

Guia de Laboratório Dinâmica de Rotação

Ano Lectivo 2004/05

1 Resumo

A experiência apresentada tem como objectivo estudar a dinâmica do movimento de rotação. Em particular, o aluno terá oportunidade de verificar

- que uma força constante aplicada a um sistema rotativo gera um movimento de rotação uniformemente acelerado;
- que a aceleração angular desse movimento é proporcional ao momento da força aplicada.

2 Fundamentos Teóricos

2.1 Equações do Movimento Rotacional

Considere-se um corpo rígido com velocidade angular ω . A equação que descreve o seu movimento rotacional é

$$\sum \mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}, \quad (1)$$

onde $\sum \mathbf{M}$ é o somatório dos momentos de força externos aplicados sobre o corpo e $\dot{\mathbf{H}}$ é a variação absoluta no tempo do momento angular do corpo; quer \mathbf{M} , quer \mathbf{H} são referidos ou a um ponto fixo O ou centro de massa G do corpo.

Suponha-se que o movimento do corpo rígido será descrito num referencial de eixos x , y , e z , com origem no ponto fixo O ou no centro de massa G do corpo rígido e que apresenta uma velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$. Neste referencial, o momento angular do corpo é

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} &= (I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z) \mathbf{i} \\ &+ (I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z) \mathbf{j} \\ &+ (I_{xz}\omega_x + I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z) \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (2)$$

onde \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} são os versores das direcções x , y e z , respectivamente, e \mathbf{I} é o tensor de inércia do corpo escrito no referencial $Oxyz$ ou $Gxyz$. A variação absoluta no tempo do momento angular escrita neste referencial não-inercial é

$$\dot{\mathbf{H}} = \left(\frac{d\mathbf{H}}{dt} \right)_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}, \quad (3)$$

em que a componente $\left(\frac{d\mathbf{H}}{dt} \right)_{xyz}$ representa a variação da magnitude das componentes de \mathbf{H} no referencial xyz e $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}$ representa a variação da direcção dessas componentes. Introduzindo (3) em (1),

obtem-se

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{M} &= \left(\dot{H}_x - H_y \Omega_z + H_z \Omega_y \right) \mathbf{i} \\ &+ \left(\dot{H}_y - H_z \Omega_x + H_x \Omega_z \right) \mathbf{j} \\ &+ \left(\dot{H}_z - H_x \Omega_y + H_y \Omega_x \right) \mathbf{k}.\end{aligned}\tag{4}$$

2.2 Teorema dos Eixos Paralelos

Se o momento de inércia de um corpo rígido em torno de um eixo baricêntrico é conhecido, então é possível determinar o momento de inércia do corpo em torno de um eixo paralelo ao eixo baricêntrico.

Suponha-se que a massa do corpo rígido em questão é M . Seja $Cx'y'z'$ um referencial cuja origem é um ponto arbitrário C , e $Gxyz$ um referencial baricêntrico cujos eixos são paralelos aos eixos de $Cx'y'z'$. Sejam \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} as coordenadas de G no referencial $Cx'y'z'$. Então as coordenadas x' , y' , e z' do elemento dM no referencial $Cx'y'z'$ relacionam-se com as coordenadas x , y , e z do mesmo elemento no referencial $Gxyz$ da seguinte forma:

$$x' = x + \bar{x}, \quad y' = y + \bar{y}, \quad z' = z + \bar{z}.\tag{5}$$

Assim, por exemplo, o momento de inércia do corpo relativamente ao eixo z' pode ser escrito como

$$\begin{aligned}I_{z'z'} &= \int (x'^2 + y'^2) dM \\ &= \int [(x + \bar{x})^2 + (y + \bar{y})^2] dM \\ &= \int (x^2 + y^2) dM + 2\bar{x} \int x dM + 2\bar{y} \int y dM + (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \int dM,\end{aligned}$$

em que as integrações são feitas no volume do corpo rígido. O primeiro integral desta expressão é o momento de inércia do corpo relativamente ao eixo baricêntrico I_{zz} , e o segundo e terceiro integrais são nulos, uma vez que determinam, respectivamente, as coordenadas x e y de G no referencial cuja origem é G . Logo,

$$I_{z'z'} = I_{zz} + M(\bar{x}^2 + \bar{y}^2),\tag{6}$$

e da mesma forma,

$$I_{x'x'} = I_{xx} + M(\bar{y}^2 + \bar{z}^2),\tag{7}$$

$$I_{y'y'} = I_{yy} + M(\bar{x}^2 + \bar{z}^2).\tag{8}$$

Facilmente se verifica que a soma $\bar{x}^2 + \bar{y}^2$ é o quadrado da distância, medida na perpendicular, entre os eixos z e z' , e de forma semelhante para as somas $\bar{y}^2 + \bar{z}^2$ e $\bar{x}^2 + \bar{z}^2$. Assim, representando por d a distância entre um eixo arbitrário AA' e um eixo baricêntrico BB' paralelos, pode escrever-se a seguinte relação entre os momentos de inércia I do corpo relativamente a AA' e \bar{I} relativamente a BB' :

$$I = \bar{I} + Md^2.\tag{9}$$

2.2.1 Aplicação à Montagem Experimental

Considere-se a montagem experimental da figura 1. Neste caso, o corpo rígido poderá ser constituído por uma roldana tripla, uma barra cilíndrica e duas massas que se podem deslocar ao longo da barra, cujo eixo axial é perpendicular ao eixo axial da roldana tripla. O eixo de rotação do corpo coincide com o eixo axial da roldana tripla.

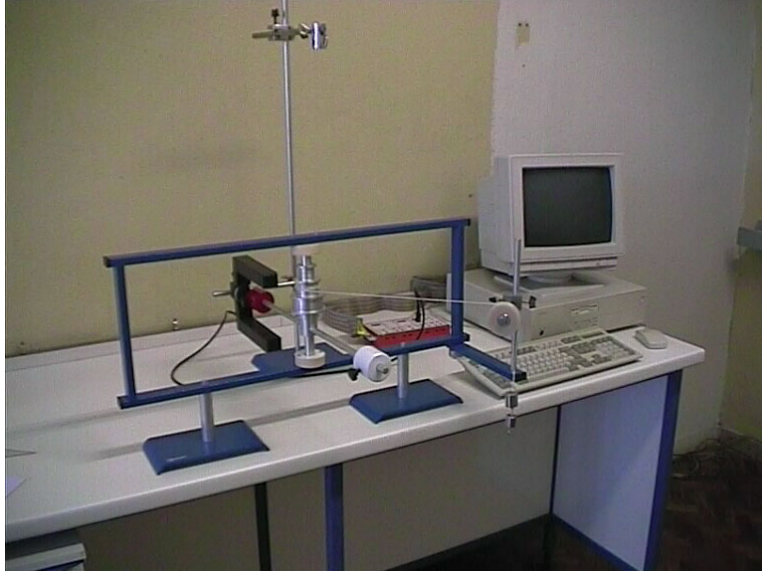


Figura 1: Montagem Experimental

Considere-se que o referencial $Oxyz$ tem origem no ponto O de intersecção do eixo de rotação com o eixo axial da barra cilíndrica. Sejam x coincidente com este eixo axial e z coincidente com o eixo de rotação do corpo rígido, apontando para cima. Assim sendo, uma vez que o eixo de rotação é o eixo z , é verdade que ω_z é a única componente da velocidade angular do corpo rígido diferente de zero: $\omega_x = \omega_y = 0$. Por outro lado, o plano xz é plano de simetria do corpo, pelo que $I_{xy} = I_{yz} = 0$. Assim, para a montagem experimental, verifica-se

$$\sum M_x = I_{xz}\dot{\omega}_z \quad (10)$$

$$\sum M_y = I_{xz}\omega_z^2 \quad (11)$$

$$\sum M_z = I_{zz}\dot{\omega}_z. \quad (12)$$

O corpo rígido da montagem experimental está sujeito às seguintes forças exteriores: força gravítica, que se supõe aplicada no seu centro de massa G , tensão do fio \mathbf{T} , aplicada sobre o perímetro de uma das roldanas da roldana tripla e perpendicular ao eixo de rotação e reacções nos apoios. De todas estas forças, a única que apresenta momento segundo z é \mathbf{T} , pelo que sabendo $\dot{\omega}_z$ e \mathbf{T} é possível determinar o momento de inércia do corpo em torno daquele eixo. De facto, a partir de (12), obtém-se

$$I_{zz} = \frac{Tr}{\dot{\omega}_z}, \quad (13)$$

em que r é o raio da roldana.

A aplicação da segunda lei de Newton à massa m pendurada na outra extremidade do fio resulta em

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - \mathbf{T},$$

que resolvendo em ordem a \mathbf{T} se reduz a

$$\mathbf{T} = m(\mathbf{g} - \mathbf{a}),$$

em que \mathbf{g} e \mathbf{a} são as acelerações da gravidade e da massa m , respectivamente. Assim sendo,

$$\sum M_z = rT = rm(g - a). \quad (14)$$

A aceleração linear da massa m , \mathbf{a} , é igual à aceleração tangencial, \mathbf{a}_t , do ponto de contacto do fio com a roldana. Então

$$a = a_t = r\dot{\omega}_z, \quad (15)$$

pelo que o momento de inércia do corpo rígido em torno do eixo z é dado por

$$I_{zz} = \frac{rm(g - r\dot{\omega}_z)}{\dot{\omega}_z}. \quad (16)$$

2.3 Bibliografia

- Beer, F. e Johnston, E., Mecânica Vectorial para Engenheiros, Dinâmica, sexta edição, McGraw Hill, 1998;
- Meriam, J. e Kraige, L., *Engineering Mechanics, Volume Two, 3rd edition*, John Wiley & Sons, Inc, 1993;
- *Measuring and Evaluating, 524112, CASSY (Computer Assisted Science System*, Leybold Didactic GmbH (manual do sistema de aquisição de dados).

2.4 Lista de Problemas

- Problemas 18.55 a 18.106 e 9.149 a 9.184 de Beer, F. e Johnston, E., Mecânica Vectorial para Engenheiros, Dinâmica, sexta edição, McGraw Hill, 1998;
- Problemas 7/75 a 7/100 de Meriam, J. e Kraige, L., *Engineering Mechanics, Volume Two, 3rd edition*, John Wiley & Sons, Inc, 1993.

3 Lista de Equipamento

Segue-se uma lista detalhada do equipamento a utilizar:

- 1 roldana tripla, de diâmetros de 30 mm, 45 mm e 60 mm;
- 1 estrutura metálica de dimensões 775×270 mm², apoiada sobre 2 suportes metálicos estáveis;
- 1 barra metálica cilíndrica de 600 mm de comprimento e diâmetro constante, que atravessa a base da roldana tripla, e que se encontra graduada de 10 mm em 10 mm;
- 2 massas cilíndricas de 725 g e de densidade de massa constante, uma branca e outra vermelha, que podem ser deslocadas ao longo da barra metálica;
- 1 roldana simples orientável, montada sobre um braço de altura variável; este último, encontra-se colocado sobre um suporte fixo na estrutura metálica;
- 1 massa de 25 g, 1 massa de 50 g, 2 massas de 100 g;
- fio com uma argola numa das extremidades;
- 1 PC com *software* de aquisição de dados CASSY (*Computer Assisted Science System*);
- 1 caixa CASSY-E 524000;
- 1 sensor óptico em forma de U;
- 1 cabo de comunicação entre o sensor óptico e a caixa CASSY-E 524000;
- 1 cabo de fita de comunicação entre a caixa CASSY-E 524000 e o PC;

- 1 suporte para o sensor óptico;
- 1 paquímetro.

O sistema de aquisição de dados CASSY recebe dados através de obstruções de uma barreira luminosa em funcionamento no sensor óptico. Em particular, sempre que a barreira é obstruída o *led* vermelho do sensor apaga-se. Note-se que no decorrer das experiências e de acordo com as instruções fornecidas ao sistema de aquisição de dados, este medirá o intervalo de tempo entre o início e o fim da obstrução luminosa.

4 Finalidade da Experiência

A experiência que a seguir se descreve tem como finalidade familiarizar o aluno com o movimento de rotação. Neste sentido, os objectivos da experiência **Aceleração Angular e Momento de Inércia** são mostrar que uma força constante aplicada sobre um sistema rotativo gera um movimento de rotação uniformemente acelerado e que o valor da aceleração angular é proporcional ao momento da força aplicada. Serão determinados os valores da aceleração angular e da constante de proporcionalidade. Esta última é o momento de inércia do corpo rígido em torno do eixo de rotação.

5 Descrição da Experiência

5.1 Aceleração Angular e Momento de Inércia

Esta experiência está projectada para ter a duração de 60 minutos.

5.1.1 Equipamento

1. 1 roldana tripla, de diâmetros de 30 mm, 45 mm e 60 mm;
2. 1 estrutura metálica de dimensões $775 \times 270 \text{ mm}^2$, apoiada sobre 2 suportes metálicos estáveis;
3. 1 barra metálica cilíndrica de 600 mm de comprimento e diâmetro constante, que atravessa a base da roldana tripla, e que se encontra graduada de 10 mm em 10 mm;
4. 1 roldana simples orientável, montada sobre um braço de altura variável; este último, encontra-se montado sobre um suporte fixo na estrutura metálica;
5. 1 massa de 25 g, 1 massa de 50 g, 2 massas de 100 g;
6. fio com argola numa das extremidades;
7. 1 PC com *software* de aquisição de dados CASSY (*Computer Assisted Science System*);
8. 1 sensor óptico em forma de U;
9. 1 cabo de comunicação entre o sensor óptico e a caixa CASSY-E 524000;
10. 1 cabo de fita de comunicação entre a caixa CASSY-E 524000 e o PC;
11. 1 suporte para o sensor óptico;
12. 1 paquímetro.

5.1.2 Sequência de Operações

Nesta experiência, o corpo rígido é formado pela roldana tripla e pela barra metálica. O objectivo da sequência de operações consiste em medir a velocidade angular da barra metálica durante a evolução do movimento do corpo. De facto, será medida a velocidade linear das extremidades da barra durante um curto intervalo de tempo, supondo que nesse intervalo a sua velocidade é constante.

O intervalo de tempo considerado é aquele entre o início e o fim da obstrução luminosa feita por uma das extremidades da barra metálica. Conhecendo o diâmetro da barra metálica, é possível determinar a velocidade linear das extremidades e a partir daqui, conhecendo o comprimento da barra, determina-se a sua velocidade angular.

1. Coloque o sensor óptico no seu suporte, de modo a que a passagem das extremidades da barra metálica possa ser assinalada; tenha em conta que interessa que a obstrução luminosa seja feita ao longo do diâmetro horizontal de cada extremidade;
2. usando o paquímetro, meça o diâmetro da barra metálica;
3. enrole a extremidade do fio sem argola em torno da roldana tripla, aplicando-o sobre a roldana de menor diâmetro ($d = 30$ mm), de forma a que o perímetro de cada volta se mantenha aproximadamente constante e igual πd ; dê o maior número possível de voltas;
4. coloque a roldana móvel à altura média da roldana de diâmetro $d = 30$ mm;
5. passe o fio proveniente da roldana tripla pela roldana móvel, ajustando a altura desta última, de modo a que a porção de fio entre as roldanas seja horizontal no decorrer da experiência;
6. ligue o cabo do sensor à entrada E da caixa CASSY-E 524000;
7. ligue o PC; o programa de aquisição de dados CASSY será carregado automaticamente (caso contrário, digite LD \leftrightarrow na linha de comando); siga as instruções indicadas:
 - (a) Program Selection: Stop Clock \leftrightarrow
 - (b) Main Menu: Select time/edges \leftrightarrow
 - (c) Time/edges: Measure edge time dt \leftrightarrow
 - (d) Time range: Measure time in ms \leftrightarrow
 - (e) Time/edges: Start/Stop edges \leftrightarrow
 - (f) Start at E: Positive edge at E \leftrightarrow
 - (g) Stop at E/F: Negative edge at E \leftrightarrow
 - (h) Esc
 - (i) Main Menu: Automatic/param./formula \leftrightarrow
 - (j) Auto./param./formula: Enter formula \leftrightarrow
 - (k) Physical symbol: F1 \leftrightarrow
 - (l) Physical unit: /s \leftrightarrow
 - (m) No. decimal places: 5 \leftrightarrow
 - (n) Formula: o aluno deverá introduzir aqui a expressão que determina a velocidade angular Ω em função de dt; a forma de escrever operações matemáticas é semelhante aquela utilizada em FORTRAN; \leftrightarrow
8. ligue a impressora;

9. coloque uma massa de 150 g na extremidade com argola do fio, segurando a barra metálica, e mantendo a massa num posição fixa perto da roldana móvel, de modo a que a sua altura seja a maior possível; tenha cuidado para que esta massa não oscile e para que o fio se encontre em tensão; lembre-se que toda a estrutura da montagem experimental deverá ser posicionada de forma a que esta massa viaje até ao solo, para que seja registado o maior número de passagens da barra pelo sensor;
10. Main Menu: Start new measurement \leftrightarrow ;
11. faça F1 Start no mesmo instante em que larga a massa, deixando-a cair; poderá, durante a aquisição de dados, ser emitida uma janela de aviso de erro dizendo Time error: Please switch off display, provavelmente devida ao facto da passagem da extremidade ser tão rápida, que ultrapassa o limite de sensibilidade do sensor óptico e/ou da placa de aquisição; neste caso, faça Esc, prossiga com os próximos passos até à impressão dos dados que acabaram de ser adquiridos; se o número de pontos obtido não for suficiente para conduzir uma boa regressão linear, repita a experiência para verificar se é possível obter mais informação (maior número de passagens da barra); tenha especial atenção para não largar a barra com velocidade angular inicial;
12. faça F1 Stop imediatamente antes do fio se ter desenrolado na totalidade ou antes da massa ter atingido o solo;
13. Main Menu: Select representation \leftrightarrow (este passo deverá ser conduzido apenas antes de observar o primeiro conjunto de dados);
14. Display: Select x-axis, t, t \leftrightarrow (este passo deverá ser conduzido apenas antes de observar o primeiro conjunto de dados);
15. Display: Select y1-axis, Ω , Ω \leftrightarrow (este passo deverá ser conduzido apenas antes de observar o primeiro conjunto de dados);
16. Main Menu: Evaluate in graph \leftrightarrow ; o aluno deverá decidir se o gráfico representado corresponde às suas expectativas, i.e., se os dados obtidos são ou não razoáveis, devendo no primeiro caso ser impressos como se explica nos passos seguintes, e no segundo, a experiência ser repetida;
17. Esc;
18. Main Menu: F5 Output meas. values
19. escolher Print Table \leftrightarrow From No (1) \leftrightarrow to No (último – valor por defeito) \leftrightarrow step 1 \leftrightarrow
20. repita os passos 1-19 usando sucessivamente massas de 175 g, 200 g, 225 g, 250 g, 275 g;
21. repita os passos 1-20 usando sucessivamente as roldanas de diâmetros $d = 45$ mm e $d = 60$ mm;
22. no fim da realização das experiências faça:
 - (a) Main Menu: End \leftrightarrow
 - (b) End \leftrightarrow .

5.1.3 Medições a Efectuar

Durante o ponto 10 de 5.1.2, o sistema de aquisição de dados deverá registar o intervalo de tempo, dt , entre o início e o fim da obstrução luminosa pela barra sempre que esta passa pelo sensor óptico, bem como o tempo decorrido desde o início do movimento.

A fórmula introduzida em 7 de 5.1.2 permite calcular a velocidade angular média da barra durante cada intervalo de tempo dt .

Consequentemente, para cada par (massa, diâmetro roldana), i.e., para cada momento da força aplicada sobre o sistema, existirá um conjunto de dados (impressos) contendo uma lista de pares (tempo decorrido desde o início do movimento, velocidade angular), referentes a cada passagem da barra pelo sensor óptico. Seja $M-D$, a designação de cada um desses conjuntos, em que M representa o valor em gramas da massa usada e D , o valor, em milímetros, do diâmetro da roldana usada.

5.1.4 Cálculos

Usando os dados dos conjuntos $M-D$, o aluno estará agora em condições de traçar um gráfico velocidade angular do corpo rígido vs. tempo decorrido desde o início do movimento, para cada par (massa, diâmetro roldana).

A disposição dos pontos de cada gráfico deverá fazer-se à volta de uma recta. Para obter os parâmetros que definem esta recta, em particular, o seu declive e o ponto em que corta o eixo das ordenadas, o aluno deverá conduzir uma regressão linear. O declive da recta é a aceleração angular do movimento de rotação.

Conhecendo o valor da aceleração angular para cada par (massa, diâmetro roldana), o aluno poderá calcular a constante de proporcionalidade entre a aceleração angular e o momento da força aplicada, que não é mais do que o momento de inércia do corpo rígido em torno do seu eixo de rotação. De facto, o aluno deverá traçar um gráfico [inverso da aceleração angular] vs. [inverso da massa], para cada um dos diâmetros da roldana tripla. A relação entre estas grandezas é linear, como mostra a equação (16) reescrita de modo conveniente,

$$\left(\frac{1}{\dot{\omega}}\right) = \frac{1}{rg} \left[I_{zz} \left(\frac{1}{m}\right) + r^2 \right] = \frac{I_{zz}}{rg} \left(\frac{1}{m}\right) + \frac{r}{g}, \quad (17)$$

pelo que o aluno deverá realizar uma regressão linear para determinar os parâmetros da recta. Para um valor constante do braço da força aplicada sobre o sistema, o declive desta é directamente proporcional ao momento de inércia pretendido.

6 Instruções para o Relatório

O relatório do trabalho experimental deverá consistir nos seguintes elementos ordenados como se mostra:

1. síntese dos fundamentos teóricos implícitos na experiência realizada;
2. teoria relevante para qualquer técnica matemática utilizada, em particular, no tratamento dos dados obtidos;
3. lista de material usado;
4. montagem experimental;
5. procedimento experimental abreviado;
6. cálculos efectuados, bem como quaisquer tabelas e/ou gráficos de interesse para as conclusões;
7. conclusões.

Para o conjunto de experiências a que este guia diz respeito, foi usada, no tratamento dos dados, a regressão linear. Assim, deverá ser incluída no relatório uma breve explicação sobre esta metodologia.

Torna-se também importante notar que deverão ser incluídos no relatório todos os cálculos e gráficos referidos nas secções 5.*.4. Além disso, nos cálculos efectuados o aluno deverá ter em consideração, não só a propagação de erros de leitura ou outros, bem como a exactidão e precisão dos resultados apresentados, mas também a noção de algarismo significativo. Neste sentido, o aluno poderá, por exemplo, consultar os seguintes endereços:

<http://www.hep.umn.edu/~physed/Research/PSL/apdxc.html>

<http://www.hep.umn.edu/~physed/Research/PSL/apdxb.html>

A apresentação de gráficos segue também algumas regras. Neste sentido, o aluno poderá, por exemplo, consultar o seguinte endereço:

<http://www.hep.umn.edu/~physed/Research/PSL/apdxd.html>

Finalmente, faz-se notar que as conclusões da experiência realizada deverão explicitar, claramente, de que forma os objectivos especificados no guia se ajustam aos resultados obtidos.