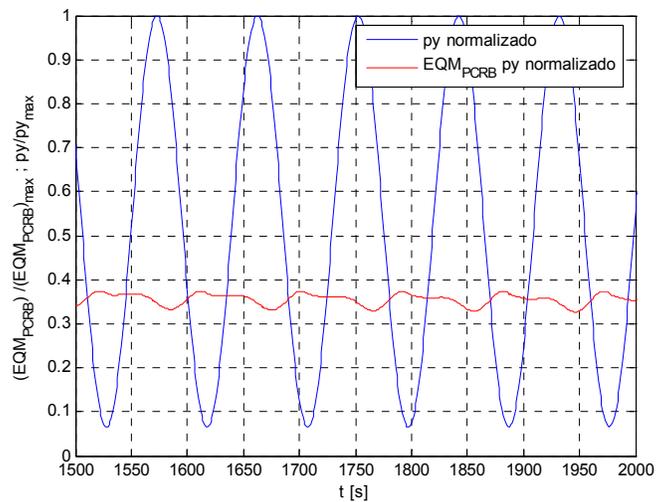


Figura 4.10 - Evolução do erro quadrático médio e da posição na coordenada  $y$  do referencial utilizado do modelo para movimento ao longo de circunferências, normalizados pelo respectivo máximo.

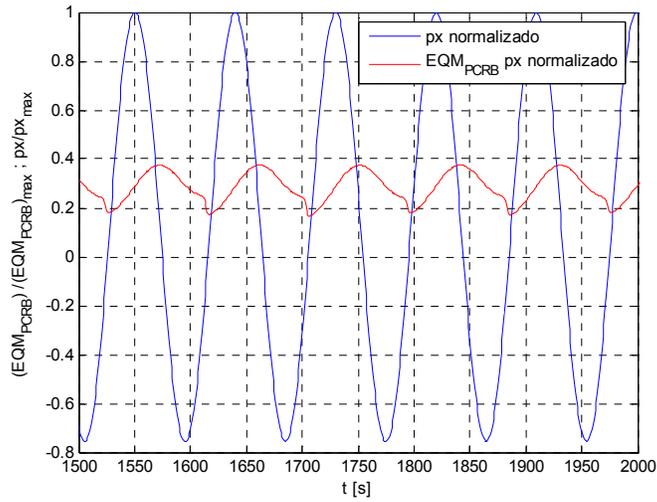


Figura 4.11 - Evolução do erro quadrático médio e da posição na coordenada  $x$  do referencial utilizado do modelo *Constant model with known Turn Rate*, normalizados pelo respectivo máximo.

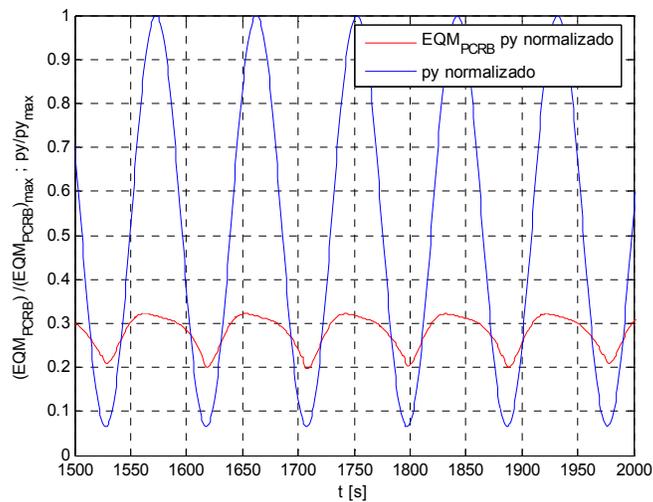


Figura 4.12 - Evolução do erro quadrático médio e da posição na coordenada  $y$  do referencial utilizado do modelo *Constant model with known Turn Rate*, normalizados pelo respectivo máximo

Analisando os resultados representados nas figuras 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12 verifica-se que o maior erro de estimação de determinada coordenada de posição do veículo não ocorre quando essa mesma coordenada assume o seu valor máximo. Antes pelo contrário, verifica-se que o maior erro de estimação de determinada coordenada ocorre quando a outra coordenada assume o seu valor máximo. Resumindo, quando a coordenada  $x$  assume o seu valor máximo, a coordenada  $y$  tem o maior erro de estimação. Este fenómeno verifica-se de forma semelhante quando a coordenada  $y$  assume o seu valor máximo. Nesta situação, a coordenada  $x$  tem o maior erro de estimação. De forma a compreender este fenómeno representa-se na figura 4.13 a trajectória de teste descrita pelo veículo.

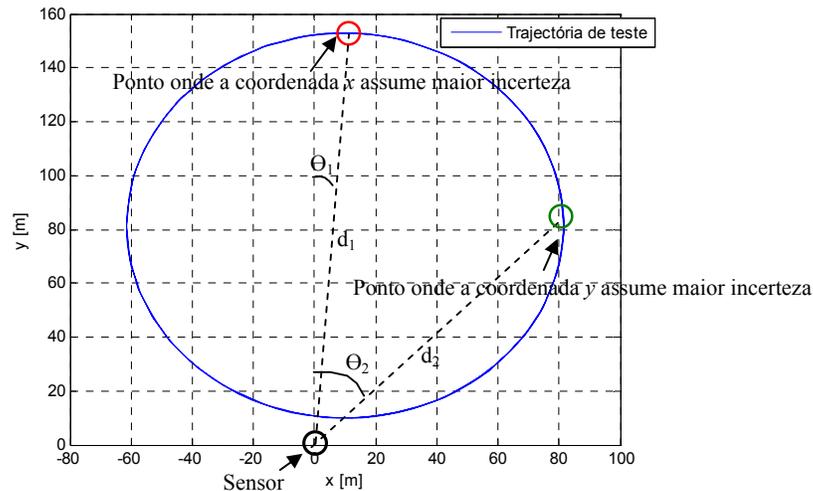


Figura 4.13 - Representação da trajectória de teste no plano  $(x, y)$  e respectivos pontos onde se verifica a maior incerteza na estimação da posição.

Podem-se observar na figura 4.13 os pontos da trajectória onde o veículo tem maior incerteza na estimação da coordenada da posição em  $x$  e em  $y$ , representados, respectivamente, com uma circunferência a vermelho e verde. O facto da maior incerteza de  $x$  se verificar quando a coordenada  $y$  assume o seu valor máximo e a maior incerteza de  $y$  se verificar quando  $x$  assume o seu valor máximo deve-se ao ruído presente nas observações utilizadas, nomeadamente a incerteza existente no ângulo  $\Theta$ , medido pelo sensor. A incerteza presente nessa observação provoca, para distâncias gradualmente mais elevadas, um aumento

do erro de estimação na determinação das coordenadas de posição do veículo. O ruído existente na distância  $d$ , medida pelo sensor, não provoca um aumento significativo no erro de estimação da posição para situações em que o veículo se encontre longe do sensor. Desta forma justificam-se os resultados obtidos na simulação.

## Capítulo 5

### Estimação multi-modelo

Neste capítulo aborda-se a estimação multi-modelo, utilizando o algoritmo *Multiple-Model Adaptive Estimation* (MMAE), para problemas de estimação de estado e identificação de sistemas.

Durante este capítulo descreve-se o algoritmo MMAE e as suas aplicações e analisa-se o seu desempenho em duas situações distintas. A primeira consiste no caso em que a trajectória do veículo não se altera durante o período de simulação, enquanto que no segundo caso se analisa o comportamento do algoritmo em regime dinâmico, ou seja, existe alteração da trajectória seguida pelo veículo. Apenas foi testado um dos modelos, neste caso o modelo *Constant model with known Turn Rate*, uma vez que os resultados obtidos se podem extrapolar para os outros modelos. De realçar que modelos não lineares podem ter problemas de convergência em situações dinâmicas ou em situações em que a trajectória estimada se afaste da trajectória real. Na situação analisada, a não linearidade das observações trouxe alguns problemas de convergência.

#### **5.1. Algoritmo *Multiple-Model Adaptive Estimation* (MMAE)**

Nesta secção é descrito um algoritmo potente na estimação de estado e identificação de sistemas, denominado por *Multiple-Model Adaptive Estimation* (MMAE).

A teoria apresentada terá aplicação para sistemas discretos lineares e variantes no tempo perturbado com ruído branco. Nestas condições o algoritmo deverá aproveitar toda a potencialidade do filtro de Kalman discreto linear para estimação óptima. Em aplicações não lineares, o algoritmo poderá ser utilizado em estimação não óptima.

Este algoritmo pode-se aplicar nas mais variadas áreas. Destaca-se o seguimento de veículos aéreos, terrestres ou marítimo tendo em conta que a trajectória descrita pelo veículo não é conhecida à priori pelo observador, a aplicação em estimação de estado em sistemas com grandes incertezas nos parâmetros da dinâmica do sistema ou nos próprios sensores. As aplicações deste algoritmo ainda se podem estender para estimação de estado em sistemas não lineares com grandes incertezas nos parâmetros e como estrutura para aplicações *multi-target* e *multi-sensor*.

O algoritmo MMAE consiste na construção de  $N$  ( $N \in \mathbb{N}$ ) filtros de Kalman discretos, cada um sintonizado para um dos  $N$  modelos possíveis. Cada um dos filtros de Kalman gera, em tempo real, uma estimativa local e um vector de resíduos. Os vectores de resíduos de cada um dos filtros de Kalman são utilizados para o cálculo da probabilidade  $p_k$  de cada uma das estimativas geradas pelos filtros ser a verdadeira. O algoritmo MMAE é conduzido pelos sinais de comando do passado e pelas medições dos sensores perturbadas e gera à saída uma estimativa do estado do sistema e a correspondente matriz de covariância. A estimativa do estado do sistema é dada pesando cada uma das estimativas locais pela respectiva probabilidade resultante dos vectores residuais. O cálculo da matriz covariância de estado resulta, pesando cada uma das matrizes covariância de estado, pela respectiva probabilidade, incluindo uma correcção que envolve a estimativa de cada um dos filtros de Kalman e a estimativa do estado. Na figura 5.1 representa-se a estrutura genérica do algoritmo MMAE.

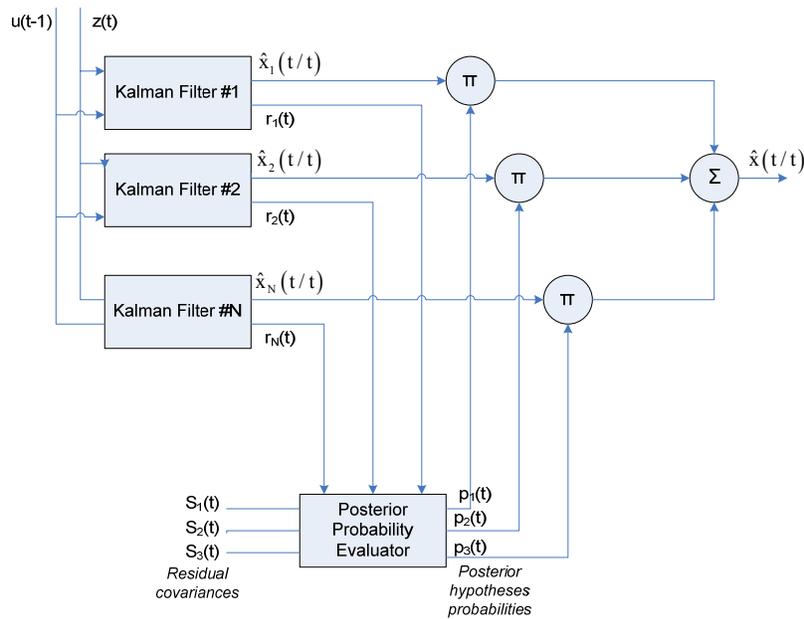


Figura 5.1 - Estrutura geral do algoritmo *Multiple-Model Adaptive Estimation* (MMAE).

A estimativa de estado e respectiva covariância resultantes do algoritmo MMAE são calculadas com base no valor esperado das variáveis de estado dadas as entradas e as observações do passado. Representa-se, assim

$$\hat{x}(t) = E[x(t) | Z(t)], \quad (5.1)$$

$$P(t) = cov[x(t); x(t) | Z(t)] \quad (5.2)$$

onde  $Z(t) = \{u(0), u(1), \dots, u(t-1); z(1), z(2), \dots, z(t)\}$ , sendo  $u$  a entrada determinística e  $z$  as observações.

Tendo em conta que um dos  $N$  modelos considerados é verdadeiro, este problema consiste na resolução de teste de hipóteses cujo modelo verdadeiro deve pertencer a um conjunto discreto de hipóteses,  $H_1, H_2, \dots, H_N$ . Assim, o ponto fulcral deste problema consiste em determinar a função densidade probabilidade condicional das variáveis de estado dados os sinais de controlo e as observações,  $p(x(t) | Z(t))$ .

Em [5] mostra-se que a estimativa das variáveis de estado são dadas por

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^N p_k^{(i)} \hat{\mathbf{x}}_k^{(i)}, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{P}_k = \sum_{i=1}^N p_k^{(i)} \left[ \mathbf{P}_k^{(i)} + (\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k) (\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \right]; i=1,2,\dots,N \quad (5.4)$$

, onde  $p_k^{(i)}$  é a probabilidade da estimativa dada pelo filtro de Kalman  $i$  no instante  $k$  ser verdadeira.

Definem-se, então, os resíduos e a matriz de covariância residual, respectivamente, por

$$\mathbf{r}_{k+1}^{(i)} \triangleq \mathbf{z}_{k+1} - [\hat{\mathbf{z}}_k^{(i)}]^-; \quad \mathbf{r}_{k+1}^{(i)} \in \mathbb{R}^m, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{S}_{k+1}^{(i)} = \text{cov}[\mathbf{r}_{k+1}^{(i)}, \mathbf{r}_{k+1}^{(i)}] = \mathbf{H}_{k+1}^{(i)} \mathbf{P}_{k+1}^{(i)} [\mathbf{H}_{k+1}^{(i)}]^T + \mathbf{R}_{k+1}; \quad \mathbf{S}_{k+1}^{(i)} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (5.6)$$

, onde  $[\hat{\mathbf{z}}_k^{(i)}]^-$  corresponde à estimativa à priori das observações do filtro de Kalman  $i$  no instante  $k$  dada por

$$[\hat{\mathbf{z}}_k^{(i)}]^- = \mathbf{H}_{k+1}^{(i)} [\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{(i)}]^- . \quad (5.7)$$

A partir de (5.5) e (5.6) é possível calcular a probabilidade da estimativa do filtro  $i$  ser a verdadeira no instante  $k+1$ , com as probabilidades  $p_0^{(i)}$  dadas,

$$p_{k+1}^{(i)} = \left( \frac{\beta_{k+1}^{(i)} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{w}_{k+1}^{(i)} \right\}}{\sum_{j=1}^N \beta_{k+1}^{(j)} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{w}_{k+1}^{(j)} \right\} \cdot p_k^{(j)}} \right) \cdot p_k^{(i)} \quad (5.8)$$

, onde

$$\beta_{k+1}^{(i)} = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{\det \mathbf{S}_{k+1}^{(i)}}}, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{w}_{k+1}^{(i)} = [\mathbf{r}_k^{(i)}]^T [\mathbf{S}_k^{(i)}]^{-1} \mathbf{r}_k^{(i)}. \quad (5.10)$$

É possível mostrar-se que se a hipótese  $H=H_i$  é verdadeira, i.e. o modelo  $i$  é o verdadeiro, então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k^{(i)} = 1, \lim_{k \rightarrow \infty} p_k^{(j)} = 0, \forall j \neq i \quad (5.11)$$

Se nenhum dos modelos for o verdadeiro, então o algoritmo converge para o modelo mais próximo do verdadeiro.

Em problemas não lineares, o filtro de Kalman é substituído pelo filtro de Kalman estendido e o algoritmo opera em condições não ótimas.

### 5.1.1. Algoritmo MMAE em regime dinâmico

Na secção anterior partiu-se do pressuposto que o modelo que era seguido não se alterava durante o período de simulação. Nesta secção considera-se que o alvo poderá alterar o seu comportamento e como consequência, o modelo verdadeiro altera-se. O algoritmo terá de ser capaz de responder a este regime dinâmico. A estrutura apresentada na figura 5.1 e as equações (5.5), (5.6), (5.8), (5.9) e (5.10) continuam a ser válidas em regime dinâmico. No entanto, terá de ser considerado um limite inferior nas probabilidades, ou seja  $p_k^{(i)} \geq \varepsilon$  para que o algoritmo consiga responder a alterações do modelo.

O regime dinâmico poderá tornar-se crítico quando existem muitas alterações do modelo verdadeiro. Para que a resposta do algoritmo seja satisfatória terá de se considerar filtros de Kalman que considerem as alterações entre os vários modelos, o que faz aumentar de forma exponencial o número de filtros Kalman em paralelo. Este facto torna impossível o funcionamento em estimação óptima do algoritmo.

Em funcionamento não óptimo, o algoritmo terá um bom desempenho em situações em que o intervalo de tempo entre alterações dos modelos sejam superiores ao tempo de convergência. Infelizmente não é conhecida uma estimativa para o tempo de convergência do algoritmo MMAE. Devido a este facto apenas se pode garantir o bom funcionamento do algoritmo em situações em que as alterações entre os modelos sejam pouco frequentes.

## 5.2. Implementação e análise dos resultados

Nesta secção apresentam-se os resultados obtidos na simulação do algoritmo MMAE implementado utilizando o modelo *Constant model with known Turn Rate* no filtro de Kalman. Tomou-se como opção utilizar este modelo, uma vez que apresenta uma dinâmica linear, ao contrário do modelo para movimento ao longo de circunferências.

Os vários modelos considerados nos filtros de Kalman encontram-se sintonizados para diferentes velocidades angulares.

Foram simulados vários cenários distintos. O primeiro cenário consistiu em analisar o desempenho do algoritmo MMAE para várias velocidade angulares calculando o erro quadrático médio. O segundo cenário consistiu em avaliar o comportamento do algoritmo para uma velocidade angular diferente das velocidades sintonizadas nos modelos considerados. No terceiro cenário avaliou-se o comportamento do algoritmo em regime dinâmico.

### 5.2.1. Desempenho do algoritmo MMAE

No primeiro cenário consideraram-se seis modelos sintonizados para trajetórias com velocidades angulares diferentes. As restantes características da trajetória como a velocidade linear são genéricas em todos os modelos. A velocidade angular dos modelos considerados apresentam-se na tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Velocidades angulares do veículo consideradas no vários modelos.

<b>Velocidade angular</b> <b><math>\omega</math> [rad/s]</b>
0,1
0,08
0,07
0,068
0,064
0,04

As condições de ruído consideradas na simulação apresentam-se na tabela 5.2.

Tabela 5.2 - Variâncias do ruído que perturba as observações consideradas no modelo.

<b>Medida do sensor</b>	<b>Variância</b>
distância [ $m^2$ ]	$1^2$
ângulo [ $(^\circ)^2$ ]	$2^2$

Considerou-se que o veículo descrevia uma trajectória com uma velocidade angular de  $0,08 \text{ rad.s}^{-1}$  e que mantinha essa trajectória durante todo o período de simulação. A evolução da probabilidade dos modelos serem os correctos evoluíram de acordo com o representado na figura 5.2. O valor inicial da probabilidade é dado de acordo com uma distribuição uniforme em função do número de filtros de Kalman.

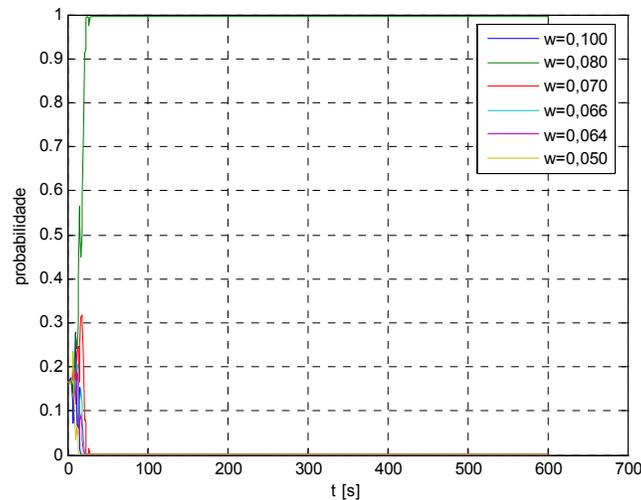


Figura 5.2 - Evolução da probabilidade do modelo ser o correcto.

Verificou-se, através da análise da figura 5.2, que o algoritmo convergiu para o modelo correcto. A probabilidade associada ao modelo com velocidade angular de  $0,08 \text{ rad.s}^{-1}$ , após um período de convergência inicial assume um valor próximo da unidade, enquanto as probabilidades associadas aos outros modelos convergiram para zero. A probabilidade do modelo correcto não assume a unidade, uma vez que se impôs um limite inferior nas probabilidades que convergem para zero.

Na figura 5.3 representa-se a trajectória real descrita pelo veículo e a estimada pelo algoritmo MMAE. Verifica-se que a trajectória estimada converge para a trajectória real do veículo.

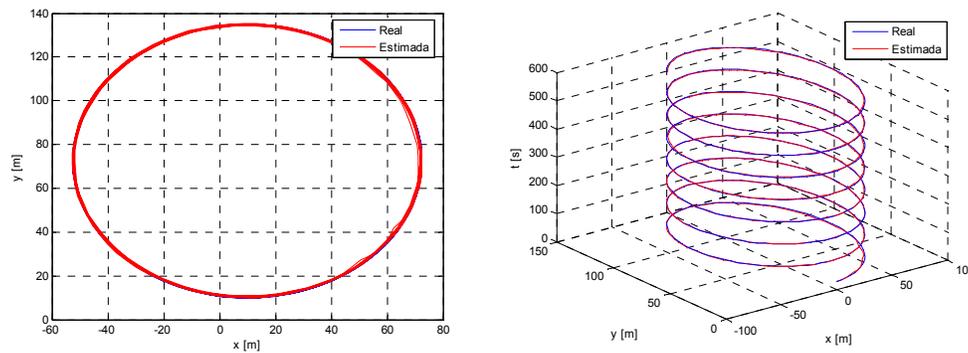


Figura 5.3 - Representação da trajetória real descrita pelo veículo e a trajetória estimada no plano  $(x, y)$  e evolução ao longo do tempo  $(x, y, t)$ .

Apesar de se ter verificado que o algoritmo converge para o valor real da trajetória, analisou-se o desempenho do algoritmo calculando o erro quadrático médio entre a trajetória estimada e a real para os diferentes valores de velocidade angular considerados na tabela 5.1. Assim, obtiveram-se os resultados obtidos na tabela 5.3. A simulação ocorreu nas mesmas condições para todas as velocidades angulares consideradas.

Tabela 5.3 – Erro quadrático médio da estimativa da posição dada pelo algoritmo MMAE para as várias velocidades angulares consideradas nos modelos.

Velocidade angular [rad/s]	<i>Constant model with known Turn Rate</i>	
	<b>P<sub>x</sub> erro</b>	<b>P<sub>y</sub> erro</b>
0,1	3,900E-01	3,864E-01
0,08	5,056E-01	4,811E-01
0,07	6,214E-01	5,680E-01
0,068	6,705E-01	6,165E-01
0,064	7,374E-01	6,794E-01
0,04	1,302E+00	1,119E+00

Com base nos resultados apresentados na tabela 5.3 verifica-se que o desempenho do algoritmo degrada-se com a diminuição da velocidade angular do veículo.

A tabela 5.3 foi construída de forma a que os resultados obtidos pudessem ser comparáveis com os obtidos na secção 4. Desta forma, pode-se comparar os resultados

obtidos para a velocidade angular de  $0,07 \text{ rad.s}^{-1}$  com os resultados obtidos na tabela 4.3 para o modelo *Contant known Turn Rate* e para as condições de ruído apresentadas na tabela 5.2. Na tabela 5.4 resumem-se os resultados comparáveis.

Tabela 5.4 - Erro quadrático médio obtido pela estimativa dada pelo algoritmo MMAE e pelo modelo *Constant model with known Turn Rate* do capítulo 2.

Variância do ruído		MMAE		<i>Constant model with known Turn Rate</i>	
distância [ $\text{m}^2$ ]	ângulo [ $(^\circ)^2$ ]	$P_x$ erro	$P_y$ erro	$P_x$ erro	$P_y$ erro
1 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup>	6,2142E-01	5,6804E-01	6,084E-01	5,563E-01

Nesta situação verifica-se uma degradação no desempenho do algoritmo de estimação devido ao facto de se ter considerado um limite inferior nas probabilidades,  $p_k^{(i)} \geq \varepsilon$  para que o algoritmo consiga responder a alterações do modelo, o que provoca que o valor do estado seja igual à do modelo correcto, perturbado com o valor do estado dos outros modelos considerados.

### 5.2.2. Comportamento do algoritmo MMAE para trajectórias não consideradas nos modelos

No segundo cenário analisou-se o comportamento do algoritmo MMAE para uma trajectória do veículo com velocidade angular diferente das consideradas nos modelos.

Nesta situação as velocidades angulares consideradas nos modelos são diferentes das da secção 5.2.1 devido a questões de convergência do algoritmo. As velocidades angulares consideradas apresentam-se na tabela 5.5.

Tabela 5.5 - Velocidades angulares do veículo consideradas nos vários modelos.

Velocidad e angular $\omega$ [rad/s]
0,07
0,068
0,066
0,064
0,062
0,06

Considerou-se que o veículo descrevia uma trajectória com uma velocidade angular de  $0,0685 \text{ rad.s}^{-1}$ . Após simulação nas condições descritas, obtiveram-se as figuras 5.4 e 5.5.

Analisando a evolução da probabilidade dos modelos serem os correctos, representada na figura 5.4, verifica-se que o algoritmo converge para um dos modelos considerados. Em mais pormenor verifica-se que, após um período inicial de convergência mais longo que o verificado na situação da figura 5.2, o algoritmo converge para o modelo que apresenta as condições mais semelhantes com que as da trajectória que o veículo descrevia. Neste caso, o algoritmo convergiu para o modelo com uma velocidade angular de  $0,07 \text{ rad.s}^{-1}$ .

Na figura 5.5 representa-se a trajectória real descrita pelo veículo e a trajectória estimada pelo algoritmo.

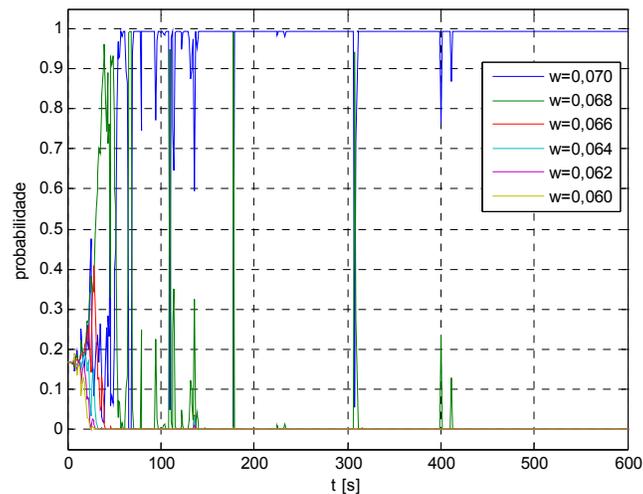


Figura 5.4 - Evolução da probabilidade do modelo ser o correcto para a situação em que a velocidade angular do veículo era diferente das velocidades angulares consideradas nos modelos.

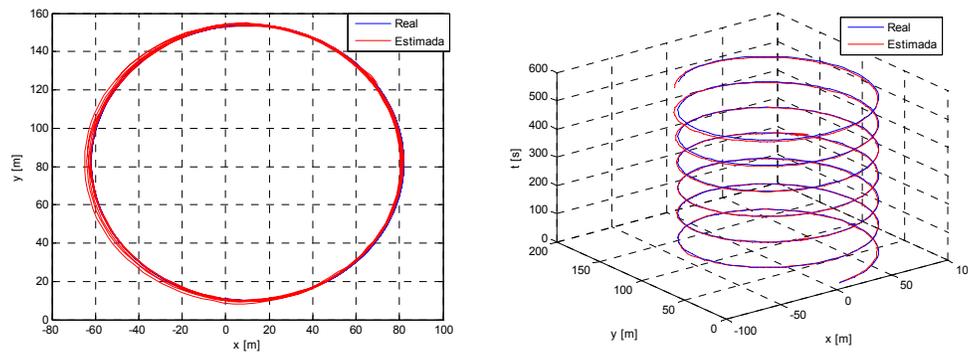


Figura 5.5 - Representação da trajetória real descrita pelo veículo e a trajetória estimada no plano  $(x, y)$  e evolução ao longo do tempo  $(x, y, t)$ .

### 5.2.3. Comportamento em regime dinâmico

Nesta última situação analisou-se o comportamento do algoritmo em regime dinâmico. Inicialmente considerou-se que o veículo descrevia uma trajetória circular com uma velocidade angular de  $0,07 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  e no instante 100 s, alterou-se a velocidade do veículo gradualmente até atingir os  $0,068 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  no instante 300 s, como representado na figura 5.6.

A evolução da probabilidade dos modelos serem verdadeiros representam-se na figura 5.7. Verifica-se que, após um período inicial de convergência, a probabilidade do modelo correspondente à velocidade angular  $0,07 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  assume um valor próximo da unidade, enquanto que os outros modelos convergem para um valor nulo. Após o instante 200 s, aproximadamente, quando a velocidade do veículo se aproxima mais da velocidade do modelo sintonizado para  $0,068 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , o algoritmo MMAE reage e, após um período de convergência, o algoritmo converge para o modelo correcto. Caso a velocidade, ao alterar-se, não convergisse exactamente para uma das velocidades consideradas nos modelos, o algoritmo iria convergir para o modelo que tivesse a velocidade mais próxima da velocidade para a qual o veículo evoluiu.

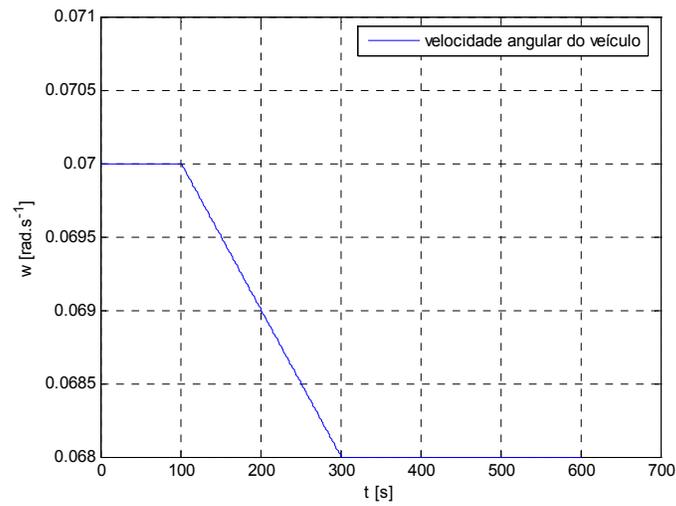


Figura 5.6 - Evolução da velocidade angular real do veículo considerada na simulação.

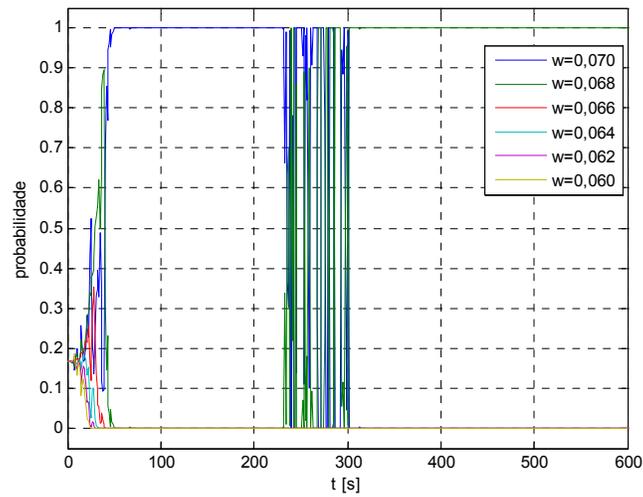


Figura 5.7 - Evolução da probabilidade do modelo ser o correcto para a situação em que a velocidade angular do veículo se alterou durante o período de simulação.

Na figura 5.8 representa-se a trajectória real descrita pelo veículo e a trajectória estimada pelo algoritmo MMAE.

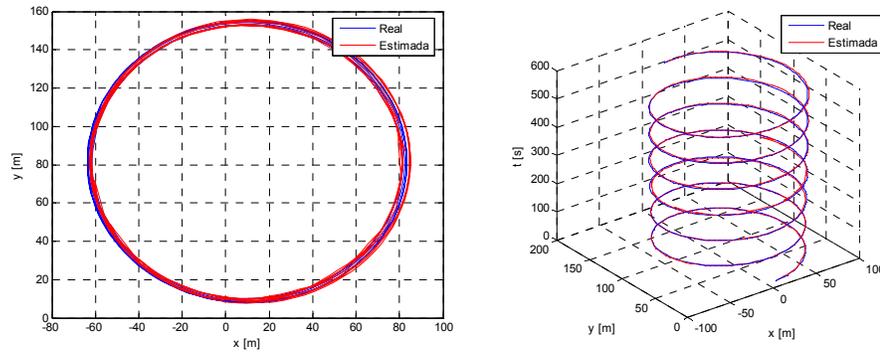


Figura 5.8 - Representação da trajectória real descrita pelo veículo e a trajectória estimada no plano  $(x, y)$  e evolução ao longo do tempo  $(x, y, t)$ .

## Capítulo 6

### Conclusões

No presente trabalho abordou-se o desempenho de vários modelos de estado implementados recorrendo a um filtro de Kalman para o seguimento de veículos. Nas simulações utilizou-se como trajectória de teste do veículo uma trajectória circular, uma vez que as trajectórias dos veículos se podem aproximar por segmentos de recta e arcos de circunferência.

Na primeira abordagem considerada, apresentada no capítulo 3, analisou-se o desempenho dos dois algoritmos calculando o erro quadrático médio. Verificou-se que o modelo para o movimento ao longo de circunferências apresenta um melhor desempenho para pequenas perturbações, mas com o aumento da perturbação, o desempenho dos modelos testados tendem a degradar-se e aproximarem-se.

No quarto capítulo calculou-se o melhor desempenho possível dos algoritmos de estimação baseados nos dois modelos considerados ao longo do trabalho, com base na teoria de Cramér-Rao. Verificou-se que o desempenho dos algoritmos ainda se encontra relativamente longe da situação óptima e que no caso de se utilizar o estimador óptimo, o modelo para movimento ao longo de circunferências teria melhor desempenho face ao modelo *Constant model with known Turn Rate*. Verificou-se ainda o carácter periódico que o erro quadrático médio da posição assume. Analisou-se, também, a posição do veículo que assumia uma maior incerteza na estimação. No eixo de coordenadas considerado, verificou-se que a maior incerteza no eixo dos  $x$  ocorria na situação em que a posição  $y$  atingia o seu máximo e que a maior incerteza no eixo dos  $y$  ocorria quando a posição  $x$  atingia o seu máximo. Concluiu-se que este fenómeno se verifica devido à incerteza existente na observação  $\Theta$ , que agrava a estimação para distâncias mais elevadas.

No último capítulo abordou-se a estimação multi-modelo através do estudo do algoritmo MMAE. Este algoritmo foi abordado em várias situações. Na primeira situação analisou-se o desempenho na identificação de modelos e estimação das variáveis de estado. Verificou-se que o desempenho do algoritmo era ligeiramente inferior ao dos modelos apresentados no capítulo 2 devido ao facto das probabilidades dos modelos serem verdadeiros estarem limitadas a um  $\varepsilon > 0$ . Na segunda situação analisou-se o comportamento do algoritmo para situações em que a velocidade angular do veículo não correspondia a nenhuma dos modelos considerados. Nesta situação, o algoritmo convergiu para o modelo mais próximo do movimento descrito pelo veículo. A terceira situação correspondeu à análise do comportamento do sistema para uma situação dinâmica, situação em que a trajectória do veículo se alterava durante o período de simulação. Verificou-se que o algoritmo era capaz de seguir o comportamento do alvo, passando a probabilidade do novo modelo a assumir um valor próximo da unidade.

## 6.1. Trabalho futuro

Com o intuito de continuar este trabalho e aprofundar algumas conclusões retiradas no seguimento do mesmo, teria todo o interesse analisar outros aspectos que não foram aqui abordados. Assim, seria de analisar o desempenho dos algoritmos de estimação em situações em que as condições iniciais do veículo não fossem iguais às consideradas no modelo.

De forma a caracterizar melhor o comportamento do algoritmo em situações reais poderá modelar-se os sensores de uma forma mais rigorosa e coerente com a realidade, ou mesmo até incluir novos sensores de forma a melhorar o desempenho da estimativa de posição. Em alternativa, podia também analisar-se o desempenho do algoritmo em situações em que estivesse apenas uma das medições consideradas,  $d$  ou  $\Theta$ .

Outro ponto que também teria bastante interesse abordar seria a dependência entre a melhor estimativa no caso de se utilizar o estimador óptimo e o modelo de estado utilizado, e tentar determinar onde se encontra o limite de desempenho da estimação.

## Apêndice A

### Cálculo do limite

A expressão (A.1) apresenta uma singularidade em  $\omega_0 = 0$ .

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{R}(\psi_0) \cdot \frac{\mathbf{I} - \mathbf{R}(\omega_0 \cdot (t - t_0))}{\omega_0} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

De forma a calcular o valor de (A.1) em  $\omega_0 = 0$  calcula-se o seu limite para velocidades angulares que tendem para zero. Assim tem-se

$$\mathbf{p} = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \left( \mathbf{p}_0 + \mathbf{R}(\psi_0) \cdot \frac{\mathbf{I} - \mathbf{R}(\omega_0 \cdot (t - t_0))}{\omega_0} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix} \right), \quad (\text{A.2})$$

que resulta numa indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ .

A regra de l'Hôpital que enuncia que o limite de  $f(x)/g(x)$ , quando  $f(x) \rightarrow 0$  e  $g(x) \rightarrow 0$ , ou  $f(x) \rightarrow \infty$  e  $g(x) \rightarrow \infty$ , existe e é igual a  $(df(x)/dx)/(dg(x)/dx)$  se esta função convergir. Representa-se, então

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{df(x)/dx}{dg(x)/dx}, \quad (\text{A.3})$$

se  $dg(x)/dx \neq 0 \forall x \in ]a, b[$ ,  $a \leq c \leq b$ .

Aplicando a regra de l'Hôpital a (A.2), conduz a

$$\mathbf{p} = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \left( \mathbf{p}_0 + \mathbf{R}(\psi_0) \cdot \frac{d[\mathbf{I} - \mathbf{R}(\omega_0 \cdot (t - t_0))]/d\omega_0}{d\omega_0/d\omega_0} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix} \right). \quad (\text{A.4})$$

Calculando (A.4) resulta em

$$\mathbf{p} = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \left( \mathbf{p}_0 + \mathbf{R}(\psi_0) \cdot \mathbf{R}(\omega_0 \cdot (t - t_0)) \cdot \begin{bmatrix} (t - t_0) \cdot v_0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \mathbf{p}_0 + v_0 \Delta t \cdot \begin{bmatrix} \cos \psi_0 \\ \sin \psi_0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

onde se substituiu  $(t - t_0)$  por  $\Delta t$ .

## Apêndice B

### Filtros de Kalman discretos

#### Filtro de Kalman discreto

Em 1960, R. E. Kalman propôs uma nova abordagem para formular o problema de filtragem baseado na minimização do erro quadrático médio. Esta nova metodologia permitiu a resolução de vários problemas que, até então, não tinham solução. Assim, surgiu o filtro de Kalman discreto. Considere-se, então, a representação do modelo de estado discreto dada por

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\phi}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

onde

- $\mathbf{x}_k$  é o vector  $(n \times 1)$  de variáveis de estado no instante  $t_k$ , ou seja  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$ ;
- $\boldsymbol{\phi}_k$  é a matriz  $(n \times n)$  no instante  $t_k$  que relaciona  $\mathbf{x}_k$  com  $\mathbf{x}_{k+1}$ , também denominada por matriz de transição;
- $\mathbf{w}_k$  é o vector  $(n \times 1)$  cujos elementos são ruído branco gaussiano e afectam as variáveis de estado no instante  $t_k$ , com covariância conhecida;
- $\mathbf{z}_k$  é o vector  $(m \times 1)$  das observações no instante  $t_k$ ;
- $\mathbf{H}_k$  é a matriz de ligação  $(m \times n)$ , que relaciona as variáveis de estado com as observações no instante  $t_k$ ;

- $\mathbf{v}_k$  é o vector ( $m \times 1$ ) cujos elementos são ruído branco gaussiano e afectam as observações no instante  $t_k$ , com covariância conhecida.

As matrizes de covariância do ruído associado às variáveis de estado  $\mathbf{w}_k$ , e às observações  $\mathbf{v}_k$ , assumem a forma

$$E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_i^T] = \begin{cases} \mathbf{Q}_k, & i=k \\ \mathbf{0}, & i \neq k \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

$$E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_i^T] = \begin{cases} \mathbf{R}_k, & i=k \\ \mathbf{0}, & i \neq k \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

$$E[\mathbf{w}_k \mathbf{v}_i^T] = \mathbf{0}, \forall k, i \quad (\text{B.4})$$

Assumindo que se tem uma estimativa do estado no instante  $t_k$ , baseada na informação sobre os instantes anteriores a  $t_k$ , define-se o erro de estimação como

$$\mathbf{e}_k^- = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^- \quad (\text{B.5})$$

onde  $\mathbf{x}_k$  é o valor das variáveis de estado no instante  $t_k$ , e  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  a estimativa *a priori* do estado no mesmo instante dada por

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \boldsymbol{\phi}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad (\text{B.6})$$

A estimativa do estado é actualizada de acordo com

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (\text{B.7})$$

onde  $\mathbf{K}_k$  é a matriz de ganhos calculada através do algoritmo desenvolvido por R. E. Kalman.

Surge agora a necessidade de calcular o ganho  $\mathbf{K}_k$ , que conduz a uma estimativa óptima das variáveis de estado. Definindo as matrizes de covariância do erro de estimação *a priori* e do erro de estimação (*a posteriori*), respectivamente por

$$\mathbf{P}_k^- = E[\mathbf{e}_k^- \mathbf{e}_k^{-T}] = E\left[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T\right] \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{P}_k = E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] = E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T] \quad (\text{B.9})$$

Substituindo (B.1) em (B.7) e depois substituindo a equação resultante em (B.9) obtém-se

$$\mathbf{P}_k = E\left\{\left[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{K}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-)\right] \left[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{K}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-)\right]^T\right\}. \quad (\text{B.10})$$

Efectuando os cálculos na expressão (B.10), e verificando que de  $(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)$  resulta o erro de estimação *a priori* dado por (B.8) e que o ruído de observação é incorrelacionado com o ruído de estado

$$E[\mathbf{v}_k \mathbf{e}_k^{-T}] = E[\mathbf{e}_k^- \mathbf{v}_k^T] = 0 \quad (\text{B.11})$$

obtém-se, reescrevendo (B.10), a equação para a matriz de covariância do erro de estimação

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T. \quad (\text{B.12})$$

Expandindo (B.12) tem-se

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k) \mathbf{K}_k^T. \quad (\text{B.13})$$

Pretende-se, assim, minimizar as variâncias dos erros de estimação, i.e. minimizar cada termo da diagonal principal de  $\mathbf{P}_k$ . Tendo em conta as propriedades da derivação matricial, obtém-se a partir de (B.13)

$$\frac{d(\text{trace } \mathbf{P}_k)}{d\mathbf{K}_k} = -2(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^-)^T + 2\mathbf{K}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k) = \mathbf{0}. \quad (\text{B.14})$$

Resolvendo (B.14), resulta para os ganhos óptimos que minimizam o erro quadrático médio de estimação (*Kalman gain*)

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}. \quad (\text{B.15})$$

Substituindo o ganho óptimo, (B.15), na equação da covariância do erro de estimação, permite reescrever (B.13) como

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^-, \quad (\text{B.16})$$

ou

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \left( \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right) \mathbf{K}_k^T, \quad (\text{B.17})$$

ou

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-. \quad (\text{B.18})$$

As equações (B.12), (B.13), (B.16), (B.17) e (B.18) permitem calcular a covariância do erro de estimação. No entanto (B.16), (B.17) e (B.18) apenas são válidas para os ganhos ótimos, enquanto que as restantes são válidas para qualquer ganho.

De forma a completar as equações do filtro de Kalman, é necessário determinar o valor da covariância do erro de estimação para o instante  $t_{k+1}$ . Com base em (B.1) e (B.6) obtém-se

$$\mathbf{e}_{k+1}^- = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = (\phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k) - \phi_k \hat{\mathbf{x}}_k = \phi_k \mathbf{e}_k + \mathbf{w}_k. \quad (\text{B.19})$$

Recorrendo a (B.19) escreve-se, finalmente

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = E[\mathbf{e}_{k+1}^- \mathbf{e}_{k+1}^{-T}] = E[(\phi_k \mathbf{e}_k + \mathbf{w}_k)(\phi_k \mathbf{e}_k + \mathbf{w}_k)^T] = \phi_k \mathbf{P}_k \phi_k^T + \mathbf{Q}_k. \quad (\text{B.20})$$

As equações (B.6), (B.7), (B.12), (B.15) e (B.20) descrevem o filtro de Kalman discreto, não estacionário, que minimiza o erro quadrático médio de estimação. A equação (B.12) pode ser substituída pela equação (B.13), (B.16), (B.17) ou (B.18), sendo as últimas três apenas válidas para o ganho óptimo.

Em certas aplicações é necessário considerar que o sistema apresenta uma entrada determinística. O modelo de estado em (1) altera-se para

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

onde

- $\mathbf{u}_k$  é o vector ( $p \times 1$ ) de entradas no instante  $t_k$ ;
- $\mathbf{B}_k$  é a matriz ( $n \times p$ ) no instante  $t_k$  que relaciona as entradas e o vector de estado.

Considerando a entrada determinística, apenas é necessário alterar a equação, (6), do cálculo da estimativa *a priori* do estado

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \boldsymbol{\phi}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^- + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}. \quad (\text{B.22})$$

Outra variante da implementação do filtro de Kalman é para sistemas invariantes no tempo. Para esta situação é possível obter uma solução estacionária para os ganho de Kalman,  $\mathbf{K}_k$ . Substituindo (B.15) em (B.18) e o resultado em (B.20), obtém-se a equação de *Riccati* discreta

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \boldsymbol{\phi}_k \mathbf{P}_k^- \boldsymbol{\phi}_k^T - \boldsymbol{\phi}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \boldsymbol{\phi}_k^T + \mathbf{Q}_k. \quad (\text{B.23})$$

Considerando regime estacionário admite-se  $\mathbf{P}_{k+1}^- \approx \mathbf{P}_k^- = \mathbf{P}^-$ , razão pela qual é possível deixar cair os índices de (B.23). A equação de *Riccati* assume, assim, a forma dada por (B.24), cuja solução permite determinar os ganhos de Kalman estacionários.

$$\mathbf{P}^- = \boldsymbol{\phi} \mathbf{P}^- \boldsymbol{\phi}^T - \boldsymbol{\phi} \mathbf{P}^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}^- \boldsymbol{\phi}^T + \mathbf{Q}. \quad (\text{B.24})$$

## Filtro de Kalman Estendido

Se a dinâmica do sistema for não linear ou existir uma relação não linear entre as observações e o vector de estados, é necessário recorrer a um filtro de Kalman estendido. Este filtro tem a particularidade de ser desenvolvido para poder lidar com sistemas não lineares tirando partido da linearização do sistema em torno da trajectória estimada pelo filtro. Uma variante deste filtro consiste em linearizar o sistema em torno da trajectória nominal. Nesta situação o filtro denomina-se por filtro de Kalman linearizado. Considere-se então o sistema não linear discreto

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_k, k) + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k, k) + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

onde

- $\mathbf{x}_k$  é o vector ( $n \times 1$ ) de variáveis de estado no instante  $t_k$ , ou seja  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$ ;
- $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_k, k)$  é a matriz de transição ( $n \times n$ ) não linear do estado do sistema no instante  $t_k$  que relaciona  $\mathbf{x}_k$  com  $\mathbf{x}_{k+1}$ ;

- $\mathbf{w}_k$  é o vector ( $n \times 1$ ) cujos elementos são ruído branco gaussiano e afectam as variáveis de estado no instante  $t_k$ , com covariância conhecida;
- $\mathbf{z}_k$  é o vector ( $m \times 1$ ) das observações no instante  $t_k$ ;
- $h(\mathbf{x}_k, k)$  é a matriz de ligação ( $m \times n$ ) não linear que relaciona as observações e as variáveis de estado no instante  $t_k$ ;
- $\mathbf{v}_k$  é o vector ( $m \times 1$ ) cujos elementos são ruído branco gaussiano e afectam as observações no instante  $t_k$ , com covariância conhecida.

Os ruídos de estado e de observação são caracterizados por (B.2), (B.3) e (B.4).

Admitindo-se que o filtro opera ao longo da trajectória estimada, verificando a relação

$$\mathbf{x}_{k+1}^* = \phi(\mathbf{x}_k^*, k), \quad (\text{B.26})$$

e que o erro entre a trajectória real e a estimada sobre a qual é linearizado o sistema, é dado por

$$\Delta \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^*, \quad (\text{B.27})$$

pode-se escrever(B.25) como

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^* + \Delta \mathbf{x}_{k+1} = \phi(\mathbf{x}_{k+1}^* + \Delta \mathbf{x}_{k+1}, k) + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_{k+1}^* + \Delta \mathbf{x}_{k+1}, k) + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (\text{B.28})$$

Para erros de trajectória muito pequenos, é válida a aproximação de  $\phi(\mathbf{x}_k, k)$  e  $h(\mathbf{x}_k, k)$  pelos termos de primeira ordem da expansão em série de Taylor, de onde resulta

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^* + \Delta \mathbf{x}_{k+1} \approx \phi(\mathbf{x}_{k+1}^*, k) + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_k} \right]_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^*} \cdot \Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k \approx h(\mathbf{x}_{k+1}^*, k) + \left[ \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_k} \right]_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^*} \cdot \Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

Trabalhando no espaço do erro das variáveis de estado e tendo em conta (B.26), (B.29) simplifica-se para

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x}_{k+1} \approx \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_k} \right]_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^*} \cdot \Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_{k+1}^*, \mathbf{k}) \approx \left[ \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_k} \right]_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^*} \cdot \Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (\text{B.30})$$

De forma análoga a (B.7), a estimativa do erro é actualizada através de

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_k = \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_{inc} - \mathbf{H}_k \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^-), \quad (\text{B.31})$$

onde

$$\mathbf{z}_{inc} = \mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{k}), \quad (\text{B.32})$$

$$\mathbf{H}_k = \left[ \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_k} \right]_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^*}. \quad (\text{B.33})$$

A estimativa *à priori* do erro da trajectória é dada por

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_k^- = \phi_k \Delta \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \quad (\text{B.34})$$

sendo

$$\phi_k = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_k} \right]_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^*} \quad (\text{B.35})$$

As equações para cálculo dos ganhos e cálculo da matriz de covariância do erro de estimação do filtro são análogas às descritas para o filtro de Kalman discreto, (B.15) e (B.13) respectivamente, utilizando o entanto a matriz de linearizada  $\mathbf{H}_k$ . A equação de propagação da matriz de covariância do erro de estimação é semelhante a (B.20), utilizando a matriz  $\phi_k$  linearizada.

É possível alterar as expressões para trabalhar nas variáveis totais em vez de trabalhar no espaço do erro da trajectória. Assim, de (B.31) resulta

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{\mathbf{x}}_k &= \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{z}_{inc} - \mathbf{H}_k \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^- \right) \\
\Delta \hat{\mathbf{x}}_k &= \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k^*, k) - \mathbf{H}_k \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^- \right) \\
\Delta \hat{\mathbf{x}}_k &= \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{z}_k - \left( h(\mathbf{x}_k^*, k) + \mathbf{H}_k \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^- \right) \right) \\
\Delta \hat{\mathbf{x}}_k &= \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^- \right)
\end{aligned} \tag{B.36}$$

Somando  $\mathbf{x}_k^*$  a ambos os membros da equação resulta

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_k^* + \Delta \hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{x}_k^* + \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^- \right) \\
\hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^- \right)
\end{aligned} \tag{B.37}$$

A projecção da estimativa do filtro é então dada por

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \phi_k \left( \hat{\mathbf{x}}_k, k \right) \tag{B.38}$$

e a estimativa das observações vem

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1}^- = h \left( \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right) \tag{B.39}$$

Desta forma apresentaram-se as equações que permitem implementar o filtro de Kalman estendido discreto que opera nas variáveis totais de estimação.

## Apêndice C

### Discretização de modelos de estado

Neste apêndice aborda-se a discretização de modelos de estado lineares. A discretização de modelos é, actualmente, usada como ferramenta para permitir a avaliação numérica e implementação dos mesmos em computadores digitais. A discretização pode-se efectuar de várias formas das quais se destaca a discretização de Euler ou o Zero Order Hold (ZOH).

Considerando o modelo de estado contínuo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \end{cases}, \quad (\text{C.1})$$

onde  $\mathbf{w}(t)$  e  $\mathbf{v}(t)$  são ruído branco contínuo com a distribuição

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t) &\sim N(0, \mathbf{Q}) \\ \mathbf{v}(t) &\sim N(0, \mathbf{R}) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Partindo da primeira equação de (C.1) se estar perturbada pelo ruído  $\mathbf{w}(t)$  e tendo em conta que

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}, \quad (\text{C.3})$$

chega-se a

$$\mathbf{A}e^{-\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{x}}(t) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (\text{C.4})$$

que é facilmente reconhecido como

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A}e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (\text{C.5})$$

Integrando (C.5), obtém-se, após alguma manipulação algébrica,

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (\text{C.6})$$

Discretizando através do Zero Order Hold, resulta em no instante  $k$

$$\mathbf{x}_k = e^{Ak\Delta t} \mathbf{x}(0) + \int_0^{k\Delta t} e^{A(k\Delta t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (\text{C.7})$$

No instante  $k+1$  tem-se

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A(k+1)\Delta t} \mathbf{x}(0) + \int_0^{(k+1)\Delta t} e^{A((k+1)\Delta t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (\text{C.8})$$

Escrevendo (C.8) em função de  $\mathbf{x}_k$ , resulta em

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A\Delta t} \left[ e^{Ak\Delta t} \mathbf{x}(0) + \int_0^{k\Delta t} e^{A(k\Delta t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \right] + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{A((k+1)\Delta t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (\text{C.9})$$

O sistema descrito por (C.1) discretizado assume a forma

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k(t) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}_k(t) + \mathbf{D}_d \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \end{cases}, \quad (\text{C.10})$$

com as covariâncias do ruído dadas por

$$\begin{cases} \mathbf{w}_k \sim N(0, \mathbf{Q}_k) \\ \mathbf{v}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k) \end{cases}. \quad (\text{C.11})$$

Fazendo a equivalência entre (C.9) e (C.10), as matrizes  $\mathbf{A}_d$ ,  $\mathbf{B}_d$ ,  $\mathbf{C}_d$ ,  $\mathbf{Q}_d$  e  $\mathbf{R}_d$  do equivalente discreto são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{A}_d = e^{A\Delta t} = L^{-1} \left\{ (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \right\}_{t=\Delta t}, \quad (\text{C.12})$$

$$\mathbf{B}_d = \left( \int_{\tau=0}^{\Delta t} e^{A\tau} d\tau \right) \mathbf{B}, \quad (\text{C.13})$$

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{C}, \quad (\text{C.14})$$

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{D}, \quad (\text{C.15})$$

$$\mathbf{Q}_d = \int_{\tau=0}^{\Delta t} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A}^T \tau} d\tau, \quad (\text{C.16})$$

$$\mathbf{R}_d = \frac{\mathbf{R}}{\Delta t}. \quad (\text{C.17})$$

## Apêndice D

### Matriz covariância de ruído de estado

Neste apêndice apresenta-se a matriz de covariância de estado do modelo *Constant model with known Turn Rate* obtida através da expressão (3.39) ou alternativamente por (C.16). Assim obtém-se

$$\mathbf{Q}_k = [\mathbf{Q}_k^1 \quad \mathbf{Q}_k^2 \quad \mathbf{Q}_k^3 \quad \mathbf{Q}_k^4]^T, \quad (3.18)$$

onde  $\mathbf{Q}_k^j, j=1, 2, 3, 4$  é dado por

$$\mathbf{Q}_k^1 = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x^2 (-1/4 \cdot \sin(2\omega\Delta t) + \omega\Delta t/2)}{\omega^3} + \frac{\sigma_y^2 (\sin(2\omega\Delta t)/4 + 3/2 \cdot \Delta t\omega - 2\sin(\omega\Delta t))}{\omega^3} \\ \frac{\sigma_x^2 \sin(2\omega\Delta t)^2}{2\omega^2} + \frac{\sigma_y^2 (\cos(\omega\Delta t)^2/2 - \cos(\omega\Delta t))}{\omega^2} \\ \frac{\sigma_x^2 (\cos(\omega\Delta t)^2/2 - \cos(\omega\Delta t))}{\omega^3} - \frac{\sigma_y^2 (\cos(\omega\Delta t)^2/2 - \cos(\omega\Delta t))}{\omega^3} \\ \frac{\sigma_x^2 (-1/4 \cdot \sin(2\omega\Delta t) + \omega\Delta t/2)}{\omega^2} + \frac{\sigma_y^2 (\sin(2\omega\Delta t)/4 + 1/2 \cdot \Delta t\omega - \sin(\omega\Delta t))}{\omega^2} \end{bmatrix}; (3.19)$$

$$\mathbf{Q}_k^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k^1(2) \\ \frac{\sigma_x^2 (1/4 \cdot \sin(2\omega\Delta t) + \omega\Delta t/2)}{\omega} + \frac{\sigma_y^2 (-1/4 \cdot \sin(2\omega\Delta t) + \omega\Delta t/2)}{\omega} \\ \frac{\sigma_x^2 (-\sin(2\omega\Delta t)^2/4 - \omega\Delta t/2 + \sin(\omega\Delta t))}{\omega^2} - \frac{\sigma_y^2 (-1/4 \cdot \sin(2\omega\Delta t) + \omega\Delta t/2)}{\omega^2} \\ \frac{\sigma_x^2 1/2 \cdot \sin(2\omega\Delta t)^2}{\omega} - \frac{\sigma_y^2 \sin(2\omega\Delta t)^2}{2\omega} \end{bmatrix}; (3.20)$$

$$\mathbf{Q}_k^3 = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{Q}_k^1(3) \\ \mathbf{Q}_k^2(3) \\ \frac{\sigma_x^2 (\sin(2\omega\Delta t)/4 + 3/2 \cdot \Delta t \omega - 2\sin(\omega\Delta t))}{\omega^3} + \frac{\sigma_y^2 (-1/4 \cdot \sin(2\omega\Delta t) + \omega\Delta t/2)}{\omega^3} \\ \frac{\sigma_x^2 (\cos(\omega\Delta t)^2/2 - \cos(\omega\Delta t))}{\omega^2} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_y^2 \sin(\omega\Delta t)^2}{\omega^2} \end{array} \right]; (3.21)$$

$$\mathbf{Q}_k^4 = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{Q}_k^1(4) \\ \mathbf{Q}_k^2(4) \\ \mathbf{Q}_k^3(4) \\ \frac{\sigma_x^2 (-1/4 \cdot \sin(2\omega\Delta t) + \omega\Delta t/2)}{\omega} + \frac{\sigma_y^2 (\sin(2\omega\Delta t)^2/4 + \omega\Delta t/2)}{\omega} \end{array} \right], (3.22)$$

onde  $\mathbf{Q}_k^j(n)$ ,  $j, n=1, 2, 3, 4$  representa a posição  $n$  da matriz  $\mathbf{Q}_k^j$ .

## Apêndice E

### Dedução da equação para cálculo do Cramér-Rao *Lower Bound* através do método de Taylor

Com o objectivo de demonstrar a manipulação algébrica necessária para se chegar às equações recursivas utilizadas no cálculo do limite de desempenho de Cramér-Rao e limite de desempenho de Cramér-Rao à posteriori, respectivamente (4.25) e a (4.43), apresentam-se os lemas 1 e 2. Repetem-se as equações (4.25) e (4.43), em notação mais simplificada

$$\left(\mathbf{P}_k\right)^{-1} = \left(\phi_k \mathbf{P}_{k-1} \phi_k^T\right)^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k \quad (\text{C.23})$$

$$\left(\mathbf{P}_k\right)^{-1} = \left(\phi_k \mathbf{P}_{k-1} \phi_k^T + \mathbf{Q}_k\right)^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k \quad (\text{C.24})$$

#### Lema 1.

$$\mathbf{P}_k^{-1} = \left(\mathbf{P}_k^-\right)^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k \quad (\text{C.25})$$

*Demonstração.*

$$\mathbf{P}_k \mathbf{P}_k^{-1} = \mathbf{I}, \quad (\text{C.26})$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade, e, a partir de filtro de Kalman estendido (EKF), tem-se

$$\mathbf{P}_k = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_k^-, \quad (\text{C.27})$$

onde  $\mathbf{K}_k$  é o ganho de Kalman definido por

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T\right)^{-1}. \quad (\text{C.28})$$

Por simplicidade, deixa-se cair o índice  $k$  de todos os termos nesta demonstração. Substituindo (C.25) e (C.27) no lado esquerdo da igualdade (C.26), obtém-se

$$\begin{aligned}
 & [(\mathbf{I} - \mathbf{KH})\mathbf{P}^-] \left[ (\mathbf{P}^-)^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \right] = \\
 & = (\mathbf{I} - \mathbf{KH})\mathbf{P}^- (\mathbf{P}^-)^{-1} + (\mathbf{I} - \mathbf{KH})\mathbf{P}^- \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} = \\
 & = (\mathbf{I} - \mathbf{KH}) + \mathbf{P}^- \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} - \mathbf{KHP}^- \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} = \\
 & = \mathbf{I} - (\mathbf{K} - \mathbf{P}^- \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} + \mathbf{KHP}^- \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{H} = \\
 & = \mathbf{I} - (\mathbf{K}(\mathbf{I} + \mathbf{HP}^- \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}) - \mathbf{P}^- \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{H} = \\
 & = \mathbf{I} - (\mathbf{K}(\mathbf{I} + \mathbf{HP}^- \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}) - \mathbf{P}^- \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{H} = \\
 & = \mathbf{I} - (\mathbf{K}(\mathbf{R} + \mathbf{HP}^- \mathbf{H}^T) \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{P}^- \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{H} = \\
 & = \mathbf{I} - (\mathbf{P}^- \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{HP}^- \mathbf{H}^T)^{-1} (\mathbf{R} + \mathbf{HP}^- \mathbf{H}^T) \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{P}^- \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{H} = \quad (C.21) \\
 & = \mathbf{I} - (\mathbf{P}^- \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{P}^- \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{H} = \\
 & = \mathbf{I}
 \end{aligned}$$

■

**Lema 2.**

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \quad (C.29)$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{K} = \mathbf{IK} = \\
 & = \mathbf{PP}^{-1} \mathbf{K} = \\
 & = \mathbf{P} \left( (\mathbf{P}^-)^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \right) \mathbf{K} = \quad (Lema 1) \\
 & = \mathbf{P} \left( (\mathbf{P}^-)^{-1} \mathbf{K} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{HK} \right) = \\
 & = \mathbf{P} \left( (\mathbf{P}^-)^{-1} \mathbf{P}^- \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{HP}^- \mathbf{H}^T)^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{HK} \right) = \quad (C.21) \\
 & = \mathbf{P} \left[ \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{HP}^- \mathbf{H}^T)^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{HP}^- \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{HP}^- \mathbf{H}^T)^{-1} \right] = \quad (C.21) \\
 & = \mathbf{P} \left[ \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{HP}^- \mathbf{H}^T \right] \left[ \mathbf{R} + \mathbf{HP}^- \mathbf{H}^T \right]^{-1} = \\
 & = \mathbf{PH}^T \left[ \mathbf{I} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{HP}^- \mathbf{H}^T \right] \left[ \mathbf{R} + \mathbf{HP}^- \mathbf{H}^T \right]^{-1} = \\
 & = \mathbf{PH}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \left[ \mathbf{I} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{HP}^- \mathbf{H}^T \right] \left[ \mathbf{R} + \mathbf{HP}^- \mathbf{H}^T \right]^{-1} = \\
 & = \mathbf{PH}^T \mathbf{R}^{-1} \left[ \mathbf{R} + \mathbf{HP}^- \mathbf{H}^T \right] \left[ \mathbf{R} + \mathbf{HP}^- \mathbf{H}^T \right]^{-1} = \\
 & = \mathbf{PH}^T \mathbf{R}^{-1}
 \end{aligned}$$

■

Tendo em conta os lemas 1 e 2, já se pode deduzir (C.23) e (C.24). Das equações do EKF tem-se

$$\mathbf{P}_k = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_k^-, \quad (\text{C.30})$$

$$\mathbf{P}_k^- = \boldsymbol{\phi}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\phi}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}. \quad (\text{C.31})$$

Considerando o lema 2, desta vez retomando o índice  $k$ , conduz a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_k^- \\ \mathbf{P}_k &= [\mathbf{I} - \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_k^- \\ \mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_k [\mathbf{P}_k^{-1} - \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_k^- \\ \mathbf{I} &= [\mathbf{P}_k^{-1} - \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_k^- \\ (\mathbf{P}_k^-)^{-1} &= \mathbf{P}_k^{-1} - \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{P}_k^{-1} &= (\mathbf{P}_k^-)^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{P}_k^{-1} &= (\boldsymbol{\phi}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\phi}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1})^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k && (\text{C.26}) \\ \mathbf{P}_k^{-1} &= (\boldsymbol{\phi}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\phi}_{k-1}^T)^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k && \text{Assumindo } \mathbf{Q}_{k-1} = 0 \end{aligned}$$

# Referências

- [1] M. Morgado. Sistema de Navegação Inercial com ajuda USBL. Relatório de Trabalho Final de Curso, Universidade Técnica de Lisboa – Instituto Superior Técnico, Setembro 2005.
- [2] R.G. Brown and P.Y.C. Hwang. *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. John Wiley & Sons, third edition, 1997.
- [3] A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, third edition, 1991.
- [4] J. Craig. *Introduction to Robotics, Mechanics and Control*. Addison-Wesley, New York, second edition, 1989.
- [5] M. Athans. *Multiple-Model Adaptive Estimation (MMAE)*. MIT & IST October 17, 2001.
- [6] P. M. Alves. Seguimento e predição da trajectória de alvos móveis em duas dimensões. Dissertação para obtenção do Grau de Mestre Engenharia Electrotécnica e de Computadores, Universidade Técnica de Lisboa – Instituto Superior Técnico, Outubro de 2004.
- [7] Steven M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Prentice Hall, 1993.
- [8] X. Rong Li, Vesselin P. Jilkov. *Survey Maneuvering Target Tracking*. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, vol. 39, pp 1333-1364, October 2003.
- [9] Wilson J. Rugh. *Linear System Theory*. Prentice-Hall, second edition, USA 1996.

- [10] James H. Taylor. *The Cramér-Rao Estimation Error Lower Bound Computation for Deterministic Nonlinear Systems*. IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-24, pp 343-344 April 1979.
- [11] Thomas H. Kerr. *Status of CR-Like Lower Bounds for Nonlinear Filtering*. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, vol. 25, pp 590-597, September 1989.
- [12] Petr Tichavský, Carlos H. Muravchik, Arye Nehorai. *Posterior Cramér-Rao Bounds for Discrete-Time Nonlinear Filtering*. IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 46, pp 1386-1396 May 1998.
- [13] William F. Level. *Approximate Cramér-Rao Bound for Multiple Target Tracking*. In Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Doctor of Philosophy, School of Electrical and Computer Engineering Georgia Institute of Technology, May 2006.